

HIDRÁULICA
DE CANALES ABIERTOS

HIDRAULICA DE CANALES ABIERTOS

VEN TE CHOW, Ph. D
Professor of Hydraulic Engineering
University of Illinois

Traducción
JUAN G. SALDARRIAGA
Ingeniero Civil, Universidad de los Andes
M. Sc. en Ingeniería Hidráulica
Universidad de Newcastle upon Tyne, Inglaterra
Profesor del Departamento de Ingeniería Civil
Universidad de los Andes

Revisión técnica
ANTONIO ZULUAGA ÁNGEL
Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia
M. Sc. en Hidráulica
Universidad de California

McGRAW-HILL

Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Guatemala • Lisboa • Madrid
México • Nueva York • Panamá • San Juan • Santiago de Chile • São Paulo
Auckland • Hamburgo • Londres • Milán • Montreal • Nueva Delhi • París
San Francisco • San Luis • Sidney • Singapur • Tokio • Toronto

Foto de portada: Andrés Hurtado García.

ISBN: 07-010776-9

Editora: Martha Edna Suárez R.

1234567890 9012356784

ISBN: 958-600-228-4

Se imprimieron 1.000 ejemplares en el mes de marzo de 2004
Impreso por Editorial Nomos S. A.
Impreso en Colombia **Printed in Colombia**

A

La humanidad y el bienestar humano

Contenido

PARTE III. FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

PARTE IV. FLUJO RÁPIDAMENTE VARIADO

PREFACIO

En los últimos años han venido desarrollándose con rapidez proyectos de recursos hidráulicos y trabajos de ingeniería hidráulica en todo el mundo. El conocimiento de la hidráulica de canales abiertos, esencial para el diseño de muchas estructuras hidráulicas, ha avanzado mediante pasos y saltos. Para los estudiantes e ingenieros en el campo de la ingeniería hidráulica, este conocimiento nuevo y valioso debía estar disponible en la forma de un libro apropiado. Por consiguiente no sorprende que algunos libros nuevos hayan aparecido en este momento. Sin embargo, muchos de ellos se presentan con enfoques limitados y todos están escritos en diversas lenguas[1]. En lengua inglesa, los dos libros mejor conocidos, respectivamente por Bakhmeteff y por Woodward y Posey, se publicaron hace varias décadas[2].

Este libro da un cubrimiento amplio de los desarrollos recientes; debería cubrir todas las necesidades presentes. Está diseñado como texto, tanto para estudiantes de pregrado como de posgrado y también como un compendio para los ingenieros practicantes. Se hace énfasis en las calidades de "docencia" y "práctica", al igual que se hacen intentos de presentar el material con el fin de cerrar la brecha que por lo general existe entre teoría y práctica. Para alcanzar estos objetivos, en lo posible el uso de matemáticas avanzadas se evita deliberadamente y la explicación de las teorías hidráulicas se simplifica de manera sustancial. Se dan ejemplos ilustrativos para mostrar la aplicación de las teorías, y problemas prácticos se proveen para

[1] Tales como: Étienne Crausse, *Hydraulique des canaux découverts en régime permanent* (*Hydraulics of Open Channels with Steady Flow*), Éditions Eyrolles, Paris, 1951; R. Silber, *Étude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières* (*Study and Description of Steady Flows in Canals and Rivers*), Dunod, Paris, 1954; Martin Schmidt, *Gerinnehydraulik* (*Open-channel Hydraulics*), VEB Verlag Technik-Bauverlag GMBH, Berlin y Wiesbaden, 1957; N. N. Pavlovskii, "Otkrytye rusla i sopriazhenie biefov sooruzhenii" ("Open channels and adjustment of water levels"), en *Sobranie sochinenii* (*Collected Works*), Vol. 1, Academy of Sciences of U.S.S.R., Moscow y Leningrad, 1955; pp. 309-543; y la nueva edición de M. D. Chertousov, *Gidravlika* (*Hydraulics*), Gosenergoizdat, Moscow y Leningrad, 1957.

[2] Boris A. Bakhmeteff, *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932; y Sherman M. Woodward y Chesley J. Posey, *Hydraulics of Steady Flow in Open Channels*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1941.

ejercicios. Además, se dan datos históricos breves en las notas de pie de página con el fin de estimular el interés del lector, al igual que amplias referencias para sus estudios independientes. Sin embargo, algunas de éstas no están fácilmente disponibles para el lector, pero se relacionan por su interés académico e histórico.

En esencia, el libro es el resultado de 20 años de experiencia del autor como estudiante, profesor, ingeniero, investigador y consultor en el campo de la ingeniería hidráulica. El manuscrito de este libro se desarrolló por primera vez en el año académico de 1951-1952 para ser utilizado en la enseñanza a los estudiantes de ingeniería civil, ingeniería agrícola e ingeniería mecánica y de mecánica teórica y aplicada en la Universidad de Illinois. Desde ese momento se han hecho varias revisiones. En un principio el material se preparó sólo para estudiantes de posgrado. Debido a la demanda general de un libro de diseño de estructuras hidráulicas para estudios de pregrado, el manuscrito se amplió para incluir más principios fundamentales y más procedimientos de diseño. Al mismo tiempo, la mayor parte de las matemáticas avanzadas y teorías se omitieron o se remplazaron por aproximaciones más prácticas utilizando operaciones matemáticas a un nivel no mayor que el de cálculo.

De 1951 a 1955 el autor hizo algunas visitas especiales a muchas agencias de ingeniería y firmas de los Estados Unidos para analizar problemas con sus ingenieros. Como resultado se recolectó una amplia información sobre las prácticas de diseño hidráulico, que se incorporó al manuscrito. Más tarde, el autor también visitó muchas instituciones y laboratorios hidráulicos en otros países e intercambió conocimientos con sus miembros de planta. En 1956 visitó Inglaterra, Francia, Bélgica, los Países Bajos, Alemania, Italia y Suiza. En 1958 visitó Austria, Turquía, India y Japón, y nuevamente Inglaterra, Francia y Bélgica. La información obtenida en éstos y en otros países por medio de publicaciones y correspondencia se agregó al borrador final del manuscrito como suplementos a la práctica norteamericana.

El texto se encuentra organizado en cinco partes, que son: Principios básicos, Flujo uniforme, Flujo gradualmente variado, Flujo rápidamente variado y Flujo no permanente. Las tres primeras partes cubren el material que a menudo debería tratarse en un semestre en el curso de hidráulica de canales abiertos. Para el curso de un semestre de diseño de estructuras hidráulicas, los capítulos 7 y 11 y la parte IV ofrecen la mayor parte del material que se necesita para propósitos de enseñanza. La parte V sobre flujo no permanente puede utilizarse para estudios avanzados o como material adicional para el curso de un semestre, dependiendo sobre todo de la discreción del instructor con referencia al tiempo disponible y al interés mostrado por los estudiantes.

En la parte I sobre los principios básicos, el tipo de flujo en canales abiertos se clasifica de acuerdo con la variación de los parámetros de flujo con respecto al espacio y al tiempo. Por simplicidad se utiliza la profundidad de flujo como el correspondiente parámetro para la clasificación. El estado de flujo se clasifica según el rango de las constantes del flujo con respecto a la viscosidad y a la gravedad. Estas constantes son el número de Reynolds y el número de Froude. Debido a que el efecto de la tensión superficial del agua es insignificante en muchos problemas de ingeniería, no se introduce el número de Weber como constante de flujo. De hecho, el estado de flujo puede clasificarse además por su estabilidad según el número de

Vedernikov o cualquier otro número apropiado. Sin embargo, este criterio no está bien establecido en la práctica de ingeniería y sólo se menciona de manera breve en el capítulo 8.

Se introducen cuatro coeficientes para las distribuciones de velocidades y de presiones. En particular, el coeficiente de energía se presenta en todo el libro, aunque a menudo se ignora en la mayor parte de los libros de hidráulica. En aplicacones prácticas el efecto del coeficiente de energía sobre los cálculos y, por consiguiente, sobre los diseños es importante, lo cual significa que no debe eliminarse, a pesar de que su valor no siempre puede determinarse con exactitud.

Los principios de energía y de *momentum* constituyen la base para la interpretación de muchos fenómenos hidráulicos. En el capítulo 3 se hace un tratamiento completo de estos principios. Como se pretende que el libro sea utilizado por ingenieros practicantes, el tratamiento de un problema en la mayor parte de los casos se basa en flujos unidimensionales o bidimensionales.

En la parte II se introducen algunas ecuaciones de flujo uniforme. A pesar de que existen muchas propuestas nuevas para una ecuación con un marco teórico, la ecuación de Manning aún mantiene su posición primordial indiscutible en los campos de las aplicaciones prácticas. Por consiguiente esta ecuación se utiliza mucho en este libro. Sin embargo, en ciertos problemas específicos se utiliza la ecuación de Chézy.

El diseño de flujo uniforme cubre canales no erosionables, erosionables y cubiertos por pasto. Los canales erosionables en general pueden clasificarse en tres tipos: canales que se socavan pero que no se sedimentan, canales que se sedimentan pero que no se socavan, y canales que se socavan y sedimentan simultáneamente. En los canales de los tipos 2 y 3, es necesario que el agua transporte los sedimentos, lo cual se considera un tema del dominio de la hidráulica fluvial, como se establecerá más adelante. Por consiguiente, en este libro sólo se tratan los canales del primer tipo, los cuales conducen agua relativamente clara en condiciones estables.

En la parte III sobre el flujo gradualmente variado se estudian algunos métodos para el cálculo de los perfiles de flujo. Se introduce un nuevo método de integración directa, el cual requiere del uso de una tabla para la función de flujo variado desarrollada por primera vez por el profesor Boris A. Bakhmeteff en 1912[3]. La tabla que se da en el apéndice D es una extensión de la tabla a un tamaño aproximadamente tres veces mayor que el original. Esta tabla extendida y una tabla para pendientes negativas las preparó el autor durante 1952-1954 con propósitos de enseñanza en la Universidad de Illinois[4]. Para el cálculo de los perfiles de flujo en conductos circulares también se da una tabla para la función de flujo variado en el apéndice E.

El método de los puntos singulares es una herramienta poderosa para el análisis de los perfiles de flujo y, como requiere el uso de matemáticas avanzadas, sólo se

[3] Boris A. Bakhmeteff, *O Neravnomernom Dvizhenii Zhidkosti v Otkrytom Rusle* (*Varied Flow in Open Channels*), St. Petersburg, Russia, 1912.

[4] Ven Te Chow, "Integrating the equation of gradually varied flow", artículo Nº 838, *Proceedings*, Vol. 81, *American Society of Civil Engineers*, noviembre de 1955, pp. 1-32. Análisis del autor en *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 83, Nº HY1, artículo Nº 1177, febrero de 1957, pp. 9-22.

describe de manera breve en el capítulo 9 con el fin de estimular interés adicional para el estudio teórico de problemas de flujo.

En la parte IV sobre flujo rápidamente variado, el tratamiento del problema se apoya sustancialmente en datos experimentales, debido a que este tipo de flujo es tan complicado que en la mayor parte de los casos un análisis teórico por si solo no dará suficiente información para propósitos de diseños prácticos. El uso de los métodos de la red de flujo y de las características se menciona pero no se dan detalles, debido a que el primero es tan común que puede encontrarse en muchos libros de hidráulica, en tanto que el último requiere el conocimiento de matemáticas avanzadas por fuera del alcance de este trabajo.

En la parte V sobre flujo no permanente, el tratamiento es general pero práctico. Debe reconocerse que este tipo de flujo es un tema bastante especializado[5]. El conocimiento de matemáticas avanzadas se requeriría si se diera un tratamiento completo en el libro.

Nótese que el objeto de este libro se relaciona sobre todo con el flujo de agua en canales donde ésta contiene muy poco material extraño. En consecuencia, los problemas relacionados con el transporte de sedimentos y atrapamiento de aire no se analizan por completo. Desde hace varios años el transporte de sedimentos en canales se ha convertido en un tema amplio que por lo general se trata en el estudio de hidráulica fluvial, materia que se estudia por separado[6]. De la misma manera, el flujo transiente en canales sujetos a la influencia de mareas es un tema especial en los campos de desarrollo rápido de hidráulica de mareas e ingeniería costera y, por consiguiente, está por fuera del alcance de este libro.

En una ciencia que ha alcanzado un nivel de desarrollo tan avanzado, gran parte del trabajo se necesita para la coordinación de las contribuciones existentes. En todo el texto, el autor ha intentado hacer reconocimiento específico con respecto a la fuente del material empleado, y cualquier falla al hacer esto es un error no intencional.

Para la preparación de este libro, ingenieros y administradores en muchas agencias de ingeniería aportaron gran información y amplia cooperación con mucho entusiasmo. El autor se considera en deuda especialmente con el U. S. Bureau of Reclamation, el U. S. Geological Survey, el U. S. Soil Conservation Service, el U. S. Agricultural Research Service, el U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Offices of the Chief Engineer y District Engineers of the U. S. Army Corps of Engineers, el U. S. Weather Bureau, el U. S. Bureau of Public Roads y la Tennessee Valley Authority. También muchos amigos y colegas amablemente

[5] Referencias especiales son: J.J. Stoker, "Water Waves", Vol. IV de *Pure and Applied Mathematics*, Interscience Publishers, New York, 1957; V. A. Arkhangelskii, *Raschety Neustanovivshegosia Dvizheniia v Otkrytykh Vodotokakh* (*Calculation of Unsteady Flow in Open Channels*), Academy of Sciences, U.S.S.R., 1947; y S. A. Khristianovich, "Neustanovivsheiesia dvizhenie v kanalakh i rekakh" ("Unsteady Motion in Channels and Rivers"), en *Nekotoryie Voprosy Mekhaniki Sploshnoĭ Sredy* (*Several Questions on the Mechanics of Continuous Media*), Academy of Sciences, U.S.S.R., 1938, pp. 13-154.

[6] Referencias especiales sobre hidráulica fluvial son: Serge Leliavsky, *An Introduction to Fluvial Hydraulics*, Constable and Co., Ltd., London, 1955; y T. Blench, *Regime Behaviour of Canals and Rivers*, Butterworth & Co. (Publishers) Ltd., London, 1957.

dieron información y ofrecieron sugerencias con generosidad. En particular, el autor desea agradecer al Dr. Hunter Rouse, profesor de mecánica de fluidos y director del Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa; al Dr. Arthur T. Ippen, profesor de hidráulica y director del Laboratorio de Hidrodinámica del Massachusetts Institute of Technology; al Dr. Giulio De Marchi, profesor de hidráulica y director del Laboratorio de Hidráulica del Institute of Hydraulic and Hydraulic Construction, Polytechnic Institute of Milan, Italia; al Dr. Roman R. Chugaev, profesor y jefe de construcción hidráulica del Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering, Polytechnical Institute of Leningrad, U.R.S.S.; a monsieur Pierre Danel, presidente de SOGRÉAH (Société Grenobloise d'Études et d'Applications Hydrauliques), Francia, y presidente de la International Association of Hydraulic Research; al Dr. Charles Jaeger, conferencista especial en el Imperial College of Science and Technology, University of London, y consultor de ingeniería de la English Electric Company, Ltd., Inglaterra; al profesor L. J. Tison, director del Hydraulic Institute, University of Ghent, Bélgica; al Dr. Tojiro Ishihara, profesor de hidráulica y decano de la facultad de ingeniería, Universidad de Kyoto, Japón; y al Dr. Otto Kirschmer, profesor de hidráulica y estructuras hidráulicas, del Technical Institute of Darmstadt, Alemania.

Se hace un reconocimiento especial al Dr. Nathan M. Newmark, profesor y jefe del departamento de ingeniería civil, Universidad de Illinois, por su empuje y soporte permanente a este proyecto; al Dr. James M. Robertson, profesor de mecánica teórica y aplicada, Universidad de Illinois, por su revisión y sus comentarios del capítulo 8 y sus conceptos teóricos; y al Dr. Steponas Kolupaila, profesor de ingeniería civil, Universidad de Notre Dame, por su lectura de todo el manuscrito y sus valiosas sugerencias. El Dr. Kolupaila también ayudó en la interpretación y recolección de información de literatura hidráulica, escrita en ruso, polaco y lituano y algunos otros idiomas que el autor desconoce. El autor también desea expresar su gratitud a aquéllos que han mostrado constantemente un interés por su trabajo, porque este interés ha significado un ímpetu fuerte hacia la finalización de este volumen.

Ven Te Chow

PARTE I

PRINCIPIOS BÁSICOS

CAPÍTULO 1

FLUJO EN CANALES ABIERTOS Y SU CLASIFICACIÓN

1-1. Descripción. El flujo de agua en un conducto puede ser *flujo en canal abierto* o *flujo en tubería*. Estas dos clases de flujo son similares en muchos aspectos pero se diferencian en un aspecto importante. El flujo en canal abierto debe tener una *superficie libre*, en tanto que el flujo en tubería no la tiene, debido a que en este caso el agua debe llenar completamente el conducto. Una superficie libre está sometida a la presión atmosférica. El flujo en tubería, al estar confinado en un conducto cerrado, no está sometido a la presión atmosférica de manera directa, sino sólo a la presión hidráulica.

Las dos clases de flujo se comparan en la figura 1-1. A la izquierda de ésta se muestra el flujo en tubería. Dos tubos piezométricos se encuentran instalados en las secciones 1 y 2 de la tubería. Los niveles de agua en estos tubos se mantienen por acción de la presión en la tubería en elevaciones representadas por la línea conocida como *línea de gradiente hidráulico*. La presión ejercida por el agua en cada sección del tubo se indica en el tubo piezométrico correspondiente, mediante la altura y de la columna de agua por encima del eje central de la tubería. La energía total del flujo en la sección con referencia a una línea base es la suma de la elevación z del eje central de la tubería, la altura piezométrica y y la altura de velocidad* $V^2/2g$, donde V es la velocidad media del flujo[1]. En la figura la energía está representada por la línea conocida como *línea de gradiente de energía* o, simplemente, *línea de energía*. La pérdida de energía que resulta cuando el agua fluye desde la sección 1 hasta la

* *Nota del traductor.* *"Velocity head"* se traduce como altura de velocidad; otros términos utilizados son cabeza de velocidad y carga de velocidad.

[1] Aquí se supone que la velocidad del canal está uniformemente distribuida a través de la sección del conducto; de otro modo, debería haberse hecho una corrección, tal como se describe en la sección 2-7 para canales abiertos.

sección 2 está representada por h_f. Un diagrama similar para el flujo en canal abierto se muestra en la parte derecha de la figura 1-1. Con propósitos de simplificación, se supone que el flujo es paralelo y que tiene una distribución de velocidades uniforme y que la pendiente del canal es pequeña. En este caso, la superficie de agua es la línea de gradiente hidráulico, y la profundidad del agua corresponde a la altura piezométrica[2].

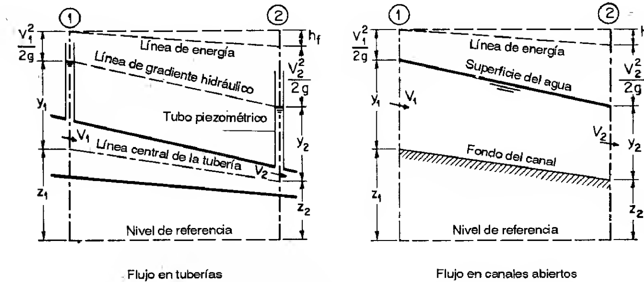


Figura 1-1. Comparación entre flujo en tuberías y flujo en canales abiertos.

A pesar de la similaridad que existe entre estos dos tipos de flujo, es mucho más difícil resolver problemas de flujo en canales abiertos que en tuberías a presión. Las condiciones de flujo en canales abiertos se complican por el hecho de que la posición de la superficie libre puede cambiar con el tiempo y con el espacio, y también por el hecho de que la profundidad de flujo, el caudal y las pendientes del fondo del canal y de la superficie libre son interdependientes. A menudo, es difícil obtener datos experimentales confiables en el caso de flujo en canales abiertos. Además, las condiciones físicas de los canales abiertos varían mucho más que las de tuberías. En éstas la sección transversal de flujo es fija, debido a que está completamente definida por la geometría del conducto. La sección transversal de una tubería por lo general es circular, en tanto que la de un canal abierto puede ser de cualquier forma, desde circular hasta las formas irregulares de las corrientes naturales. En las tuberías, la superficie interior por lo general tiene rugosidades que varían desde aquellas correspondientes a tuberías nuevas de latón liso o de madera machimbrada, por un lado, hasta las de tuberías de hierro o acero, viejas y corroídas, por el otro. En canales abiertos la superficie varía desde la correspondiente a metales pulidos utilizados en canaletas de prueba hasta la correspondiente a lechos rugosos e irregulares en ríos. Además, la rugosidad en un canal abierto varía con la posición de la superficie libre. Por consiguiente, la selección de los coeficientes de fricción implica una mayor incertidumbre para el caso de canales abiertos que para el de

[2] Si el flujo fuera curvilíneo o la pendiente del canal fuera alta, la altura piezométrica sería, de manera apreciable, diferente de la profundidad del flujo (secciones 2-9 y 2-10). Como resultado, la línea de gradiente hidráulico no coincidiría exactamente con la superficie del agua.

tuberías. En general, el tratamiento del flujo en canales abiertos es más empírico que el correspondiente a flujo en tuberías. El método empírico es el mejor método disponible en el presente y, si se aplica de manera cuidadosa, puede producir resultados de valor práctico.

El flujo en un conducto cerrado no es necesariamente flujo en tubería. Si tiene una superficie libre, puede clasificarse como flujo en canal abierto. Un alcantarillado de aguas lluvias, por ejemplo, el cual es un conducto cerrado, generalmente se diseña para operar como flujo en canal abierto, debido a que se espera que mantenga una superficie libre la mayor parte del tiempo.

1-2. Tipos de flujo. El flujo en canales abiertos puede clasificarse en muchos tipos y describirse de varias maneras. La siguiente clasificación se hace de acuerdo con el cambio en la profundidad de flujo con respecto al tiempo y al espacio.

Flujo permanente y flujo no permanente: tiempo como criterio. Se dice que el flujo en un canal abierto es *permanente* si la profundidad de flujo no cambia o puede suponerse constante durante el intervalo de tiempo en consideración. El flujo es *no permanente* si la profundidad cambia con el tiempo. En la mayor parte de los problemas de canales abiertos es necesario estudiar el comportamiento del flujo solo bajo condiciones permanentes. Sin embargo, si el cambio en la condición del flujo con respecto al tiempo es importante, el flujo debe tratarse como no permanente. En crecientes y oleadas, por ejemplo, que son casos comunes de flujo no permanente, el nivel de flujo cambia de manera instantánea a medida que las ondas pasan, y el elemento tiempo se vuelve de vital importancia para el diseño de estructuras de control.

Para cualquier flujo, el caudal Q en una sección del canal se expresa por

$$Q = VA \tag{1-1}$$

donde V es la velocidad media y A es el área de la sección transversal de flujo perpendicular a la dirección de éste, debido a que la velocidad media está definida como el caudal dividido por el área de la sección transversal.

En la mayor parte de los problemas de flujo permanente el caudal es constante a través del tramo de canal en consideración; en otras palabras, el flujo es *continuo*. Entonces, a partir de la ecuación (1-1),

$$Q = V_1A_1 = V_2A_2 = \dots \tag{1-2}$$

donde los subíndices designan diferentes secciones del canal. Ésta es la *ecuación de continuidad* para un flujo continuo permanente.

Sin embargo, la ecuación (1-2) obviamente no es válida cuando el caudal de un flujo permanente no es *uniforme* a lo largo del canal, es decir, cuando parte del agua sale o entra a lo largo del curso del flujo. Este tipo de flujo, conocido como *flujo espacialmente variado* o *discontinuo*, se presenta en cunetas a lo largo de carreteras, en vertederos de canal lateral, en canaletas de agua de lavado de filtros, en canales de efluentes alrededor de tanques de plantas de tratamiento de aguas residuales y en canales principales de riego y drenaje en sistemas de irrigación.

La ley de continuidad para flujo no permanente requiere la consideración del tiempo. Por consiguiente, la ecuación de continuidad para flujo continuo no permanente debe incluir el elemento tiempo como una de sus variables (*véase* sección 18-1).

Flujo uniforme y flujo variado: espacio como criterio. Se dice que el flujo en canales abiertos es *uniforme* si la profundidad de flujo es la misma en cada sección del canal. Un flujo uniforme puede ser permanente o no permamente, según cambie o no la profundidad con respecto al tiempo.

El *flujo uniforme permanente* es el tipo de flujo fundamental que se considera en la hidráulica de canales abiertos. La profundidad del flujo no cambia durante el intervalo de tiempo bajo consideración. El establecimiento de un *flujo uniforme no permanente* requeriría que la superficie del agua fluctuara de un tiempo a otro pero permaneciendo paralela al fondo del canal. En efecto, ésta es una condición prácticamente imposible. Por tanto, el término "flujo uniforme" se utilizará de aquí en adelante para designar el flujo uniforme permanente.

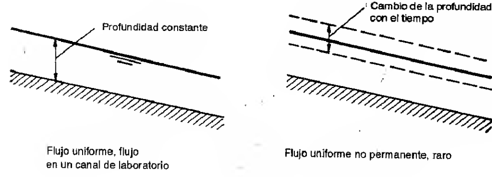
El flujo es *variado* si la profundidad de flujo cambia a lo largo del canal. El flujo variado puede ser permanente o no permanente. Debido a que el flujo uniforme no permanente es poco frecuente, el término "flujo no permanente" se utilizará de aquí en adelante para designar exclusivamente el *flujo variado no permanente.*

El flujo variado puede clasificarse además como *rápidamente variado* o *gradualmente variado*. El flujo es rápidamente variado si la profundidad del agua cambia de manera abrupta en distancias comparativamente cortas; de otro modo, es gradualmente variado. Un flujo rápidamente variado también se conoce como *fenómeno local*; algunos ejemplos son el resalto hidráulico y la caída hidráulica.

Para mayor claridad, la clasificación del flujo en canales abiertos se resume de la siguiente manera:

A. Flujo permanente
   1. Flujo uniforme
   2. Flujo variado
      a. Flujo gradualmente variado
      b. Flujo rápidamente variado
B. Flujo no permanente
   1. Flujo uniforme no permanente (raro)
   2. Flujo no permanente (es decir, flujo variado no permanente)
      a. Flujo gradualmente variado no permanente
      b. Flujo rápidamente variado no permanente.

Los diferentes tipos de flujo se esquematizan en la figura 1-2. Con propósitos ilustrativos, estos diagramas, al igual que otros esquemas similares de canales abiertos en este libro, se han dibujado con una escala vertical exagerada, debido a que los canales comunes tienen bajas pendientes de fondo.



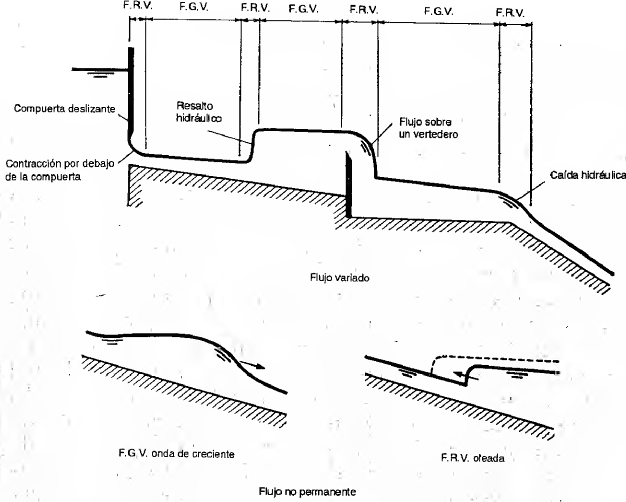


Figura 1-2. Diferentes tipos de flujo en canales abiertos. F.G.V. = flujo gradualmente variado. F.R.V. = flujo rápidamente variado.

1-3. Estado de flujo. El estado o comportamiento del flujo en canales abiertos está gobernado básicamente por los efectos de viscosidad y gravedad en relación con las fuerzas inerciales del flujo. La tensión superficial del agua puede afectar el comportamiento del flujo bajo ciertas circunstancias, pero no juega un papel significativo en la mayor parte de los problemas de canales abiertos que se presentan en ingeniería.

Efecto de viscosidad. El flujo puede ser laminar, turbulento o transicional según el efecto de la viscosidad en relación con la inercia.

El flujo es *laminar* si las fuerzas viscosas son muy fuertes en relación con las fuerzas inerciales, de tal manera que la viscosidad juega un papel importante en determinar el comportamiento del flujo. En el flujo laminar, las partículas de agua se mueven en trayectorias suaves definidas o líneas de corriente, y las capas de fluido con espesor infinitesimal parecen deslizarse sobre capas adyacentes.

El flujo es *turbulento* si las fuerzas viscosas son débiles en relación con las fuerzas inerciales. En flujo turbulento, las partículas del agua se mueven en trayectorias irregulares, que no son suaves ni fijas, pero que en conjunto todavía representan el movimiento hacia adelante de la corriente entera.

Entre los estados de flujo laminar y turbulento existe un estado mixto o *transicional*.

El efecto de la viscosidad en relación con la inercia puede representarse mediante el *número de Reynolds*, definido por

$$\mathbf{R}^* = \frac{VL}{\nu} \tag{1-3}$$

donde V es la velocidad del flujo en pies/s; L es una longitud característica en pies, la cual es considerada igual al radio hidráulico R de un conducto; y ν (nu) es la viscosidad cinemática del agua en pies^2/s. La viscosidad cinemática en pies^2/s es igual a la viscosidad dinámica μ (mu) en slug/pies-s dividida por la densidad ρ (rho) en slug/pie^3. Para agua a 68 °F (20 °C), $\mu = 2.09 \times 0^{-5}$ y $\rho = 1.937$; por consiguiente, $\nu = 1.08 \times 10^{-5}$.

El flujo en canales abiertos es laminar si el número de Reynolds **R** es pequeño, y turbulento si **R** es grande. Muchos experimentos han demostrado que el flujo en tuberías cambia de laminar a turbulento en el rango de **R** entre el valor crítico 2,000 y un valor que puede ser tan alto como 50,000[3]. En estos experimentos el diámetro de la tubería se tomó como la longitud característica en la definición del número de Reynolds. Cuando se toma el radio hidráulico como la longitud característica, el rango correspondiente es desde 500 hasta 12,500[3], debido a que el diámetro de una tubería es cuatro veces su radio hidráulico.

Los estados laminar, turbulento y transicional de flujo en canales abiertos pueden expresarse mediante un diagrama que muestre la relación entre el número de Reynolds y el factor de fricción de la ecuación de Darcy Weisbach. Tal diagrama, a menudo conocido como *diagrama de Stanton* [1], ha sido desarrollado para el flujo en tuberías. La *ecuación de Darcy-Weisbach*[4], también desarrollada inicialmente para el flujo en tuberías, es

$$h_f = f \frac{L}{d_0} \frac{V^2}{2g} \tag{1-4}$$

donde h_f es la pérdida por fricción en pies para flujo en la tubería, f es el factor de fricción, L es la longitud de la tubería en pies, d_0 es el diámetro de la tubería en pies, V es la velocidad de flujo en pies/s y g es la aceleración debida a la gravedad en pies/s^2.

* *Nota del revisor de la traducción.* El número de Reynolds es un parámetro adimensional cuyo valor es idéntico independientemente del sistema de unidades, siempre y cuando las unidades utilizadas sean consistentes.

3 Nótese que en realidad no existe un límite superior definitivo.

4 Como resultado del estudio de Darcy [2] sobre el flujo en tuberías, su nombre generalmente se asocia al de Weisbach [3] para designar la ecuación que fue formulada primero por Weisbach. En realidad, d'Aubuisson [4] presentó, antes que Darcy, una ecuación que puede reducirse a la forma de la ecuación (1-4).

Debido a que $d_0 = 4R$ y que el gradiente de energía es $S = h_f/L$, la ecuación anterior puede expresarse para el factor de fricción como

$$f = \frac{8gRS}{V^2} \tag{1-5}$$

Esta ecuación también puede aplicarse a los flujos uniforme y casi uniforme en canales abiertos.

La relación *f*-**R** para tuberías lisas puede expresarse mediante la *ecuación de Blasius* [5]:

$$f = \frac{0.223}{\mathbf{R}^{0.25}} \qquad (1\text{-}6)^5$$

la cual se cree que es válida sólo cuando el valor de **R** se encuentra entre 750 y 25,000. Para valores mayores de **R**, von Kármán [6] desarrolló una expresión general, que fue modificada posteriormente por Prandtl [7] para que representara con mayor fidelidad los datos obtenidos por Nikuradse [8]. La *ecuación de Prandtl-von Kármán* resultante es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(\mathbf{R}\sqrt{f}) + 0.4 \tag{1-7}$$

Las ecuaciones (1-6) y (1-7) se utilizarán en el siguiente análisis como base para comparar las condiciones de flujo en canales abiertos. Debe anotarse que las ecuaciones correspondientes para flujo en canales abiertos han sido deducidas por Keulegan [9] y son muy similares a las ecuaciones para flujo en tuberías, determinadas antes. Sin embargo, debe considerarse que debido a la superficie libre y a la interdependencia entre el radio hidráulico, el caudal y la pendiente, la relación *f*-**R** en flujo en canales abiertos no sigue *exactamente* los conceptos simples aplicables al flujo en tuberías. Algunos aspectos específicos de la relación *f*-**R** y flujo en canales abiertos se describen a continuación.

En varias publicaciones sobre hidráulica[6] se encuentran disponibles datos para la determinación de la relación *f*-**R** para el flujo en canales abiertos. La figura 1-3, que ilustra gráficamente la relación para el flujo en *canales lisos*, está basada en los datos desarrollados en la Universidad de Illinois[7] [21] y en la Universidad de Minnesota [20]. En esta gráfica pueden apreciarse los siguientes aspectos:

1. La gráfica muestra con claridad cómo el estado de flujo cambia de laminar a turbulento a medida que el número de Reynolds aumenta. La discontinuidad de la gráfica y la expresión de los datos caracterizan la región de transición, al igual que en el diagrama de Stanton para el flujo en tuberías. El rango de transición, sin embargo, no está tan bien definido como en el caso de flujo en tuberías. El número de Reynolds crítico más bajo depende en cierto modo de la forma del canal. El valor varía desde 500 a 600, siendo generalmente mayor que el valor para el flujo en tuberías. Para propósitos prácticos, el rango para la zona de transición para **R** en flujo en canales abiertos puede suponerse desde 500 hasta 2,000. Sin embargo, debe notarse que el valor superior es arbitrario, debido a que no existe un límite superior definido para todas las condiciones de flujo.

[5] En esta ecuación, el radio hidráulico se utiliza como la longitud característica en la definición del número de Reynolds. Si se hubiese utilizado el diámetro de la tubería como la longitud característica, la constante numérica del numerador de esta ecuación hubiese sido 0.316.

[6] *Véanse* referencias 10 a 23.

[7] Los datos para el canal rectangular fueron obtenidos gracias al profesor W. M. Lansford y procesados para el presente propósito por el autor.

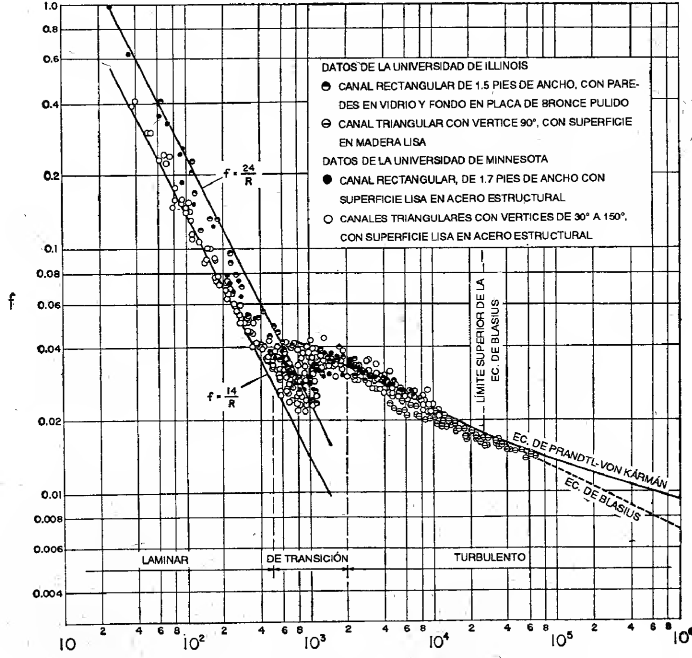


Figura 1-3. Relación *f*-**R** para flujo en canales lisos.

2. Los datos en la región laminar pueden expresarse mediante una ecuación general del tipo

$$f = \frac{K}{\mathbf{R}} \tag{1-8}$$

A partir de las ecuaciones (1-3) y (1-5) puede demostrarse que

$$K = \frac{8gR^2S}{\nu V} \tag{1-9}$$

Debido a que V y R tienen valores específicos para una forma determinada del canal, K es un factor puramente numérico que depende sólo de la forma del canal. Para flujo laminar en canales lisos, el valor de K puede determinarse de manera teórica [20]. La gráfica de la figura 1-3 indica que K es casi 24 para los canales rectangulares, y 14 para los canales triangulares bajo consideración.

3. Los datos en la región turbulenta corresponden con buena aproximación a la curva de Blasius-Prandtl-von Kármán. Esto indica que la ley para flujo turbulento en tubos lisos puede ser más o menos representativa para todos los canales lisos. La gráfica también muestra que la forma del canal no tiene una influencia importante en la fricción de flujos turbulentos, contrario a lo que ocurre en flujo laminar.

Los datos para flujo laminar obtenidos en la Universidad de Minnesota [20] y la información para flujo turbulento recolectada individualmente por Kirschmer [15, 16], Eisner [22] y Koženy [23] se muestran en el diagrama para flujo en *canales rugosos* (figura 1-4). En algunos de los datos la rugosidad del canal está representada

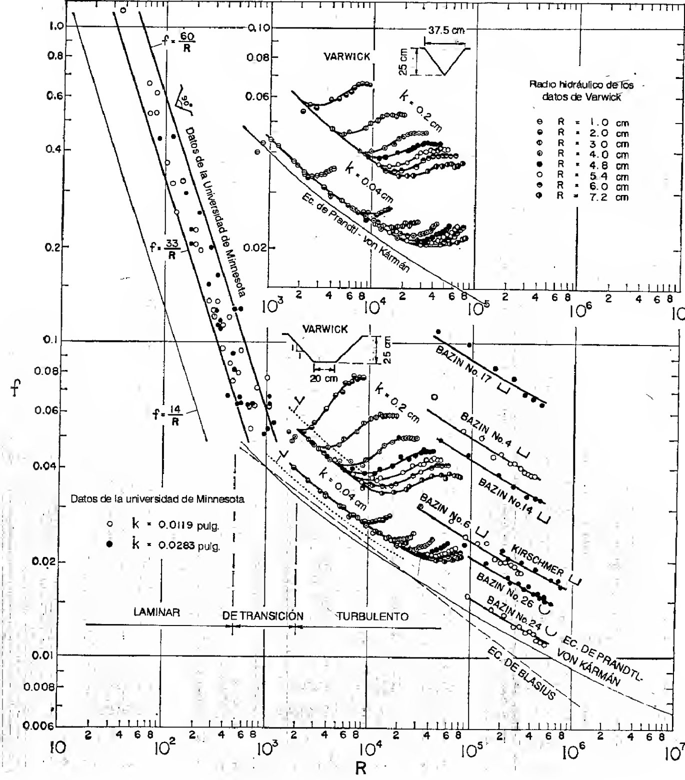


Figura 1-4. Relación *f*-**R** para flujo en canales rugosos. Canales de Bazin: Nº 4, gravas embebidas en cemento; Nº 6, madera sin pulir; Nº 14, madera sin pulir con rugosidad adicional compuesta por tiras transversales de madera de 27 mm de largo, 10 mm de alto y 10 mm de espaciamiento; Nº 17, igual que el Nº 14 excepto por el espaciamiento de 50 mm; Nº 24, revestimiento de cemento; Nº 26, madera sin pulir. Canal de Kirschmer: concreto liso.

por k, que es una medida del tamaño de las partículas rugosas que forman la superficie del canal. El diagrama ilustra los siguientes aspectos:

1. En la región laminar los datos pueden definirse mediante la ecuación (1-8). En esta región, el valor de K es generalmente mayor que el correspondiente a canales lisos, y varía entre 60 y 33, indicando la pronunciada influencia de la rugosidad del canal en el factor de fricción.

2. En la región turbulenta la forma del canal tiene un efecto pronunciado en el factor de fricción. Se cree que, cuando el grado de rugosidad es constante, el factor de fricción disminuye de acuerdo con el orden de canales rectangulares, triangulares, trapezoidales y circulares. Siguiendo las sugerencias de Prandtl, Kirschmer [15, 16] explicó que el efecto de la forma del canal podría deberse al desarrollo de un flujo secundario, el cual es aparentemente más pronunciado en canales rectangulares que en canales triangulares, por ejemplo. El flujo secundario es el movimiento de partículas de agua en una sección transversal a la dirección longitudinal del canal. Un flujo secundario alto implica gran pérdida de energía y por consiguiente causa una mayor resistencia en el canal.

3. En la región turbulenta la mayor parte de las curvas son casi paralelas a la curva de Prandtl-von Kármán. Esta curva sirve como una posición limitante aproximada hacia la cual tiende una curva a medida que el factor de resistencia total disminuye. De acuerdo con un concepto dado por Morris [24] (sección 8-2), el aumento de las curvas por encima de la curva de conducto liso puede explicarse como un resultado de la pérdida de energía adicional generada por los elementos rugosos. Cuando el número de Reynolds es muy alto, algunas curvas se vuelven esencialmente horizontales, y alcanzan un estado de flujo conocido como de *turbulencia completa*. En este estado el valor de f es independiente del número de Reynolds y depende sólo de la rugosidad, el radio hidráulico y la forma del canal.

4. La curva correspondiente a los datos de Varwick [16] para una rugosidad, un radio hidráulico y una forma de canal determinados empieza como una curva paralela a la curva de Prandtl-von Kármán, luego sube a medida que el número de Reynolds aumenta y, por último, se vuelve horizontal a medida que se alcanza un estado de turbulencia completa. La subida de la curva es un fenómeno particular que demanda explicación[8] y, debido a que esto no ha sido verificado por otros datos, parece que son necesarios más estudios experimentales para sustentarla.

Debe notarse que las descripciones anteriores están limitadas a flujos de baja velocidad, o subcríticos (los cuales serán definidos más adelante en este numeral) y a flujos en los cuales la tensión superficial no tiene una influencia significativa.

En la mayor parte de los canales abiertos el flujo laminar ocurre con muy poca frecuencia. El hecho de que la superficie de una corriente aparezca lisa y transparente a un observador no indica que el flujo es laminar; más probablemente, esto indica que la velocidad superficial es menor que la requerida para la formación de ondas de capilaridad. Sin embargo, se sabe que el flujo laminar en canales abiertos existe

[8] De acuerdo con el concepto de Morris [24], este fenómeno probablemente representa una transición de un tipo de flujo a otro con mayores pérdidas de energía. A medida que el número de Reynolds aumenta, el flujo puede estar cambiando de flujo cuasiliso a flujo con interferencia de remolinos, y luego a flujo de rugosidad aislada (sección 8-2).

a menudo cuando láminas delgadas de agua fluyen sobre la superficie del suelo o cuando se crea deliberadamente en canales para la prueba de modelos.

Como el flujo en la mayor parte de los canales es turbulento, un modelo empleado para simular un canal prototipo debe ser diseñado de tal manera que el número de Reynolds del flujo en el canal modelo esté en el rango turbulento.

Efecto de la gravedad. El efecto de la gravedad sobre el estado de flujo se representa por la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas gravitacionales. Esta relación está dada por el *número de Froude*[9], definido como

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \tag{1-10}$$

donde V es la velocidad media del flujo en pies/s, g es la aceleración de la gravedad en pies/s^2 y L es una longitud característica en pies. En el flujo en canales abiertos, la longitud característica se hace igual a la *profundidad hidráulica* D, la cual está definida como el área de la sección transversal del agua perpendicular a la dirección del flujo en el canal dividida por el ancho de la superficie libre. Para canales rectangulares ésta es igual a la profundidad de la sección de flujo.

Cuando **F** es igual a la unidad, la ecuación (1-10) se convierte en

$$V = \sqrt{gD} \tag{1-11}$$

y se dice que el flujo está en un estado *crítico*. Si **F** es menor que la unidad, o $V < \sqrt{gD}$, *el flujo es subcrítico*. En este estado el papel jugado por las fuerzas gravitacionales es más pronunciado; por tanto, el flujo tiene una velocidad baja y a menudo se describe como tranquilo y de corriente lenta. Si **F** es mayor que la unidad, o $V > \sqrt{gD}$, el flujo es *supercrítico*. En este estado las fuerzas inerciales se vuelven dominantes; el flujo tiene una alta velocidad y se describe usualmente como rápido, ultrarrápido y torrencial.

En la mecánica de las ondas de agua, la velocidad crítica $\sqrt{gD}$ es igual a la *celeridad* de pequeñas ondas gravitacionales que pueden ocurrir en aguas poco profundas en canales como resultado de cualquier cambio momentáneo en la profundidad local del agua (sección 18-6). Un cambio de este tipo puede ser causado por perturbaciones u obstáculos en el canal, que causan un desplazamiento del agua por encima y por debajo del nivel medio de la superficie y, por consiguiente, crean ondas que ejercen peso o fuerza gravitacional. Debe anotarse que una onda gravitacional puede propagarse hacia aguas arriba en un canal con flujo subcrítico pero no puede hacerlo en un canal con flujo supercrítico, debido a que la celeridad es mayor que la velocidad de flujo en el primer caso y menor en el segundo. Por consiguiente, la posibilidad o imposibilidad de que una onda gravitacional se

[9] Otras relaciones adimensionales utilizadas con el mismo propósito incluyen 1) el *factor de flujo cinético* $\lambda = V^2/gL$, $= \mathbf{F}^2$, utilizado por primera vez por Rehbock [25] y luego por Bakhmeteff [26]; 2) el número de Boussinesq $\mathbf{B} = V/\sqrt{2gR}$, utilizado por primera vez por Engel [27]; y 3) el *grado cinético* o *relación de altura de velocidad* $k = V^2/2gL$, propuesto por Stevens [28] y Posey [29], respectivamente.

propague hacia aguas arriba puede utilizarse como un criterio para diferenciar entre los flujos subcrítico y supercrítico.

Debido a que el flujo en la mayor parte de los canales está controlado por efectos gravitacionales, un modelo utilizado para simular un canal prototipo con propósitos de prueba debe ser diseñado teniendo en cuenta este efecto; es decir, el número de Froude del flujo en el canal modelo debe ser igual al número de Froude del flujo en el canal prototipo.

1-4. Regímenes de flujo. En un canal abierto el efecto combinado de la viscosidad y de la gravedad puede producir cualquiera de cuatro *regímenes de flujo*, los cuales son, 1) *subcrítico-laminar*, cuando **F** es menor que la unidad y **R** está en el rango laminar; 2) *supercrítico-laminar*, cuando **F** es mayor que la unidad y **R** está en el rango laminar; 3) *supercrítico-turbulento*, cuando **F** es mayor que la unidad y **R** está en el rango turbulento; y 4) *subcrítico-turbulento*, cuando **F** es menor que la unidad y **R** está en el rango turbulento. La relación profundidad-velocidad para los cuatro regímenes de flujo en un canal abierto ancho puede ilustrarse mediante una gráfica logarítmica (figura 1-5) [30]. La línea gruesa para **F** = 1 y la banda sombreada para el rango transicional laminar-turbulento se intersecan en la gráfica y dividen el área total en cuatro regiones, cada una de las cuales representa un régimen de flujo. Los primeros dos regímenes, subcrítico-laminar y supercrítico-laminar, no son frecuentes en la hidráulica aplicada de canales abiertos, debido a que el flujo es generalmente turbulento en los canales considerados en problemas de ingeniería. Sin embargo, estos regímenes ocurren con frecuencia cuando existe una profundidad muy pequeña, —lo cual es conocido como *flujo en láminas*— y se vuelven significativos en problemas tales como la prueba en modelos hidráulicos, el estudio de flujo superficial sobre el terreno y el control de erosión para tal flujo.

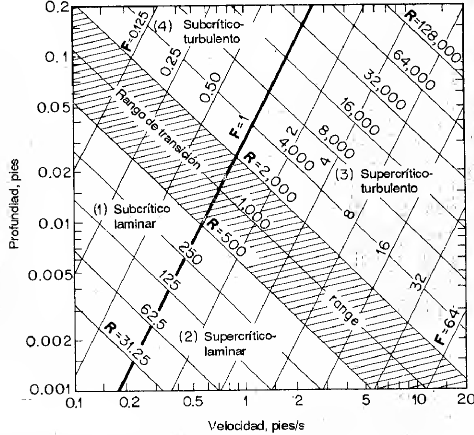


Figura 1-5. Relación profundidad-velocidad para cuatro regímenes de flujo en canales abiertos (*de acuerdo con Robertson y Rouse* [30]).

En la figura 1-6 se muestran fotografías de los cuatro regímenes de flujo. En cada fotografía la dirección de flujo es desde la izquierda hacia la derecha. Todos los flujos son uniformes con excepción de aquellos localizados de la parte derecha de las fotografías (B) y (C). La fotografía (A) representa el flujo uniforme subcrítico-laminar. El flujo es subcrítico, debido a que el número de Froude se ajustó ligeramente por debajo del valor crítico. El trazo de tinta no mezclado indica que es laminar. La fotografía (B) muestra un flujo uniforme supercrítico-laminar que cambia a variado subcrítico-turbulento. La fotografía (C) muestra un flujo uniforme supercrítico-turbulento que cambia a variado-subcrítico turbulento. En ambos casos, la mezcla de tinta es la evidencia de la turbulencia.

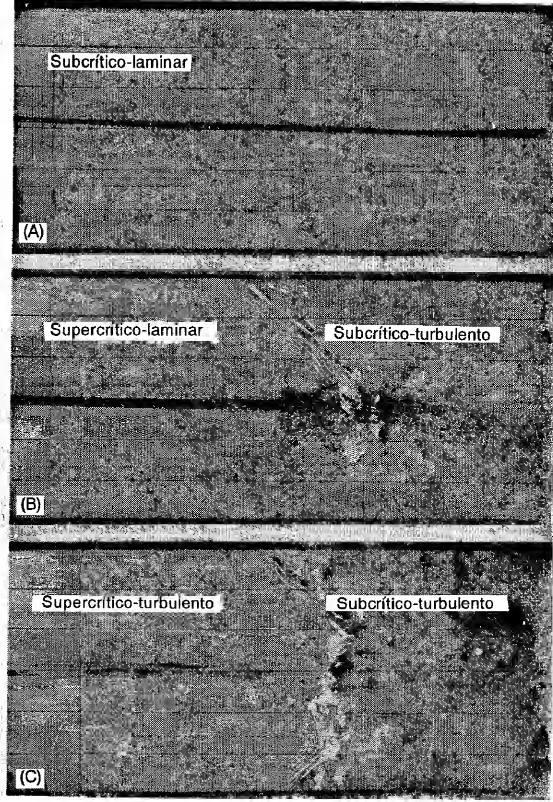


Figura 1-6. Fotografías que muestran cuatro regímenes de flujo en un canal de laboratorio (*cortesía de H. Rouse*).

Se cree que la acción gravitacional puede tener un efecto definitivo sobre la resistencia al flujo en canales en el rango turbulento. Los datos experimentales estudiados por Jegorow [31] y Iwagaki [32], para canales rectangulares lisos, y por Hom-ma [33], para canales rugosos, han demostrado que en el régimen del flujo supercrítico-turbulento el factor de fricción probablemente se incrementa con aumentos en el número de Froude. Por lo general, el efecto de la gravedad en el valor de f es prácticamente insignificante cuando el número de Froude es pequeño, por ejemplo, menor que 3. Una investigación adicional hecha por Iwagaki [34] indica que, con el aumento del número de Froude, el factor de fricción para flujo turbulento tanto en canales abiertos lisos como rugosos se vuelve mayor que el correspondiente a tuberías. Es posible que la presencia de la superficie libre en flujo en canales abiertos haga que el canal sea hidráulicamente más rugoso que la tubería. Cuando existan más datos y evidencia disponible, el número de Froude, que representa el efecto gravitacional, podrá considerarse como un factor adicional en la definición de la relación f-**R** para flujo supercrítico-turbulento.

PROBLEMAS

1-1. A partir de la figura 1-1, demuestre que el caudal teórico del flujo en canales abiertos puede expresarse mediante

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2g(\Delta y - h_f)}{1 - (A_2/A_1)^2}} \tag{1-12}$$

donde A_1 y A_2 son las áreas de la sección transversal de flujo en las secciones 1 y 2, respectivamente, y Δy es la caída en la superficie del agua entre las secciones.

1-2. Verifique la ecuación (1 10).

1-3. Verifique mediante cálculos las relaciones profundidad-velocidad que ilustra la figura 1-5 para los cuatro regímenes de flujo en un canal rectangular ancho. La temperatura del agua se toma como 68°F.

1-4. Se utiliza un modelo de canal para simular un canal prototipo de 100 pies de ancho, que transporta un caudal de 500 pies^3/s con una profundidad de 4 pies. El modelo se diseña para efectos gravitacionales y se asegura una condición de flujo turbulento. Determine el tamaño mínimo del modelo y la relación de escalas, suponiendo que el límite superior de la región de flujo transicional es **R** = 2,000. La relación de escala es la relación de la dimension lineal del modelo con respecto a la del prototipo.

REFERENCIAS

1. T. E. Stanton y J. R. Pannell, "Similarity of motion in relation to surface friction of fluids", *Philosophical Transactions*, Vol. 214A, Royal Society of London, 1914, pp. 199-224.
2. H. Darcy, "Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux" ("Experimental researches on the flow of water in pipes"), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 38, junio 26, 1854, pp. 1109-1121.
3. Julius Weisbach, *Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinenmechanik* (Textbook of Engineering Mechanics), Brunswick, Germany, 1845.

4. J. F. d'Aubuisson de Voisins, *Traité d'hydraulique* (Treatise on Hydraulics), Levrant, París, 2ª ed., 1840; traducido al inglés por Joseph Bennett, Little, Brown & Company, Boston, 1852, pp. 202-211.
5. H. Blasius, "Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten" (The law of similitude for frictional motions in fluids), *Forschungsheft des Vereins deutscher Ingenieure*, Nº 131, Berlín, 1913.
6. Theodor von Kármán, "Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz" (Mechanical similitude and turbulence), *Proceedings of the 3d. International Congress for Applied Mechanics*, Vol. I, Stockholm, 1930, pp. 85-93.
7. L. Prandtl, "The mechanics of viscous fluids", en W. F. Durand (editor-in-chief), *Aerodynamic Theory*, Vol. III, div. G, Springer-Verlag, Berlin, 1935, p. 142.
8. J. Nikuradse, "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren" (Laws of turbulent flow in smooth pipes), *Forschungsheft des Vereins deutscher Ingenieure*, Nº 356, Berlín, 1932.
9. Garbis H. Keulegan, "Laws of turbulent flow in open channels", paper RP1151, *Journal of Research*, Vol. 21, U.S. National Bureau of Standards, diciembre, 1938, pp. 707-741.
10. J. Allen, "Streamline and turbulent flow in open channels", *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Ser. 7, Vol. 17, junio, 1934, pp. 1081-1112, .
11. H. Bazin, "Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts" ("Experimental researches on the flow of water in open channels"), *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, París, Vol. 19, 1865.
12. Studies of river bed materials and their movement, with special reference to the lower Mississippi River, *U.S. Waterways Experiment Station, Technical Paper* 17, enero, 1935.
13. S. P. Raju, "Versuche über den Strömungswiderstand gekrümmter offener Kanäle" (Experiments of flow resistance in curved open channels), *Mitteilungen des hydraulischen Instituts der technischen Hochschule München*, Nº 6, Munich, 1933, pp. 45-60. Traducción inglesa por Clarence E. Bardsley: Resistance to flow in curved open channels, *Proceedings, American Society of Civil Engineers*, Vol. 63, parte 2, pp. 49 y 1834, noviembre, 1937.
14. Lorenz G. Straub, "Studies of the transition-region between laminar and turbulent flow in open channels", *Transactions*, Vol. 20, parte IV, *American Geophysical Union*, 1939, pp. 649-653.
15. Otto Kirschmer, "Reibungsverluste in Röhren und Kanälen" (Frictional losses in pipes and channels), *Die Wasserwirtschaft*, Stuttgart, Vol. 39, Nº 7, abril, 1949, pp. 137-142, Nº 8, mayo, 1949, pp. 168-174.
16. Otto Kirschmer, "Pertes de charge dans les conduites forcées et les canaux découverts" (Energy losses in pressure conduits and open channels), *Revue générale de l'hydraulique*, París, Vol. 15, Nº 51, mayo-junio, 1949, pp. 115-138.
17. Yuichi Iwagaki, "Discussion on laminar to turbulent flow in a wide open channel", en W. M. Owen, *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 1165-1166.
18. Horace William King, *Handbook of Hydraulics*, revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 4ª ed., 1954, pp. 7-35.
19. F. Bettes, "Non-uniform flow in channels", *Civil Engineering and Public Works Review*, London, Vol. 52, Nº 609, marzo, 1957, pp. 323-324, Nº 610, abril, 1957, pp. 434-436.
20. Lorenz G. Straub, Edward Silberman, y Herbert C. Nelson, "Open-channel flow at small Reynolds numbers", *Transactions*, Vol. 123, *American Society of Civil Engineers*, 1958, pp. 685-706.
21. Wallace M. Lansford y James M. Robertson, "Discussion of open-channel flow at small Reynolds numbers", en Lorenz G. Straub, Edward Silberman, y Herbert C. Nelson, *Transactions*, Vol. 123, *American Society of Civil Engineers*, 1958, pp. 707-712.
22. Franz Eisner, "Offene Gerinne" (Open channel), Sec. 4 del Vol. IV, "Hydro- und Aerodynamik", en W. Wien y F. Harms (editors-in-chief), Handbuch der Experimentalphysik, Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig, 1932, p. 298.

23. Josef Koženy, *Hydraulik* (Hydraulics), Springer-Verlag, Viena, 1953, p. 574.
24. Henry M. Morris, Jr., "Flow in rough conduits", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 373-398. Discussions on pp. 399-410.
25. Th. Rehbock, "Zur Frage des Brückenstaues" (On the problem of ponding due to bridge constrictions), *Zentralblatt der Bauverwaltung*, Vol. 39, Nº 37, Berlín, 1919, pp. 197-200.
26. Boris A. Bakhmeteff, Hydraulics of open channels, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932, p. 64.
27. F. V. A. Engel, "Non-uniform flow of water: problems and phenomena in open channels with side contractions", *The Engineer*, Vol. 155, 1933, pp. 392-394, 429-430, 456-457.
28. J. C. Stevens, "Discussion on the hydraulic jump in sloping channels", en C. E. Kindsvater, *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1125-1135.
29. C. J. Posey, "Discussion on the hydraulic jump in sloping channels", en C. E. Kindsvater, *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1135-1138.
30. J. M. Robertson y Hunter Rouse, "On the four regimes of open-channel flow", *Civil Engineering*, Vol. 11, Nº 3, marzo, 1941, pp. 169-171.
31. S. A. Jegorow, "Turbulente Überwellenströmung (Schiessen) in offenen Gerinnen mit glatten Wänden" (Turbulent supercritical flow in open channels with smooth walls), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 35, Nº 3, Munich, 1940, pp. 55-59.
32. Yuichi Iwagaki, "On the laws of resistance to turbulent flow in open smooth channels", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Japan, Vol. 15, Nº 1, enero 1953, pp. 27-40.
33. Masashi Hom-ma, "Fluid resistance in water flow of high Froude number", *Proceedings of the 2d. Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1952, pp. 251-254.
34. Yuichi Iwagaki, "On the laws of resistance to turbulent flow in open rough channels", *Proceedings of the 4th. Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1954, pp. 229-233.

CAPÍTULO 2

CANALES ABIERTOS Y SUS PROPIEDADES

2-1. Clases de canales abiertos. Un canal abierto es un conducto en el cual el agua fluye con una superficie libre. De acuerdo con su origen un canal puede ser *natural o artificial.*

Los canales naturales incluyen todos los cursos de agua que existen de manera natural en la Tierra, los cuales varían en tamaño desde pequeños arroyuelos en zonas montañosas, hasta quebradas, arroyos, ríos pequeños y grandes, y estuarios de mareas. Las corrientes subterráneas que transportan agua con una superficie libre también son consideradas como canales abiertos naturales.

Las propiedades hidráulicas de un canal natural por lo general son muy irregulares. En algunos casos pueden hacerse suposiciones empíricas razonablemente consistentes con las observaciones y experiencias reales, de tal modo que las condiciones de flujo en estos canales se vuelvan manejables mediante el tratamiento analítico de la hidráulica teórica. Un estudio completo sobre el comportamiento del flujo en canales naturales requiere el conocimiento de otros campos, como hidrología, geomorfología, transporte de sedimentos, etc. Éste constituye, de hecho, un tema de estudio por sí mismo, conocido como *hidráulica fluvial.*

Los canales artificiales son aquéllos construidos o desarrollados mediante el esfuerzo humano: canales de navegación, canales de centrales hidroeléctricas, canales y canaletas de irrigación, cunetas de drenaje, vertederos, canales de desborde, canaletas de madera, cunetas a lo largo de carreteras, etc., así como canales de modelos construidos en el laboratorio con propósitos experimentales. Las propiedades hidráulicas de estos canales pueden ser controladas hasta un nivel deseado o diseñadas para cumplir unos requisitos determinados. La aplicación de las teorías hidráulicas a canales artificiales producirán, por tanto, resultados bastante similares a las condiciones reales y, por consiguiente, son razonablemente exactos para propósitos prácticos de diseño.

Bajo diferentes circunstancias en la práctica de ingeniería, los canales abiertos artificiales reciben diferentes nombres, como "canal artificial", "canaleta", "rápida", "caída", "alcantarilla", "túnel con flujo a superficie libre", etc. Sin embargo, estos nombres se utilizan de una manera más o menos imprecisa y sólo se definen de un modo muy general. El *canal artificial* por lo general es un canal largo con pendiente suave construido sobre el suelo, que puede ser no revestido o revestido con piedras, concreto, cemento, madera o materiales bituminosos. La *canaleta* es un canal de madera, de metal, de concreto o de mampostería, a menudo soportado en o sobre la superficie del terreno para conducir el agua a través de una depresión. La *rápida* es un canal que tiene altas pendientes. La *caída* es similar a una rápida, pero el cambio en elevación se efectúa en una distancia corta. La *alcantarilla*, que fluje parcialmente llena, es un canal cubierto con una longitud comparativamente corta instalado para drenar el agua a través de terraplenes de carreteras o de vías férreas. El *túnel con flujo a superficie libre* es un canal cubierto comparativamente largo, utilizado para conducir el agua a través de una colina o cualquier obstrucción del terreno.

2-2. Geometría de canal. Un canal construido con una sección transversal invariable y una pendiente de fondo constante se conoce como *canal prismático*. De otra manera, el canal es *no prismático*; un ejemplo es un vertedero de ancho variable y alineamiento curvo. A menos que se indique específicamente, los canales descritos en este libro son prismáticos.

El término *sección de canal* utilizado en este libro se refiere a la sección transversal de un canal tomada en forma perpendicular a la dirección del flujo. Una *sección vertical de canal*, sin embargo, es la sección vertical que pasa a través del punto más bajo de la sección de canal. Para canales horizontales, por consiguiente, la sección del canal es siempre una sección vertical de canal.

Las secciones de canales naturales son, por lo general, muy irregulares, y a menudo varían desde aproximadamente una parábola hasta aproximadamente un trapecio. Para corrientes sujetas a crecientes* frecuentes, el canal puede constar de una sección principal del canal que conduce los caudales normales y una o más secciones laterales de canal para acomodar los caudales de desborde.

Los canales artificiales a menudo se diseñan con secciones de figuras geométricas regulares. La tabla 2-1 relaciona 7 formas geométricas utilizadas comúnmente. El trapecio es la forma más común para canales con bancas en tierra sin recubrimiento, debido a que proveen las pendientes necesarias para estabilidad. El rectángulo y el triángulo son casos especiales del trapecio. Debido a que el rectángulo tiene lados verticales, por lo general se utiliza para canales construidos con materiales estables, como mampostería, roca, metal o madera. La sección triangular sólo se utiliza para pequeñas acequias, cunetas a lo largo de carreteras y trabajos de laboratorio. El círculo es la sección más común para alcantarillados y alcantarillas (culverts) de tamaños pequeño y mediano.

* *Nota del traductor. "Floods"* se traduce como "crecientes"; otros términos equivalentes en español son "crecidas", "avenidas" y "riadas".

Tabla 2-1. Elementos geométricos de secciones de canal

Sección	Área A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superficial T	Profundidad hidráulica D	Factor de sección Z
Rectángulo	by	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	b	y	$by^{1.5}$
Trapecio	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + z^2}}$	$b + 2zy$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2zy}$	$\frac{[(b + zy)y]^{1.5}}{\sqrt{b + 2zy}}$
Triángulo	zy^2	$2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1 + z^2}}$	$2zy$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{2}}{2} zy^{2.5}$
Círculo	$\frac{1}{8}(\theta - \text{sen}\,\theta)d_0^2$	$\frac{1}{2}\theta d_0$	$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right) d_0$	$(\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta)d_0$ or $2\sqrt{y(d_0 - y)}$	$\frac{1}{8}\left(\frac{\theta - \text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta}\right) d_0$	$\frac{\sqrt{2}}{32} \frac{(\theta - \text{sen}\,\theta)^{1.5}}{(\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta)^{0.5}} d_0^{2.5}$
Parábola	$\frac{2}{3}Ty$	$T + \frac{8}{3}\frac{y^2}{T}$ *	$\frac{2T^2y}{3T^2 + 8y^2}$ *	$\frac{3}{2}\frac{A}{y}$	$\frac{2}{3}y$	$\frac{2}{9}\sqrt{6}\,Ty^{1.5}$
Rectángulo con esquinas redondeadas ($y > r$)	$\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) r^2 + (b + 2r)y$	$(\pi - 2)r + b + 2y$	$\frac{(\pi/2 - 2)r^2 + (b + 2r)y}{(\pi - 2)r + b + 2y}$	$b + 2r$	$\frac{(\pi/2 - 2)r^2}{b + 2r} + y$	$\frac{[(\pi/2 - 2)r^2 + (b + 2r)y]^{1.5}}{\sqrt{b + 2r}}$
Triángulo con fondo redondeado	$\frac{T^2}{4z} - \frac{r^2}{z}(1 - z\cot^{-1} z)$	$\frac{T}{z}\sqrt{1 + z^2} - \frac{2r}{z}(1 - z\cot^{-1} z)$	$\frac{A}{P}$	$2[z(y - r) + r\sqrt{1 + z^2}]$	$\frac{A}{T}$	$A\sqrt{\frac{A}{T}}$

* Aproximación satisfactoria para el intervalo $0 < x \leq 1$, donde $x = 4y/T$. Cuando $x > 1$, utilice la expresión exacta $P = (T/2)\,[\sqrt{1 + x^2} + 1/x \ln (x + \sqrt{1 + x^2})]$.

La parábola[1] se utiliza como una aproximación a secciones de canales naturales de tamaños pequeño y mediano. El rectángulo con esquinas redondeadas es una modificación del rectángulo. El triángulo con fondo redondeado es una aproximación de la parábola; ésta es la forma creada a menudo con la utilización de excavadoras.

Secciones geométricas cerradas diferentes del círculo se utilizan con frecuencia en alcantarillados de aguas negras, de manera particular para alcantarillas suficientemente grandes que permiten la entrada de un hombre. Estas secciones reciben diferentes nombres de acuerdo con su forma; pueden ser en forma de huevo, ovoides, semielípticas, en forma de *U*, catenaria, herradura, manija de canasto, etc. Los rectángulos y cuadrados completos, también son comunes en alcantarillados grandes. Las dimensiones y propiedades de secciones de alcantarillas se encuentran en textos sobre alcantarillados[2].

Una sección geométrica especial, conocida como *catenaria hidrostática* o *lintearia* [4, 5], es la forma de la sección transversal de un canal compuesto por hojas flexibles que se suponen de peso insignificante, lleno con agua hasta la parte superior de la sección y firmemente soportado en los extremos superiores de los lados pero sin efectos de fijación. La catenaria hidrostática ha sido utilizada para el diseño de algunas canaletas elevadas de irrigación. Estas canaletas se construyen utilizando láminas metálicas tan delgadas, que su peso es insignificante, las cuales se unen firmemente a vigas en los extremos superiores.

2-3. Elementos geométricos de una sección de canal. Los *elementos geométricos* son propiedades de una sección de canal que pueden ser definidos por completo por la geometría de la sección y la profundidad de flujo. Estos elementos son muy importantes y se utilizan con amplitud en el cálculo de flujo.

Para secciones de canal regulares y simples, los elementos geométricos pueden expresarse matemáticamente en términos de la profundidad de flujo y de otras dimensiones de la sección. Para secciones complicadas y secciones de corrientes naturales, sin embargo, no se puede escribir una ecuación simple para expresar estos elementos, pero pueden prepararse curvas que representen la relación entre estos elementos y la profundidad de flujo para uso en cálculos hidráulicos.

A continuación se dan las definiciones de varios elementos geométricos de importancia básica. Otros elementos geométricos utilizados en este libro se definirán cada vez que aparezcan por primera vez.

La *profundidad de flujo, y*, es la distancia vertical desde el punto más bajo de una sección del canal hasta la superficie libre. A menudo este término se intercambia con la *profundidad de flujo de la sección, d*. En efecto, la profundidad de flujo de la sección es la *profundidad* de flujo perpendicular a la dirección de éste, o la altura de la sección del canal que contiene el agua. Para un canal con un ángulo de pendiente longitudinal θ, puede verse que la profundidad de flujo es igual a la profundidad de

[1] La pendiente lateral z:1 de una sección parabólica en la intersección de sus lados con la superficie libre puede ser fácilmente calculada utilizando la fórmula simple $z = T/4y$.

Los ingenieros rusos [1] también utilizan secciones parabólicas y elípticas para órdenes más altos: $y = ax^p$, con $p = 3$ ó 4. La constante a se calcula de la pendiente lateral supuesta en la superficie libre.

[2] En las referencias [2] y [3] se describen muchas secciones comunes para alcantarillados.

sección de flujo dividida por cos θ. En el caso de canales empinados, por consiguiente, los dos términos deben utilizarse de manera discriminada.

El *nivel* es la elevación o distancia vertical desde un nivel de referencia o *datum* hasta la superficie libre. Si el punto más bajo de la sección de canal se escoge como el nivel de referencia, el nivel es idéntico a la profundidad de flujo.

El *ancho superficial* T es el ancho de la sección del canal en la superficie libre.

El *área mojada* A es el área de la sección transversal del flujo perpendicular a la dirección de flujo.

El *perímetro mojado* P es la longitud de la línea de intersección de la superficie de canal mojada y de un plano transversal perpendicular a la dirección de flujo.

El *radio hidráulico* R es la relación del área mojada con respecto a su perímetro mojado, o

$$R = \frac{A}{P} \tag{2-1}$$

La *profundidad hidráulica* D es la relación entre el área mojada y el ancho en la superficie, o

$$D = \frac{A}{T} \tag{2-2}$$

El *factor de sección para el cálculo de flujo crítico* Z es el producto del área mojada y la raíz cuadrada de la profundidad hidráulica, o

$$Z = A\sqrt{D} = A\sqrt{\frac{A}{T}} \tag{2-3}$$

El *factor de sección para el cálculo de flujo uniforme* $AR^{2/3}$ es el producto del área mojada y el radio hidráulico elevado a la potencia 2/3.

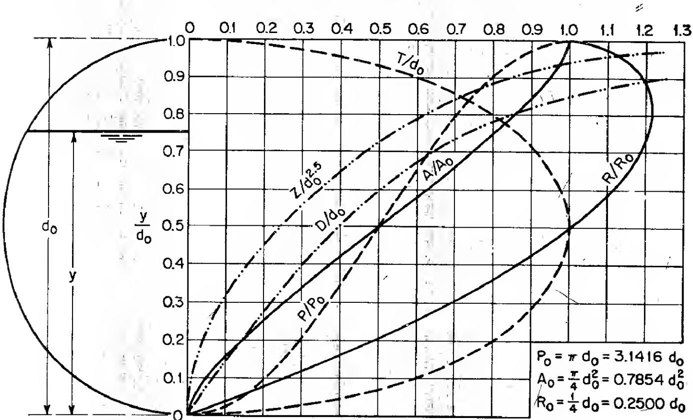


Figura 2-1. Elementos geométricos de una sección circular.

La tabla 2-1 presenta una lista de ecuaciones para los seis elementos geométricos básicos de siete secciones de canal comúnmente utilizadas. Para una sección circular, las curvas en la figura 2-1 representan las relaciones de los elementos geométricos de la sección con los elementos correspondientes cuando ésta fluye llena. Estas curvas se prepararon utilizando una tabla dada en el apéndice A. Para algunas secciones trapezoidales, triangulares y parabólicas comúnmente encontradas en usos prácticos, los diagramas dados en el apéndice B aportan un medio conveniente para la determinación de los elementos geométricos.

Ejemplo 2-1. Calcule el radio hidráulico, la profundidad hidráulica y el factor de sección Z para la sección de canal trapezoidal de la figura 2-2. La profundidad de flujo es 6 pies.

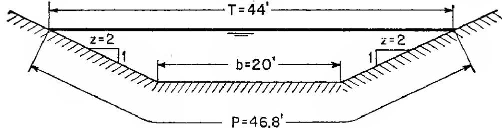


Figura 2-2. Sección transversal de un canal.

Solución. A partir de las ecuaciones dadas en la tabla 2-1, se calcula lo siguiente: $P = 20 + 2 \times 6\sqrt{5} = 46.8$ pies; $A = 0.5(20 + 44) \times 6 = 192.0$ pies^2; $R = 192/46.8 = 4.10$ pies; $D = 192/44 = 4.37$ pies y $Z = 192\sqrt{4.37} = 401$ pies$^{2.5}$.

2-4. Distribución de velocidades en una sección de canal. Debido a la presencia de la superficie libre y a la fricción a lo largo de las paredes del canal, las velocidades en un canal no están uniformemente distribuidas en su sección. La máxima velocidad medida en canales normales a menudo ocurre por debajo de la superficie libre a una distancia de 0.05 a 0.25 de la profundidad; cuanto más cerca de las bancas, más profundo se encuentra este máximo. La figura 2-3 ilustra el modelo general de la distribución de velocidades para varias secciones horizontales y verticales en un canal con sección rectangular y las curvas de igual velocidad de la sección transversal. Los modelos generales para la distribución de velocidades en diferentes secciones del canal con otras formas se ilustran en la figura 2-4.

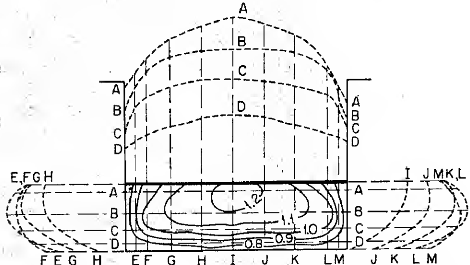


Figura 2-3. Distribución de velocidades en un canal rectangular.

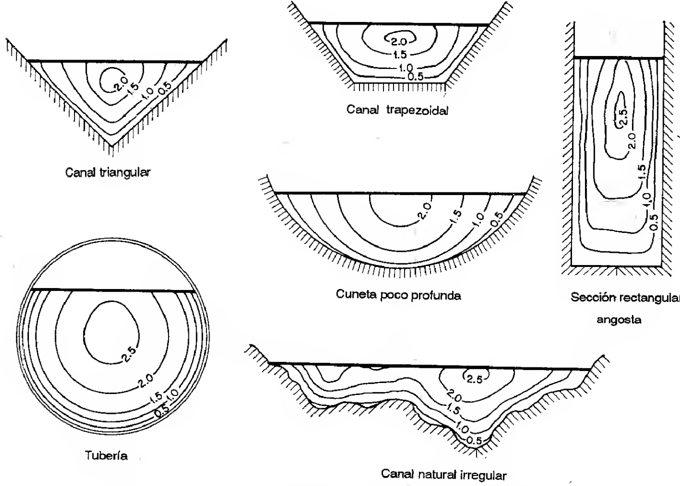


Figura 2-4. Curvas comunes de igual velocidad en diferentes secciones de canal.

La distribución de velocidades en una sección de canal depende también de otros factores, como una forma inusual de la sección, la rugosidad del canal y la presencia de curvas. En una corriente ancha, rápida y poco profunda o en un canal muy liso, la velocidad máxima por lo general se encuentra en la superficie libre. La rugosidad del canal causa un incremento en la curvatura de la curva de distribución vertical de velocidades (*véase* figura 2-5). En una curva, la velocidad se incrementa de manera sustancial en el lado convexo, debido a la acción centrífuga del flujo. Contrario a la creencia usual, el viento en la superficie tiene muy poco efecto en la distribución de velocidades.

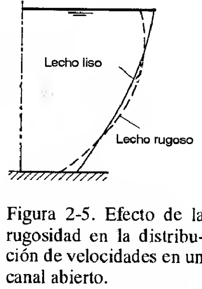


Figura 2-5. Efecto de la rugosidad en la distribución de velocidades en un canal abierto.

Tal como lo demuestran investigaciones cuidadosas en laboratorio, el flujo en un canal prismático recto es de hecho tridimensional, manifestando un movimiento en espiral, a pesar de que la componente de velocidad en la sección transversal del canal a menudo es pequeña e insignificante comparada con las componentes de velocidad longitudinal. Shukry [6] encontró que, en canaletas cortas de laboratorio, una pequeña perturbación a la entrada, que por lo general es inevitable, es suficiente para causar una zona con nivel más alto a un lado del canal, lo cual causa un movimiento espiral único (*véase* figura 2-6). En un tramo largo y uniforme lejos de la entrada, ocurrirá un movimiento espiral doble para permitir la igualdad de esfuerzos cortantes a ambos lados del canal [7, 8]. El modelo incluye una espiral a cada lado de la línea central, donde el nivel del agua es el más alto. En consideraciones prácticas, es bastante seguro ignorar el movimiento espiral

en canales prismáticos rectos. Sin embargo, el flujo en espiral en canales curvos es un fenómeno importante que debe considerarse en el diseño, y que se estudiará más adelante (*véase* sección 16-2).

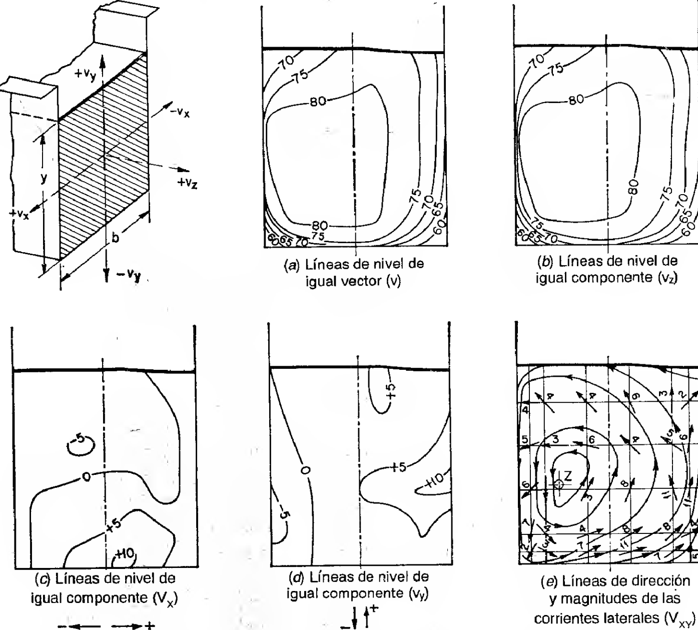


Figura 2-6. Distribución de componentes de velocidad, mirando hacia aguas abajo en la sección media de una canaleta recta. Las velocidades están en cm/s (= 0.0328 pie/s); $y/b = 1.0$; $\mathbf{R} = 73{,}500$; y $Q = 70$ litros/s (= 2.47 pie^3/s) (*de acuerdo con Shukry* [6]).

2-5. Canales abiertos anchos. Observaciones hechas en canales abiertos muy anchos han mostrado que la distribución de velocidades en la región central de la sección es en esencia la misma que existiría en un canal rectangular de ancho infinito. En otras palabras, bajo esta condición, los lados del canal no tienen prácticamente ninguna influencia en la distribución de velocidades en la región central y, por consiguiente, el flujo en esta región central puede considerarse como bidimensional en el análisis hidráulico. Además, experimentos cuidadosos indican que esta región central existe en canales rectangulares sólo cuando el ancho es mayor que 5 a 10 veces la profundidad de flujo, según la condición de rugosidad superficial. Luego, un *canal abierto ancho* puede definirse como un canal rectangular cuyo ancho es mayor que 10 veces la profundidad de flujo. Para propósitos experimentales o

analíticos, el flujo en la región central de un canal abierto ancho puede considerarse igual al flujo en un canal rectangular de ancho infinito.

2-6. Medición de la velocidad. De acuerdo con el procedimiento para el aforo de corrientes del U.S. Geological Survey[3], la sección transversal del canal se divide en franjas verticales por medio de un determinado número de verticales sucesivas, y las velocidades medias en las verticales se determinan midiendo la velocidad a 0.6 de la profundidad en cada vertical, o tomando el promedio de las velocidades a 0.2 y 0.8 de la profundidad, cuando se requieren resultados más confiables. Cuando la corriente se encuentra cubierta por hielo, la velocidad media no sigue siendo parecida a la de 0.6 de la profundidad del agua, pero el promedio de las velocidades a 0.2 y 0.8 de la profundidad de agua sigue dando resultados confiables. El promedio de las velocidades medias en cualesquiera dos verticales adyacentes multiplicado por el área entre las verticales da el caudal a través de esa franja vertical de la sección transversal. La suma de los caudales a través de todas las franjas es el caudal total. La velocidad media de toda la sección es, por consiguiente, igual al caudal total dividido por el área completa.

Nótese que los anteriores métodos son simples y aproximados. Para mediciones más precisas deben utilizarse métodos más elaborados, los cuales están por fuera del alcance de este libro.

2-7. Coeficientes de distribución de velocidad. Como resultado de la distribución no uniforme de velocidades en una sección de canal, la altura de velocidad de un flujo en canales abiertos es por lo general mayor que el valor calculado de acuerdo con la expresión $V^2/2g$, donde V es la velocidad media. Cuando se utiliza el principio de energía en cálculos, la altura de velocidad real puede expresarse como $\alpha V^2/2g$, donde α se conoce como *coeficiente de energía* o *coeficiente de Coriolis*, en honor de G. Coriolis [12] quien lo propuso por primera vez. Datos experimentales indican que el valor de α varía desde 1.03 hasta 1.36 para canales prismáticos aproximadamente rectos. Por lo general el valor es alto para canales pequeños y bajo para corrientes grandes con profundidad considerable.

La distribución no uniforme de velocidades también afecta el cálculo del *momentum* en flujo en canales abiertos. A partir del principio de mecánica, el *momentum* de un fluido que pasa a través de una sección de canal por unidad de tiempo se expresa por $\beta wQV/g$, donde β es conocido como *coeficiente de momentum* o *coeficiente de Boussinesq*, en honor de J. Boussinesq [13], quien lo propuso por primera vez; w es el peso unitario del agua; Q es el caudal; V es la velocidad media. Se ha encontrado que el valor de β para canales prismáticos aproximadamente rectos varía desde 1.01 hasta 1.12.

Los dos coeficientes de distribución de velocidades son siempre un poco mayores que el valor límite de la unidad, para el cual la distribución de velocidades es estrictamente uniforme a través de la sección del canal. Para canales de sección transversal regular y alineamiento más o menos recto, el efecto de la distribución no uniforme de velocidades en el cálculo de la altura de velocidad y el *momentum* es pequeño, especialmente en comparación con otras incertidumbres involucradas en el cálculo. Por consiguiente, a menudo los coeficientes se suponen iguales a

[3] Para más detalles, *véanse* referencias [9] a [11].

la unidad. En canales con secciones transversales complejas, los coeficientes para energía y *momentum* con facilidad pueden ser tan altos como 1.6 y 1.2, respectivamente, y pueden variar con rapidez de una sección a otra en el caso de alineamientos irregulares. Aguas arriba de vertederos, en la vecindad de obstrucciones o cerca de irregularidades pronunciadas en el alineamiento, se han observado valores de α mayores que 2.0[4]. Estudios precisos o análisis de flujo en tales canales requerirán mediciones de la velocidad real y determinaciones precisas de los coeficientes. Con respecto al efecto de la pendiente del canal, los coeficientes por lo general son mayores en canales empinados que en canales con pendientes bajas.

Para propósitos prácticos, Kolupaila [16] propuso los valores mostrados a continuación para los coeficientes de distribución de velocidad. Valores reales de los coeficientes para un cierto número de canales se encuentran en [17] y [18].

Canales	Valor de α			Valor de β		
	Min.	Prom.	Max.	Min.	Prom.	Max.
Canales regulares, canaletas y vertederos	1.10	1.15	1.20	1.03	1.05	1.07
Corrientes naturales y torrentes	1.15	1.30	1.50	1.05	1.10	1.17
Ríos bajo cubiertas de hielo	1.20	1.50	2.00	1.07	1.17	1.33
Valles de ríos, inundados	1.50	1.75	2.00	1.17	1.25	1.33

2-8. Determinación de los coeficientes de distribución de velocidad. Sea ΔA un área elemental en el área mojada completa A, y w el peso unitario del agua; entonces el peso de agua que pasa a través de ΔA por unidad de tiempo con una velocidad v es $wv\,\Delta A$. La energía cinética del agua que pasa a través de ΔA por unidad de tiempo es $wv^3\,\Delta A/2g$. Esto es equivalente al producto del peso $wv\,\Delta A$ y la altura de velocidad $v^2/2g$. La energía cinética total para el área mojada completa es igual a $\Sigma wv^3 \Delta A/2g$.

[4] Un valor de $\alpha = 2.08$ fue calculado por Lindquist [14] utilizando datos de medidas en vertederos hechas por Ernest W. Schoder y Kenneth B. Turner.

En el caso de conductos cerrados, se han observado valores de α mucho más altos [15]. Un valor de $\alpha = 3.87$, observado en la sección de salida de un tubo de aspiración en la planta de generación hidroeléctrica de Rublevo, es probablemente el mayor valor conocido obtenido de mediciones reales; el valor real debería haber sido aún más grande (10.2% o más) si se hubiera tenido en cuenta el efecto de una curvatura en las líneas de corriente de 15°. Se cree que el mayor valor conocido en mediciones de laboratorio es $\alpha = 7.4$, el cual fue obtenido por V. S. Kviatkovskii en 1940 en el VIGM (Instituto Soviético de Maquinaria Hidráulica, URSS) para el flujo en espiral bajo la rueda del modelo de una turbina.

Ahora, al tomar el área completa como A, la velocidad media como V, y la altura de velocidad corregida para el área completa como $\alpha V^2/2g$, la energía cinética total es $\alpha w V^3 A/2g$. Al igualar esta cantidad con $\Sigma w v^3 \Delta A/2g$ y al reducir,

$$\alpha = \frac{\int v^3\, dA}{V^3 A} \approx \frac{\Sigma v^3\, \Delta A}{V^3 A} \tag{2-4}$$

El *momentum* del agua que pasa a través de ΔA por unidad de tiempo es el producto de la masa $wv\Delta A/g$ y la velocidad v, o $wv^2\Delta A/g$. El *momentum* total es $\Sigma wv^2\Delta A/g$. Al igualar esta cantidad con el *momentum* corregido para el área completa, o $\beta w A V^2/g$, y al reducir,

$$\beta = \frac{\int v^2\, dA}{V^2 A} \approx \frac{\Sigma v^2\, \Delta A}{V^2 A} \tag{2-5}$$

O'Brien y Johnson [19] utilizaron una solución gráfica de las anteriores ecuaciones tal como se describe a continuación.

A partir de las curvas de distribución de velocidad medidas, utilizando planímetro, se mide el área dentro de cada curva de igual velocidad. Al tomar la velocidad indicada por cada curva de igual velocidad como v, se construye una curva de v^3 *versus* la correspondiente área planimetrada. Es evidente que el área bajo esta curva de v^3 es la integral $\Sigma v^3\, \Delta A$, la cual puede obtenerse utilizando planimetría nuevamente. De manera similar, las integrales $\Sigma v^2 \Delta A$ y $\Sigma v\, \Delta A$ también pueden obtenerse. La integral $\Sigma v\, \Delta A$ dividida por A da V. Una vez estas cantidades han sido determinadas, las anteriores ecuaciones pueden utilizarse para encontrar los coeficientes α y β.

Para valores aproximados, los coeficientes de energía y *momentum* pueden calcularse utilizando las siguientes ecuaciones[5]:

$$\alpha = 1 + 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3 \tag{2-6}$$
$$\beta = 1 + \epsilon^2 \tag{2-7}$$

donde $\epsilon = v_M/V - 1$, siendo v_M la velocidad máxima y V la velocidad media.

El cálculo de los coeficientes de distribución de velocidades para canales naturales irregulares se estudiará más adelante (*véase* sección 6-5). En la mayor parte de problemas prácticos relacionados con canales regulares no es necesario considerar la variación de velocidad a través de la sección transversal, debido a que el uso de la velocidad promedio da la precisión requerida. Las expresiones $V^2/2g$ y wQV/g se utilizan en extenso en este libro con el entendimiento de que ambos elementos han sido corregidos para tener en cuenta el efecto de la distribución no uniforme de velocidades, o que se ha supuesto un valor igual a la unidad[6].

[5] Estas ecuaciones se obtuvieron suponiendo una distribución logarítmica de velocidades (sección 8-5, problema 8-9). Suponiendo una distribución lineal de velocidades, Rehbock [20] obtuvo $\alpha = 1 + \epsilon^2$ y $\beta = 1 + \epsilon^2/3$.

[6] Para discusiones sobre este tema, el lector puede consultar las referencias [21] y [22]. Sin embargo, debe utilizar su buen criterio en la lectura de estas referencias debido a que contienen afirmaciones erróneas. Algunos autores han propuesto el uso del coeficiente de *momentum* para remplazar el coeficiente de energía aun en cálculos basados en el principio de energía. Esto no es correcto. El que el coeficiente de energía o coeficiente de *momentum* sea utilizado depende de si se está aplicando el principio de energía o el principio del *momentum*. Los dos coeficientes se deducen independientemente de diferentes principios básicos (sección 3-6). Ninguno de ellos es errado ni ninguno puede remplazarse por el otro. Ambos deben utilizarse en el sentido correcto.

2-9. Distribución de presión en una sección de canal. La presión en cualquier punto de la sección transversal del flujo en un canal con pendiente baja puede medirse por medio de la altura de la columna de agua en un tubo piezométrico instalado en el punto (*véase* figura 2-7). Al no considerar las pequeñas perturbaciones debidas a la turbulencia, etc., es claro que el agua en esta columna debe subir desde el punto de medición hasta la línea de gradiente hidráulico o superficie del agua. Por consiguiente, la presión en cualquier punto de la sección es directamente proporcional a la profundidad del flujo por debajo de la superficie libre e igual a la presión hidrostática correspondiente a esta profundidad. En otras palabras, la distribución de presiones a lo largo de la sección transversal del canal es igual a la distribución hidrostática de presiones; es decir, la distribución es lineal y puede representarse mediante una línea recta AB (figura 2-7a). Esto se conoce como *ley hidrostática de distribución de presiones.*

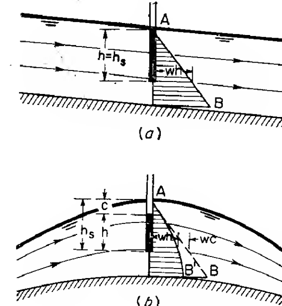


Figura 2-7. Distribución de presiones en canales rectos y curvos con pendientes bajas u horizontales en la sección bajo consideración; h = altura piezométrica; h_s = altura hidrostática; y c = corrección de altura de presión por curvatura. (a) Flujo paralelo; (b) flujo convexo; (c) flujo cóncavo.

En efecto, la aplicación de la ley hidrostática a la distribución de presiones en la sección transversal de un canal es válida sólo si los filamentos de flujo no tienen componentes de aceleración en el plano de la sección transversal. Este tipo de flujo se conoce teóricamente como *flujo paralelo*[7], es decir, aquel cuyas líneas de corriente no tienen curvatura sustancial ni divergencia. En consecuencia, no existen componentes de aceleración apreciables normales a la dirección del flujo, las cuales perturbarían la distribución hidrostática de presiones en la sección transversal de un flujo paralelo.

En problemas reales el flujo uniforme es prácticamente un flujo paralelo. El flujo gradualmente variado también puede considerarse como flujo paralelo, debido a que el cambio en la profundidad de flujo es tan suave que las líneas de corriente no tienen curvaturas apreciables ni divergencia; es decir, la curvatura y la divergencia son tan pequeñas que el efecto de las componentes de aceleración en el plano de la sección transversal es insignificante. *Por consiguiente,*

[7] Las cualidades específicas del flujo paralelo fueron claramente establecidas por Bélanger [23].

para propósitos prácticos, la ley hidrostática de distribución de presiones es aplicable tanto al flujo gradualmente variado como al flujo uniforme.

Si la curvatura de las líneas de corriente es sustancial, el flujo es conocido teóricamente como *flujo curvilíneo.* El efecto de la curvatura es el de producir unas componentes de aceleración apreciables o fuerzas centrífugas perpendiculares a la dirección del flujo. Por consiguiente, la distribución de presiones en la sección transversal se diferencia de la hidrostática si el flujo curvilíneo ocurre en un plano vertical. Este flujo curvilíneo puede ser convexo o cóncavo (figuras 2-7*b* y 2-7*c*). En ambos casos la distribución de presiones no lineal se representa por *AB'* en lugar de la distribución recta *AB,* que ocurriría si el flujo fuera paralelo. Se supone que todas las líneas de corriente son horizontales en la sección bajo consideración. En el flujo cóncavo las fuerzas centrífugas apuntan hacia abajo reforzando la acción de la gravedad; luego, la presión resultante es mayor que la presión hidrostática de un flujo paralelo. En el flujo convexo las fuerzas centrífugas actúan hacia arriba en contra de la acción de la gravedad; en consecuencia, la presión resultante es menor que la presión hidrostática de un flujo paralelo. De manera similar, cuando la divergencia de las líneas de corriente es tan grande como para desarrollar componentes de aceleración apreciables normales al flujo, la distribución hidrostática de presiones será perturbada consecuentemente.

Sea c la desviación de una presión hidrostática h_s en un flujo curvilíneo (figuras 2-7*b* y 2-7*c*). Luego la presión real o altura piezométrica es $h = h_s + c$.

Si el canal tiene un perfil longitudinal curvo, la presión centrífuga aproximada puede calcularse mediante la ley de aceleración, de Newton, como el producto de la masa de agua que tiene una altura d y un área transversal de 1 pie^2, es decir, wd/g, y la aceleración centrífuga v^2/r; o

$$P = \frac{wd}{g}\frac{v^2}{r} \tag{2-8}$$

donde w es el peso unitario del agua, g es la aceleración de la gravedad, v es la velocidad del flujo y r es el radio de curvatura. La corrección en la altura de presión es, por consiguiente,

$$c = \frac{d}{g}\frac{v^2}{r} \tag{2-9}$$

Para calcular el valor de c en el fondo del canal, r es el radio de curvatura del fondo, d es la profundidad de flujo y, para propósitos prácticos, v puede suponerse igual a la velocidad promedio del flujo. Es claro que c es positivo para el flujo cóncavo, negativo para el flujo convexo y cero para el flujo paralelo.

En un flujo paralelo la presión es hidrostática y la altura de presión puede representarse por la profundidad de flujo y. Para propósitos de simplificación, la altura de presión de un flujo curvilíneo puede representarse por $\alpha' y$, donde α' es un coeficiente de corrección que tiene en cuenta el efecto de curvatura. El coeficiente de corrección se conoce como *coeficiente de distribución de presiones.* Como este coeficiente se aplica a una altura de presión, también puede llamarse específicamente *coeficiente de presión.* Puede demostrarse que el coeficiente de presión se expresa por

$$\alpha' = \frac{1}{Qy}\int_0^A hv\,dA = 1 + \frac{1}{Qy}\int_0^A cv\,dA \tag{2-10}$$

donde Q es el caudal total y y es la profundidad de flujo. Con facilidad puede notarse que α' es mayor que 1.0 para flujo cóncavo, menor que 1.0 para flujo convexo e igual a 1.0 para flujo paralelo.

Para perfiles curvilíneos complicados, la distribución de presiones totales puede determinarse de manera aproximada por el método de la red de flujo o, con mayor exactitud, mediante ensayos en modelo.

En el flujo rápidamente variado el cambio de la profundidad de flujo es tan rápido y abrupto que las líneas de corriente poseen una curvatura y una divergencia sustanciales. En consecuencia, *la ley hidrostática de distribución de presiones no se aplica de manera estricta para el flujo rápidamente variado.*

Nótese que, en el curso de este libro, en general el flujo se trata como paralelo o gradualmente variado. Por consiguiente, el efecto de la curvatura de las líneas de corriente no será considerado (es decir, se supondrá que $\alpha' = 1$) a menos que el flujo se describa de manera específica como curvilíneo o rápidamente variado.

2-10. Efecto de la pendiente en la distribución de presiones. Con referencia a un canal inclinado recto de ancho unitario y ángulo de pendiente θ (figura 2-8), el peso del elemento de agua sombreado de longitud dL es igual a $wy \cos \theta \, dL$. La presión debida a este peso es $wy \cos^2 \theta \, dL$. La presión unitaria es, por consiguiente, igual a $wy \cos^2 \theta$, y la altura[8] es

$$h = y \cos^2 \theta \tag{2-11}$$

o

$$h = d \cos \theta \tag{2-12}$$

donde $d = y \cos \theta$, la profundidad de agua medida perpendicularmente desde la superficie. Nótese que a partir de la geometría (figura 9-1) la ecuación (2-11) no se aplica de manera estricta al caso de flujo variado, en particular cuando θ es muy grande, en tanto que la ecuación (2-12) aún es aplicable. La ecuación (2-11) establece que la altura de presión en cualquier profundidad vertical es igual a esta profundidad multiplicada por un factor de corrección $\cos^2 \theta$. Obviamente, si el ángulo θ es pequeño, este factor no será muy diferente de la unidad. De hecho, el factor de corrección tiende a disminuir la altura de presión en una cantidad inferior al 1% en tanto θ sea menor que 6°, o sea, una pendiente de alrededor de 1 en 10. Como la pendiente de los canales normales es mucho menor que 1 en 10, la corrección por efecto de la pendiente a menudo puede ignorarse con seguridad. Sin embargo, cuando la pendiente del canal es grande y sus efectos se vuelven aprecia-

[8] M. Hasumi ha medido la distribución de presiones a lo largo de las caras inclinadas de aguas abajo en vertederos [24]. Los datos obtenidos con estos experimentos han verificado las ecuaciones (2-11) y (2-12) de manera muy satisfactoria [25].

bles, debe hacerse la corrección si se desean cálculos precisos. Un canal de este tipo, es decir, aquel con una pendiente mayor que 1 en 10, se llamará de ahora en adelante *canal de pendiente alta*. A menos que se mencione específicamente, todos los canales descritos de aquí en adelante se consideran *canales de pendiente baja*, en los cuales el efecto de la pendiente es insignificante.

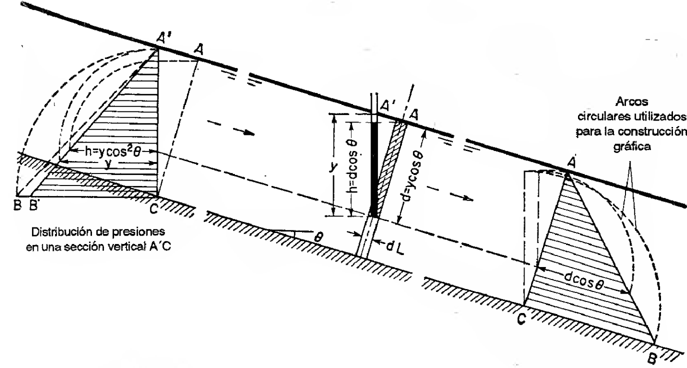


Figura 2-8. Distribución de presiones en un flujo paralelo en canales de pendiente alta.

Si un canal de pendiente alta tiene un perfil longitudinal con una curvatura apreciable, la altura de presión debe ser corregida por el efecto de la curvatura de las líneas de corriente (figura 2-9). En notación simple, la altura de presión puede expresarse como α' y $\cos^2\theta$, donde α' es el coeficiente de presión.

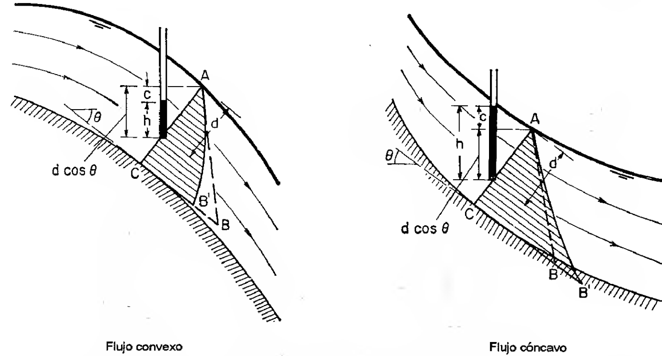


Figura 2-9. Distribución de presiones en flujo curvilíneo en canales de pendiente alta.

En canales de pendiente alta la velocidad de flujo por lo general es grande y mayor que la velocidad crítica. Cuando esta velocidad alcanza cierta magnitud, el agua atrapará aire, produciendo un hinchamiento de su volumen y un incremento en la profundidad[9]. Por esta razón, la presión calculada mediante las ecuaciones (2-11) o (2-12) en varios casos ha demostrado ser mayor que la presión real medida en modelos físicos. Si la densidad promedio de la mezcla agua-aire es conocida, puede utilizarse para remplazar la densidad de agua pura en el cálculo cuando se espera que exista atrapamiento de aire. La densidad real de la mezcla varía desde el fondo hasta la superficie del flujo. Sin embargo, para propósitos prácticos, la densidad puede suponerse constante; esta suposición de distribución uniforme del aire en la sección transversal simplifica los cálculos que, aunque con errores, es la más segura.

PROBLEMAS

2-1. Verifique las ecuaciones para los elementos geométricos de las siete secciones de canal dadas en la tabla 2-1.

2-2. Verifique las curvas que ilustra la figura 2-1.

2-3. Construya curvas similares a las que ilustra la figura 2-1 para un canal con sección cuadrada.

2-4. Construya curvas similares a las que ilustra la figura 2-1 para un triángulo equilátero con uno de sus lados que sirve de fondo del canal.

2-5. A partir de los datos dados a continuación para una sección transversal[10] de un canal natural, *a*) construya curvas que muestren la relación entre la profundidad *y* y los elementos de sección *A*, *R*, *D* y *Z*; y *b*) a partir de esta curva determine los elementos geométricos correspondientes a $y = 4$.

[9] El aire es atrapado por el agua generalmente a velocidades alrededor de 20 pies/s y mayores. Aparte de la velocidad, sin embargo, otros factores como las condiciones de entrada, la rugosidad del canal, la distancia recorrida, la sección transversal del canal, el volumen de descarga, etc., tienen algún efecto en la entrada de aire.

[10] Es práctica común mostrar la sección transversal de una corriente en una dirección mirando hacia aguas abajo y preparar el perfil longitudinal de un canal de tal modo que el agua fluya de izquierda a derecha, a menos que esta convención falle al mostrar el aspecto que debe ser ilustrado por la sección transversal y el perfil. Esta práctica es seguida generalmente por la mayor parte de las oficinas de ingeniería. Sin embargo, por razones geográficas o con el fin de mostrar con claridad la localización y el perfil de una corriente, el perfil puede mostrarse con el agua fluyendo de derecha a izquierda y la sección transversal puede mostrarse mirando hacia aguas arriba. Esto ocurre en muchos dibujos preparados por la Tennessee Valley Authority, debido a que el río Tennessee y la mayor parte de sus tributarios fluyen desde el este hacia el oeste, luego se muestran con la dirección de flujo de derecha a izquierda en un mapa convencional.

Distancia desde un punto de referencia cerca de la banca izquierda, en pies	*Nivel, pies*	*Distancia desde un punto de referencia cerca de la banca izquierda, en pies*	*Nivel, pies*
Banca izquierda: – 5	5.6	7	– 0.1
– 4	4.6	9	– 0.1
– 2	4.0	11	– 0.4
0	1.9	13	– 0.1
1	0.8	15	0.7
2	0.2	17	2.6
3	0.3	19	3.2
5	0.2	Banca derecha: 20	4.1

2-6. La catenaria hidrostática puede graficarse para cualquier profundidad y y el ángulo θ_0 de la pendiente en sus extremos mediante las siguientes dos ecuaciones aproximadas:

$$x_1 = \frac{y}{2k}\left[\left(1 - \tfrac{3}{4}k^2 - \tfrac{15}{64}k^4\right)\phi + \left(\tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{5}{32}k^4\right)\text{sen } 2\phi - \tfrac{5}{256}k^4 \text{ sen } 4\phi\right] \qquad (2\text{-}13)$$

$$y_1 = y \cos \phi \qquad (2\text{-}14)$$

donde y_1 y x_1 son, respectivamente, las ordenadas y las abscisas medidas desde el punto medio de la superficie libre; $k = \text{sen}(\theta_0/2)$; $\phi = \text{sen}^{-1}\{[\text{sen}(\phi/2)]/k\}$; y θ es el ángulo de la pendiente en el punto (x_1, y_1), que varía desde 0 en la parte más baja de la curva hasta θ_0 en los extremos. Las anteriores ecuaciones definen la sección transversal cuando el flujo alcanza su máxima profundidad. El ángulo de la pendiente en los extremos de una catenaria hidráulica con máxima eficiencia hidráulica matemáticamente se encuentra que es $\theta_0 = 35°37'7''$; *a*) grafique esta sección con una profundidad de y = 10 pies, y *b*) determine los valores de A, R, D y Z correspondientes a la profundidad total.

2-7. Estime los valores del coeficiente de *momentum* β para los valores del coeficiente de energía dados $\alpha = 1.0$, $\alpha = 1.5$ y $\alpha = 2.0$.

2-8. Calcule los coeficientes de energía y *momentum* para la sección transversal que se ilustra en la figura 2-3, *a*) mediante las ecuaciones (2-4) y (2-5), y *b*) mediante las ecuaciones (2-6) y (2-7). La sección transversal y las curvas de igual velocidad pueden transferirse a un papel de dibujo y aumentarse para conseguir la exactitud deseada.

2-9. Para el diseño de las paredes laterales de rápidas y de vertederos de rebose, demuestre que el momento de volcamiento debido a la presión del agua es igual a $1/6\, wy^3 \cos^4 \theta$, donde w es el peso unitario del agua, y es la profundidad vertical del agua y θ es el ángulo de la pendiente del canal.

2-10. Deduzca la ecuación (2-10).

2-11. Un vertedero de rebose de alta caída (figura 2-10) tiene una cubeta de lanzamiento de 60 pies de radio en su extremo de aguas abajo. La cubeta no está sumergida, pero sirve para cambiar la dirección del flujo desde la pendiente de la cara del vertedero hasta la horizontal y para descargar el flujo en el aire entre dos muros guías verticales separados 80 pies. Para un caudal de 56,100 pies³/s, la superficie del agua en la sección vertical OB alcanza la cota 8.52. Verifique la curva que representa la presión hidráulica que actúa en el muro guía en la sección OB. El cálculo se basa en la ecuación (2-9) y en las siguientes suposiciones: 1) la velocidad está uniformemente distribuida a través de la sección; 2) el valor utilizado para r, para los valores de la presión cerca a la base del muro, es igual al radio de la cubeta, pero para otros valores de la presión, es igual al radio de las líneas de flujo concéntricas; y 3) el flujo ha atrapado

aire, y la densidad de la mezcla aire-agua puede estimarse utilizando la ecuación de Douma[11], que es,

$$u = 10\sqrt{\frac{0.2V^2}{gR} - 1} \qquad (2\text{-}15)$$

donde u es el porcentaje de aire atrapado por unidad de volumen, V es la velocidad de flujo y R es el radio hidráulico.

2-12. Calcule la presión sobre el muro en la sección OA (figura 2-10) del vertedero descrito en el problema 2-11. Se supone que la velocidad de flujo de sección es la misma que en la sección OB.

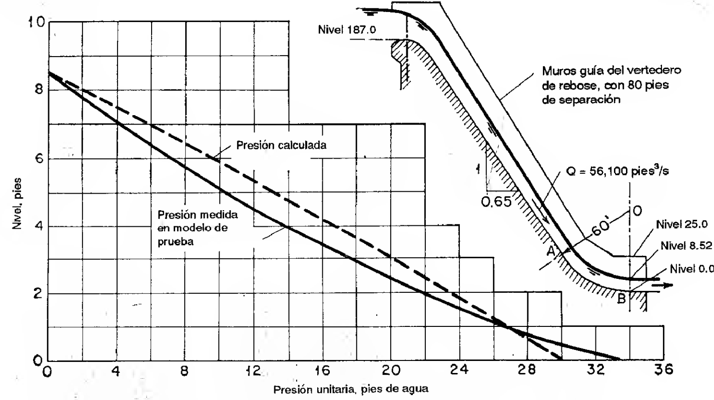


Figura 2-10. Presiones en las paredes laterales de un vertedero de cubeta deflectora.

2-13. Calcule la presión sobre el muro en la sección OA (figura 2-10) del vertedero descrito en el problema 2-11 si la cubeta se sumerge con un nivel de aguas abajo en la cota 75.0. Se supone que la presión resultante de la fuerza centrífuga en el chorro sumergido no debe considerarse debido a que la sumergencia causa una severa reducción en la velocidad.

REFERENCIAS

1. S. F. Averianov, "O gidravlicheskom raschete rusel krivolineinoĭ formy poperechnogo secheniia" ("Hydraulic design of channels with curvilinear form of the cross section"), *Izvestiia Akademii Nauk S.S.S.R.*, Nº 1, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk, Moscow, 1956, pp. 54-58.
2. Leonard Metcalf y H. P. Eddy, *American Sewerage Practice*, Vol. I, McGraw-Hill Book Company, Inc., 3ª ed., New York, 1935.
3. Harold E. Babbitt, *Sewerage and Sewage Treatment*, John Wiley & Sons, Inc., 7ª ed., New York, 1952, pp. 60-66.

[11] Esta ecuación [26] se basa en los datos obtenidos en rápidas reales de concreto y madera, incluidos errores de ± 10%.

4. H. M. Gibb, "Curves for solving the hydrostatic catenary", *Engineering News*, Vol. 73, Nº 14, abril 8, 1915, pp. 668-670.
5. George Higgins, *Water Channels*, Crosby, Lockwood & Son Ltd., London, 1927, pp. 15-36.
6. Ahmed Shukry, "Flow around bends in an open flume", *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 751-779.
7. A. H. Gibson, Hydraulics and its applications, Constable & Co., Ltd., London, 4ª ed., 1934, p. 332.
8. J. R. Freeman, Hydraulic laboratory practice, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1929, p. 70.
9. Don M. Corbett *et al.*, *Stream-gaging procedure, U. S. Geological Survey, Water Supply Paper* 888, 1943.
10. N. C. Grover y A. W. Harrington, *Stream flow*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1943.
11. "Standards for methods and records of hydrologic measurements", *United Nations Economic Commission for Asia and the Far East, Flood Control Series*, Nº 6, Bangkok, 1954, pp. 26-30.
12. G. Coriolis, "Sur l'établissement de la formule qui donne la figure des remous, et sur la correction qu'on doit y introduire pour tenir compte des différences de vitesse dans les divers points d'une même section d'un courant" ("On the backwater-curve equation and the corrections to be introduced to account for the difference of the velocities at different points on the same cross section"), en "Mémoire Nº 268", *Annales des ponts et chaussées*, Vol. 11, Ser. 1, 1836, pp. 314-335.
13. J. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes" ("On the theory of flowing waters"), *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, París, 1877.
14. Erik G. W. Lindquist, "Discussion on precise weir measurements", en Ernest W. Schoder y Kenneth B. Turner, *Transactions*, Vol. 93, *American Society of Civil Engineers*, 1929, pp. 1163-1176.
15. N. M. Shchapov, *Gidrometriia Gidrotekhnicheskikh Sooruzheniĭ i Gidromashin* (*Hydrometry of Hydraulic Structures and Machinery*), Gosenergoizdat, Moscow, 1957, p. 88.
16. Steponas Kolupaila, "Methods of determination of the kinetic energy factor", *The Port Engineer*, Vol. 5, Nº 1, Calcutta, India, enero, 1956, pp. 12-18.
17. M. P. O'Brien y G. H. Hickox, Applied fluid mechanics, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1ª ed., New York, 1937, p. 272.
18. Horace William King, Handbook of hydraulics, revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., 4ª ed., New York, 1954, pp. 7-12.
19. Morrough P. O'Brien y Joe W. Johnson, "Velocity-head correction for hydraulic flow", *Engineering News-Record, Vol. 113, Nº 7, agosto 16, 1934, pp. 214-216.*
20. Th. Rehbock, "Die Bestimmung der Lage der Energielinie bei fliessenden Gewässern mit Hilfe des Geschwindigkeitshöhen-Ausgleichwertes" ("The determination of the position of the energy line in flowing water with the aid of velocity-head adjustment"), *Der Bauingenieur*, Vol. 3, Nº 15, Berlin, agosto 15, 1922, pp. 453-455.
21. Boris A. Bakhmeteff, "Coriolis and the energy principle in hydraulics", en *Theodore von Kármán Anniversary Volume*, California Institute of Technology, Pasadena, 1941, pp. 59-65.
22. W. S. Eisenlohr, "Coefficients for velocity distribution in open-channel flow", *Transactions*, Vol. 110, *American Society of Civil Engineers*, 1945, pp. 633-644. Análisis, pp. 645-668.
23. J. B. Bélanger, "Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes" ("Essay on the Numerical Solution of Some Problems Relative to Steady Flow of Water"), Carilian-Goeury, Paris, 1828, pp. 10-24.
24. R. Ehrenberger, "Versuche über die Verteilung der Drücke an Wehrrücken infolge des abstürzenden Wassers" ("Experiments on the distribution of pressures along the face of weirs resulting from the impact of the falling water"), *Die Wasserwirtschaft*, Vol. 22, Nº 5, Viena, 1929, pp. 65-72.

25. Harald Lauffer, "Druck, Energie und Fliesszustand in Gerinnen mit grossem Gefälle" ("Pressure, energy, and flow type in channels with high gradients"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 30, Nº 7, Munich, 1935, pp. 78-82.
26. J. H. Douma, "Discussion on open channel flow at high velocities, by L. Standish Hall, in Entrainment of air in flowing water: a symposium", *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 1462-1473.

CAPÍTULO 3

PRINCIPIOS DE ENERGÍA Y *MOMENTUM*

3-1. Energía del flujo en canales abiertos. En hidráulica elemental se sabe que la energía total del agua en pies-libra por libra de cualquier línea de corriente que pasa a través de una sección de canal puede expresarse como la altura total en pies de agua, que es igual a la suma de la elevación por encima del nivel de referencia, la altura de presión y la altura de velocidad.

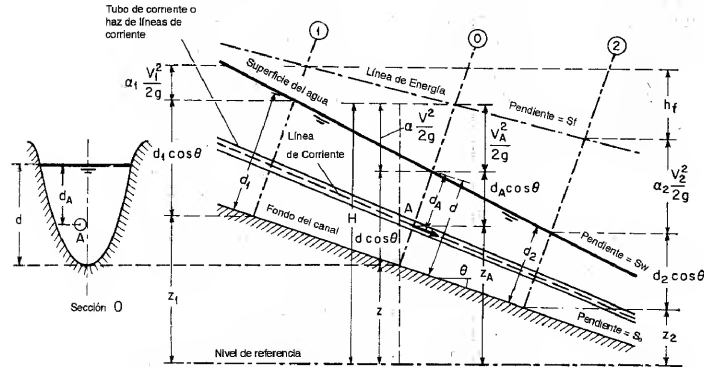


Figura 3-1. Energía de un flujo gradualmente variado en canales abiertos.

Por ejemplo, con respecto al plano de referencia, la altura total H de una sección O que contiene el punto A en una línea de corriente del flujo de un canal de pendiente alta (figura 3-1) puede escribirse como

$$H = z_A + d_A \cos\theta + \frac{V_A^2}{2g} \tag{3-1}$$

donde z_A es la elevación del punto A por encima del plano de referencia, d_A es la profundidad del punto A por debajo de la superficie del agua medida a lo largo de la sección del canal, θ es el ángulo de la pendiente del fondo del canal y $V_A^2/2g$ es la altura de velocidad del flujo en la línea de corriente que pasa a través de A.

En general, cada línea de corriente que pasa a través de una sección de canal tendrá una altura de velocidad diferente, debido a la distribución no uniforme de velocidades en flujos reales. Sólo en un flujo paralelo ideal con distribución uniforme de velocidades la altura de velocidad puede ser idéntica para todos los puntos de la sección transversal. En el caso del flujo gradualmente variado, sin embargo, para propósitos prácticos, puede suponerse que las alturas de velocidad para todos los puntos de la sección del canal son iguales y, con el fin de tener en cuenta la distribución no uniforme de velocidades, puede utilizarse el coeficiente de energía para corregir ese efecto. Luego, la energía total en la sección del canal es

$$H = z + d\cos\theta + \alpha\frac{V^2}{2g} \tag{3-2}$$

Para canales con pendientes bajas, $\theta \approx 0$. Luego, la energía total en la sección del canal es

$$H = z + d + \alpha\frac{V^2}{2g} \tag{3-3}$$

Considérese ahora un canal prismático con pendiente alta (figura 3-1). La línea que representa la elevación de la altura total de flujo es la línea de energía. La pendiente de esta línea se conoce como *gradiente de energía*, representada por S_f. La pendiente de la superficie del agua se representa por S_w y la pendiente del fondo del canal[1] por $S_0 = \text{sen}\ \theta$. En el flujo uniforme, $S_f = S_w = S_0 = \text{sen}\ \theta$.

De acuerdo con el principio de conservación de energía, la altura de energía total en la sección 1 localizada aguas arriba debe ser igual a la altura de energía total en la sección 2 localizada aguas abajo más la pérdida de energía h_f entre las dos secciones; o

$$z_1 + d_1\cos\theta + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2\cos\theta + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_f \tag{3-4}$$

Esta ecuación es aplicable a flujos paralelos o gradualmente variados. Para un canal de pendiente pequeña, ésta se convierte en

$$z_1 + y_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_f \tag{3-5}$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones se conoce como ecuación de energía. Cuando $h_f = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la ecuación (3-5) se convierte en

$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = \text{const} \tag{3-6}$$

Ésta última es la muy conocida *ecuación de energía de Bernoulli*[2].

[1] Por lo general, la pendiente se define como tan θ. Sin embargo, para el presente propósito, se define como sen θ.

[2] Se cree que esta ecuación se asignó al matemático suizo Daniel Bernoulli sólo por inferencia, con el fin de reconocer sus logros pioneros en hidrodinámica, en particular la introducción del

3-2. Energía específica. La *energía específica*[3] en una sección de canal se define como la energía por libra de agua en cualquier sección de un canal medida con respecto al fondo de éste. Luego de acuerdo con la ecuación (3-2), con $z = 0$, la energía específica se convierte en

$$E = d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{3-7}$$

o, para un canal de pendiente pequeña y $\alpha = 1$,

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{3-8}$$

la cual indica que la energía específica es igual a la suma de la profundidad del agua más la altura de velocidad. Para propósitos de simplicidad, el siguiente análisis se basará en la ecuación (3-8) para un canal de pendiente pequeña. Como $V = Q/A$, la ecuación (3-8) puede escribirse como $E = y + Q^2/2gA^2$. Puede verse que, para una sección de canal y un caudal Q determinados, la energía específica en una sección de canal sólo es función de la profundidad de flujo.

Cuando la profundidad de flujo se grafica contra la energía específica para una sección de canal y un caudal determinados, se obtiene una *curva de energía específica* (figura 3-2). Esta curva tiene dos ramas, *AC* y *BC*. La rama *AC* se aproxima asintóticamente al eje horizontal hacia la derecha. La rama *BC* se aproxima a la línea *OD* a medida que se extiende hacia arriba y hacia la derecha. La línea *OD* es una línea que pasa a través del origen y tiene un ángulo de inclinación igual a 45°. Para un canal de pendiente alta, el ángulo de inclinación de la línea *OD* será diferente de 45° (¿por qué?). En cualquier punto *P* de esta curva, la ordenada representa la profundidad y la abscisa representa la energía específica, que es igual a la suma de la altura de presión *y* y la altura de velocidad $V^2/2g$.

La curva muestra que, para una energía específica determinada, existen dos posibles profundidades, la *profundidad baja* y_1 y la *profundidad alta* y_2. La profundidad baja es la profundidad alterna de la profundidad alta, y viceversa. En el punto *C*, la energía específica es mínima. Más adelante se probará que esta condición de energía específica mínima corresponde al estado crítico de flujo. Por consiguiente, en el estado crítico es claro que las dos profundidades alternas se convierten en una, la cual es conocida como *profundidad crítica* y_c. Cuando la profundidad de flujo es mayor que la profundidad crítica, la velocidad de flujo es menor que la velocidad crítica para un caudal determinado y, por consiguiente, el flujo es subcrítico. Cuando la profundidad del flujo es menor que la profundidad crítica, el flujo es supercrítico. Por tanto, y_1 es la profundidad de un flujo supercrítico y y_2 es la profundidad de un flujo subcrítico.

concepto de "altura". En realidad, esta ecuación fue planteada por primera vez por Leonhard Euler y más tarde popularizada por Julius Weisbach [1].

[3] El concepto de energía específica fue introducido por primera vez por Bakhmeteff [2] en 1912.

Si el caudal cambia, existirá un cambio correspondiente en la energía específica. Las dos curvas *A'B'* y *A"B"* (figura 3-2) representan posiciones de la curva de energía específica cuando el caudal es menor y mayor, respectivamente, que el caudal utilizado para la construcción de la curva *AB*.

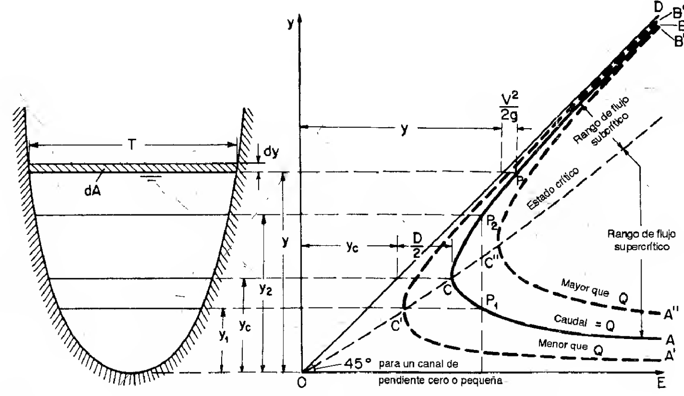


Figura 3-2. Curva de energía específica.

3-3. Criterio para el estado crítico de flujo. El estado crítico de flujo ha sido definido (sección 1-3) como la condición para la cual el número de Froude es igual a la unidad. Una definición más común es que éste es el estado de flujo para el cual la energía específica es mínima para un caudal determinado[4]. Un criterio teórico para el flujo crítico puede desarrollarse a partir de esta definición como se describe a continuación.

Como $V = Q/A$, la ecuación (3-8), la cual es la ecuación para la energía específica en un canal de pendiente baja con $\alpha = 1$, puede escribirse como

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{3-9}$$

Al derivar con respecto a *y* y al notar que *Q* es constante,

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} = 1 - \frac{V^2}{gA}\frac{dA}{dy}$$

El diferencial de área mojada *dA* cerca a la superficie libre (figura 3-2) es igual a *T dy*. Ahora $dA/dy = T$, y la profundidad hidráulica es $D = A/T$; luego la anterior ecuación se convierte en

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{V^2T}{gA} = 1 - \frac{V^2}{gD}$$

[4] El concepto de profundidad crítica basada en el teorema de mínima energía fue introducido por primera vez por Böss[3].

En el estado crítico de flujo la energía específica es mínima, o $dE/dy = 0$. La anterior ecuación, por consiguiente, da

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \tag{3-10}$$

Éste es el criterio para flujo crítico, el cual establece que *en el estado crítico del flujo la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica.* La anterior ecuación también se escribe como $V/\sqrt{gD} = 1$, lo cual significa que $\mathbf{F} = 1$; ésta es la definición de flujo crítico dada anteriormente (sección 1-3).

Si el anterior criterio va a utilizarse en cualquier problema, deben satisfacerse las siguientes condiciones: 1) flujo paralelo o gradualmente variado, 2) canal con pendiente baja, y 3) coeficiente de energía supuesto igual a la unidad. Si el coeficiente de energía no se supone igual a la unidad, el criterio de flujo crítico es

$$\alpha \frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \tag{3-11}$$

Para un canal con un ángulo de pendiente θ grande y un coeficiente de energía α, puede probarse fácilmente que el criterio de flujo crítico es

$$\alpha \frac{V^2}{2g} = \frac{D \cos \theta}{2} \tag{3-12}$$

donde D es la profundidad hidráulica del área mojada perpendicular al fondo del canal. En este caso, el número de Froude puede definirse como

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{gD \cos \theta / \alpha}} \tag{3-13}$$

Nótese que el coeficiente α de una sección de canal varía realmente con la profundidad. En la deducción anterior, sin embargo, se supuso que el coeficiente es constante; por consiguiente, la ecuación resultante no es en absoluto exacta.

3-4. Interpretación de fenómenos locales. En los canales abiertos a menudo ocurren cambios en el estado de flujo subcrítico a supercrítico, y viceversa. Tales cambios se manifiestan con un correspondiente cambio en la profundidad de flujo de una profundidad alta a una profundidad baja, o viceversa. Si el cambio ocurre con rapidez a lo largo de una distancia relativamente corta, el flujo es rápidamente variado y se conoce como *fenómeno local.* La caída hidráulica y el resalto hidráulico son dos tipos de fenómenos locales, los cuales se describen a continuación.

Caída hidráulica. Un cambio rápido en la profundidad de flujo de un nivel alto a un nivel bajo resultará en una depresión abrupta de la superficie del agua. Por lo general, tal fenómeno es causado por un cambio abrupto en la pendiente del canal o en la sección transversal y se conoce como *caída hidráulica* (figura 1-2). En la región de transición de la caída hidráulica a menudo aparece una curva invertida que conecta las superficies del agua antes y después de la caída. El punto de inflexión en la curva inversa marca la posición aproximada de la profundidad crítica para la cual la energía específica es mínima y el flujo pasa de un estado subcrítico a un estado supercrítico.

La caída libre (figura 3-3) es un caso especial de la caída hidráulica. Ésta ocurre cuando existe una discontinuidad en el fondo de un canal plano. A medida que la caída libre avanza en el aire en forma de lámina, no existirá curva invertida en la superficie del agua hasta que ésta choque con algún objeto en la elevación más baja. Es una ley natural que, si no se añade energía externa, la superficie del agua buscará siempre la posición más baja posible, la cual corresponde al menor contenido posible de disipación de energía. Si la energía específica en una sección localizada aguas arriba es E, tal como se muestra en la curva de energía específica, la energía continuará disipándose en su camino hacia aguas abajo y por último alcanzará un contenido de energía mínimo $E_{mín}$. La curva de energía específica muestra que la sección de energía mínima o sección crítica debe ocurrir en el borde de la caída. La profundidad en el borde no puede ser menor que la profundidad crítica debido a que una disminución adicional en la profundidad requeriría un incremento en la energía específica, lo cual es imposible a menos que se suministre energía externa compensatoria. La curva teórica de la superficie del agua en una caída libre se muestra como una línea punteada en la figura 3-3.

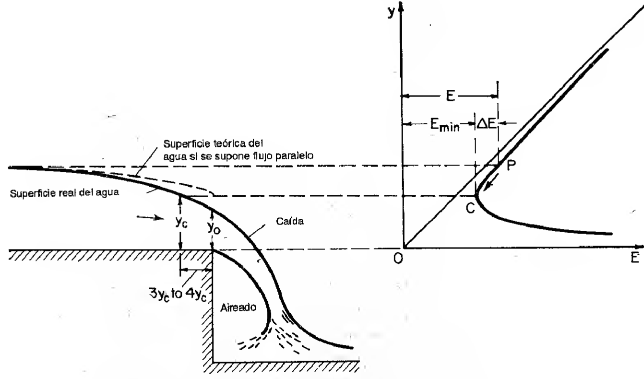


Figura 3-3. Caída libre interpretada mediante una curva de energía específica.

Recuérdese que el cálculo de la profundidad crítica mediante las ecuaciones (3-10) o (3-11), se basa en la suposición de que el flujo es paralelo y sólo es aplicable de manera aproximada al flujo gradualmente variado. El flujo en el borde en efecto es curvilíneo, debido a que la curvatura del flujo es pronunciada, por consiguiente, el método no es válido para determinar la profundidad crítica como la profundidad en el borde. La situación real es que la sección en el borde es la *verdadera* sección de energía mínima, pero no es la sección crítica tal como se calcularía mediante el principio basado en la suposición de flujo paralelo. Rouse [4] encontró que para pendientes pequeñas la profundidad crítica calculada es aproximadamente 1.4 veces la profundidad en el borde, o $y_c = 1.4y_0$, y se localiza aproximadamente a $3y_c$ o $4y_c$ aguas arriba del borde en el canal. La superficie del agua real en la caída libre se muestra como una línea continua en la figura 3-3.

Nótese que si el cambio en la profundidad de flujo desde un nivel alto a un nivel bajo es gradual, el flujo se convierte en flujo gradualmente variado, el cual tiene una curva inversa prolongada en la superficie del agua; este fenómeno puede llamarse *caída hidráulica gradual*, la cual no es un fenómeno local.

Resalto hidráulico. Cuando el cambio rápido en la profundidad de flujo es desde un nivel bajo a un nivel alto, a menudo el resultado es una subida abrupta de la superficie del agua (figura 3-4, en la cual se ha exagerado la escala vertical). Este fenómeno local se conoce como *resalto hidráulico.* Ocurre con freecuencia en un canal por debajo de una compuerta deslizante de regulación, en la parte de aguas abajo de un vertedero o en el sitio donde un canal con alta pendiente se vuelve casi horizontal de manera súbita.

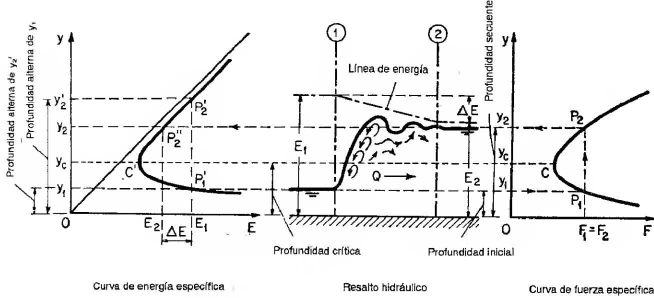


Figura 3-4. Resalto hidráulico interpretado mediante las curvas de energía específica y fuerza específica.

Si el resalto es bajo, es decir, si el cambio en la profundidad es pequeño, el agua no subirá de manera abrupta y obvia sino que pasará del nivel bajo al nivel alto a través de una serie de ondulaciones que van disminuyendo gradualmente de tamaño. Tal resalto bajo se conoce como *resalto ondulatorio.*

Cuando el resalto es alto, es decir, cuando el cambio en la profundidad es grande, se conoce como *resalto directo.* Éste involucra una pérdida de energía relativamente grande mediante disipación en el cuerpo turbulento de agua dentro del resalto. En consecuencia, el contenido de energía en el flujo después del resalto es apreciablemente menor que el de antes del mismo.

Nótese que la profundidad antes del resalto es siempre menor que la profundidad después del resalto. La profundidad antes del resalto se conoce como *profundidad inicial* y_1, y después del resalto se conoce como *profundidad secuente* y_2. Las profundidades inicial y secuente y_1 y y_2 se muestran en la curva de energía específica (figura 3-4). Éstas deben diferenciarse de las profundidades alternas y_1 y y_2', que son las dos profundidades posibles para la misma energía específica. Las profundidades inicial y secuente son las profundidades reales antes y después del

resalto en el cual ocurre una pérdida de energía ΔE. En otras palabras, la energía específica E_1 correspondiente a la profundidad inicial y_1 es mayor que la energía específica E_2 correspondiente a la profundidad secuente y_2 en una cantidad igual a la pérdida de energía ΔE. Si no existieran pérdidas de energía, las profundidades inicial y secuente se volverían idénticas a las profundidades alternas en un canal prismático.

3-5. Energía en canales no prismáticos. En los análisis anteriores se ha supuesto que el canal es prismático, de tal manera que una única curva de energía específica puede aplicarse a todas las secciones del canal; sin embargo, en un canal no prismático la sección transversal varía a lo largo de la longitud del canal y, por consiguiente, la curva de energía específica cambia de una sección a otra. Esta complicación puede verse en una gráfica tridimensional de las curvas de energía a lo largo de un tramo deteminado en un canal no prismático.

Para propósitos demostrativos, se ha escogido como ejemplo un canal no prismático con pendiente variable, en el cual un flujo gradualmente variado cambia de un estado de flujo subcrítico a un estado de flujo supercrítico (figura 3-5). El perfil vertical del canal a lo largo de su línea central se grafica en el plano *Hx* con el eje *x* escogido como nivel de referencia. Para un canal de pendiente variable, es más conveniente graficar la altura de energía total $H = z + y + V^2/2g$, en lugar de la energía específica, contra la profundidad de flujo en el plano *Hy*. Para mayor simplicidad, el coeficiente de corrección de presión debido al ángulo de la pendiente y a la curvatura del flujo se ignora en este análisis. Luego se grafica una línea de energía en el plano *Hx* por debajo de una línea paralela al eje *x* y que pasa a través de la altura total inicial en el eje *H*. La posición exacta de la línea de energía depende de las pérdidas de energía a lo largo del canal. Luego se seleccionan cuatro secciones del canal y se grafican las cuatros curvas de energía de estas secciones en los planos *Hy*, tal como se muestra. La sección inicial 0 es una sección localizada aguas arriba en la región de flujo subcrítico. Las dos profundidades correspondientes a una energía total deteminada H_0 pueden obtenerse a partir de la curva de energía. Como esta sección se localiza en la región de flujo subcrítico, la profundidad alta y_0 debe ser la profundidad real del flujo, en tanto que la profundidad baja es la profundidad alterna. De manera similar, pueden obtenerse las profundidades alternas en las otras secciones. En las secciones 1 y 2 localizadas aguas abajo, los niveles bajos y_1 y y_2 son las profundidades reales de flujo, debido a que éstas se localizan en la región de flujo supercrítico. La profundidad crítica en cada una de las secciones también puede obtenerse a partir de la curva de energía en el punto de mínima energía. En la sección *C* el flujo es crítico y la profundidad y_c es la profundidad crítica. Por último, pueden graficarse varias líneas en el plano H_x mostrando el fondo del canal, la superficie de agua, la línea de profundidad crítica y la línea de profundidad alterna. Nótese que en la sección crítica estas tres líneas, la superficie del agua, la línea de profundidad crítica y la línea de profundidad alterna, se intersecan en un punto único. También se ve que una vez que el flujo pasa a través de la sección crítica, la superficie del agua entra suavemente en la región de flujo supercrítico.

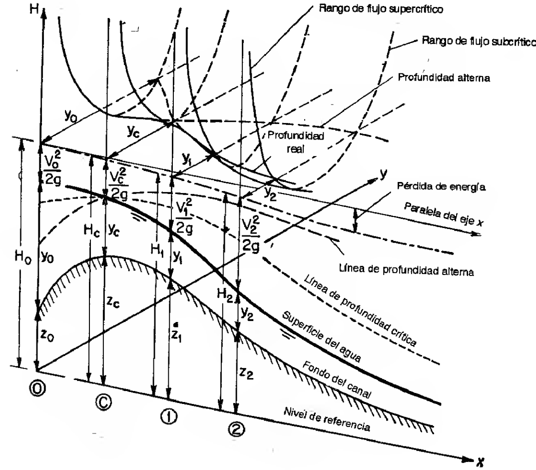


Figura 3-5. Energía en un canal no prismático con pendiente variable, que conduce un flujo gradualmente variado de un estado subcrítico a un estado supercrítico.

La gráfica tridimensional de curvas de energía es complicada. La descripción dada aquí se utiliza sólo para ayudar a que el lector visualice el problema. En aplicaciones reales, las curvas de energía pueden construirse por separado en cierto número de planos bidimensionales *Hy* para las secciones escogidas. Los datos obtenidos de estas curvas se utilizan luego para graficar el perfil de la superficie de agua, la línea de profundidad crítica y la línea de profundidad alterna sobre un plano bidimensional *Hx*. Para canales simples, las curvas de energía no son necesarias debido a que tanto la profundidad crítica como las profundidades alternas pueden calcularse con facilidad directamente.

Ejemplo 3-1. Un canal rectangular de 10 pies de ancho se estrecha gradualmente a 8 pies mediante una contracción de 50 pies de largo, construida con paredes rectas en un fondo horizontal. Si el caudal es 100 pies³/s y la profundidad de flujo es 5 pies en el lado de aguas arriba de la sección de transición, determine el perfil de la superficie de flujo en la contracción, *a*) sin permitir una caída hidráulica gradual en la contracción, y *b*) permitiendo una caída hidráulica gradual con su punto de inflexión en la sección media de la contracción. Las pérdidas por fricción a través de la contracción son insignificantes.

Solución. A partir de los datos dados, la energía total del flujo en la zona de aproximación medida por encima del fondo del canal es $E = 5 + [100/(5 \times 10)]^2/2g = 5.062$ pies. Esta energía se mantiene constante a través de la contracción debido a que las pérdidas de energía son insignificantes. Por consiguiente, se dibuja una línea de energía horizontal que muestra la elevación de la altura total en el perfil del canal (figura 3-6).

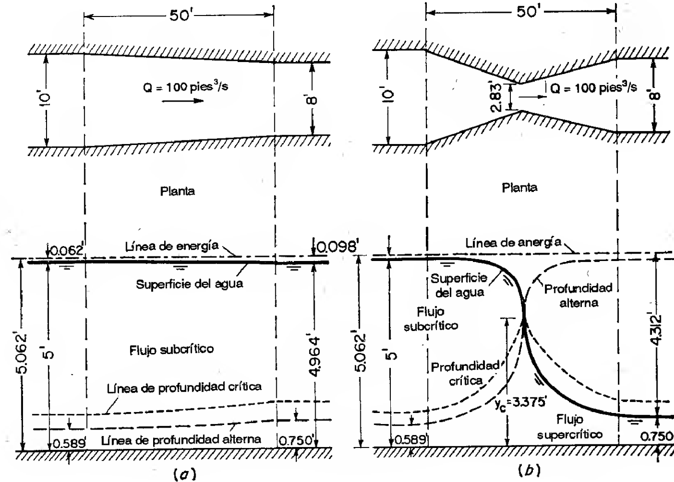


Figura 3-6. Principio de energía aplicado a una contracción de canal *a*) sin caída hidráulica gradual; *b*) con caída hidráulica gradual.

Las profundidades alternas para la energía total dada pueden calcularse utilizando la ecuación (3-9), como sigue:

$$5.062 = y + \frac{100^2}{2g(by)^2}$$

o

$$y^3 - 5.062y^2 + \frac{155.25}{b^2} = 0$$

Ésta es una ecuación cúbica en la cual *b* es el ancho del canal. En la sección de entrada, donde $b = 10$ pies, la solución arroja dos raíces positivas: un nivel bajo $y_1 = 0.589$ pies, la cual es la profundidad alterna; y un nivel alto $y_2 = 5.00$ pies, la cual es la profundidad de flujo. En la sección de salida donde $b = 8$ pies, esta ecuación arroja un nivel bajo de $y_1 = 0.750$ pies y un nivel alto de $y_2 = 4.964$ pies.

Cuando no se permite una caída hidráulica gradual en la contracción (figura 3-6*a*), la profundidad de flujo en la sección de salida debe mantenerse en el nivel alto, tal como se muestra. Los niveles altos para otras secciones intermedias se calculan utilizando la anterior ecuación, la cual da el perfil de la superficie de flujo. Por último, los niveles bajos se calculan mediante el anterior procedimiento y se indican mediante la línea de profundidad alterna.

Cuando se desea una caída hidráulica gradual en la contracción (figura 3-6*b*), la profundidad de flujo en la sección de salida debe mantener su nivel bajo. Como el punto de inflexión de la caída o sección crítica se mantiene en la sección media de la contracción, la profundidad crítica en esta sección es igual a la altura total dividida por 1.5 (problema 3-3) o 5.062/1.5 = 3.375 pies. Al utilizar la ecuación (3-10), la velocidad crítica es igual a $V_c = \sqrt{3.375g} = 10.45$ pies/s. Luego el ancho de esta sección crítica debería ser $100/(10.45 \times 3.38) = 2.83$ pies.

Una vez que el tamaño de la sección media ha sido determinado, las paredes laterales de la contracción pueden dibujarse mediante líneas rectas. Los niveles bajo y alto en cada sección se calculan con la ecuación dada previamente. Como el flujo aguas arriba de la sección crítica

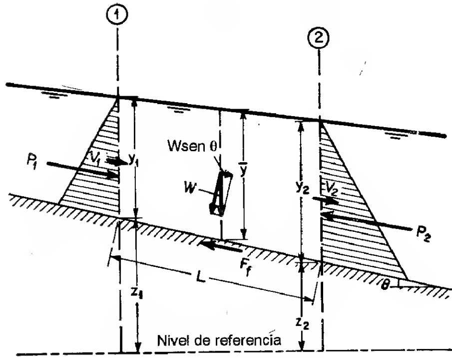


Figura 3-7. Aplicación del principio de momentum.

de distribución de presiones. Como P_1 y P_2 son fuerzas, los coeficientes pueden llamarse específicamente *coeficientes de fuerza.* Puede demostrarse que el coeficiente de fuerza se expresa mediante

$$\beta' = \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A h\, dA = 1 + \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A c\, dA \tag{3-15}$$

donde $\bar{z}$ es la profundidad del centroide del área mojada A por debajo de la superficie libre, h es la altura de presión del área elemental dA y c es la corrección de altura de presión [ecuación (2-9)]. Con facilidad puede verse que β' es mayor que 1.0 para flujo cóncavo, menor que 1.0 para flujo convexo e igual a 1.0 para flujo paralelo.

Puede demostrarse que la ecuación de *momentum* es similar a la ecuación de energía cuando se aplica a ciertos problemas de flujo. En este caso, se considera un flujo gradualmente variado; de acuerdo con esto, la distribución de presiones en las secciones puede suponerse hidrostática, y $\beta' = 1$. También, se supone que la pendiente del canal es relativamente baja[6]. Luego, en el tramo corto de un canal rectangular de baja pendiente y ancho b (figura 3-7),

$$P_1 = {}^1\!/\!_2 wby_1^2$$

y

$$P_2 = {}^1\!/\!_2 wby_2^2$$

suponiendo

$$F_f = wh_f' b\bar{y}$$

donde h_f es la altura de fricción y $\bar{y}$ es la profundidad promedio, o $(y_1 + y_2)/2$. El caudal a través del tramo puede tomarse como el producto de la velocidad promedio y del área promedio, o

$$Q = \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)b\bar{y}$$

[6] Si el ángulo θ de la pendiente es grande, entonces $P_1 = {}^1\!/\!_2 wd_1^2 \cos\theta$ y $P_2 = {}^1\!/\!_2 wd_2^2 \cos\theta$, donde d_1 y d_2 son las profundidades de flujo de sección, y $\cos\theta$ es un factor de corrección (sección 2-10).

También, es evidente (figura 3-7) que el peso del cuerpo del agua es

$$W = wb\bar{y}L$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

Al sustituir todas las expresiones anteriores en los ítems correspondientes de la ecuación (3-14) y al simplificar

$$z_1 + y_1 + \beta_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \beta_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f' \tag{3-16}$$

En efecto, esta ecuación es la misma que la ecuación de energía (3-5).

Sin embargo, en teoría, las dos ecuaciones no sólo utilizan diferentes coeficientes de distribución de velocidad, a pesar de que estos son casi iguales, sino que involucran significados diferentes para las pérdidas de fricción. En la ecuación de energía, el ítem h_f mide la energía *interna* disipada en la masa completa del agua dentro del tramo, en tanto que el ítem h_f', en la ecuación de *momentum* mide las pérdidas debidas a fuerzas *externas* ejercidas por el agua sobre las paredes del canal. Al no considerar la pequeña diferencia entre los coeficientes α y β, parece que, en el flujo gradualmente variado, las pérdidas de energía interna en realidad son idénticas con las pérdidas debidas a fuerzas externas. En el caso de flujo uniforme, la tasa a la cual las fuerzas superficiales actúan, es igual a la tasa de disipación de energía. Por consiguiente, en este caso no existe una diferencia entre h_f y h_f', excepto en la definición.

La similaridad entre las aplicaciones de los principios de energía y *momentum* puede resultar confusa. Un entendimiento claro de las diferencias básicas de su constitución es importante, a pesar del hecho de que en muchos casos los dos principios producirán resultados prácticamente idénticos. La distinción inherente entre los dos principios reside en el hecho de que la energía es una cantidad escalar en tanto que el *momentum* es una cantidad vectorial; también, la ecuación de energía contiene un término para pérdidas internas, en tanto que la ecuación de *momentum* contiene un término para la resistencia externa.

En general, el principio de energía ofrece una explicación más simple y clara que la dada por el principio de *momentum.* Pero el principio de *momentum* tiene ciertas ventajas de aplicación a problemas que involucran grandes cambios en la energía interna, como el problema del resalto hidráulico. Si la aplicación de energía se aplica a tales problemas, las pérdidas de energía internas desconocidas representadas por h_f son indeterminadas y la omisión de este término podría dar como resultado errores considerables. Si en su lugar se aplica la ecuación de *momentum* a estos problemas, debido a que ésta sólo tiene en cuenta fuerzas externas, los efectos de las fuerzas internas estarán por completo fuera de consideración y no tendrían que ser evaluados. El término para las pérdidas por fricción debido a las fuerzas externas, por otro lado, es poco importante en tales problemas y puede omitirse con toda seguridad, debido a que el fenómeno ocurre en un tramo corto del canal y los efectos debidos a las fuerzas externas son insignificantes en comparación con las pérdidas internas. Aspectos adicionales sobre la solución del

problema del resalto hidráulico mediante los dos principios serán tratados más adelante (ejemplo 3-3).

A continuación se da un ejemplo que ilustra la aplicación del principio de *momentum* al problema de un vertedero de cresta ancha.

Ejemplo 3-2. Deduzca el caudal por unidad de ancho en un vertedero de cresta ancha localizado en un canal rectangular.

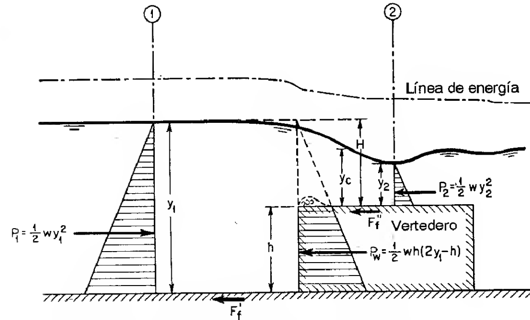


Figura 3-8. Principio de *momentum* aplicado al flujo sobre un vertedero de cresta ancha.

Solución. Las suposiciones que se hacen para esta solución (figura 3-8) son: 1) las fuerzas de fricción F_f' y F_f'' son insignificantes; 2) la profundidad y_2 es la profundidad mínima sobre el vertedero; 3) en las secciones del canal bajo consideración existe flujo paralelo; y 4) la presión del agua P_w sobre la superficie del vertedero es igual a la presión hidrostática total medida por debajo del nivel de la superficie de agua aguas arriba, o

$$P_w = \tfrac{1}{2}wh[y_1 + (y_1 - h)] = \tfrac{1}{2}wh(2y_1 - h)$$

La exactitud de la última suposición ha sido verificada de manera experimental [6]. Si se aplica la ecuación de *momentum* (3-14) al cuerpo de agua contenido entre la sección de aproximación 1 aguas arriba y la sección 2 aguas abajo en la sección de profundidad mínima en la parte superior del vertedero, puede escribirse la siguiente ecuación:

$$\frac{qw}{g}\left(\frac{q}{y_2} - \frac{q}{y_1}\right) = \tfrac{1}{2}wy_1^2 - \tfrac{1}{2}wy_2^2 - \tfrac{1}{2}wh(2y_1 - h)$$

donde q es el caudal por unidad de ancho del vertedero.

Algunos experimentos hechos por Doeringsfeld y Barker [6] han demostrado que, en promedio, $y_1 - h = 2y_2$. En este caso, la anterior ecuación puede simplificarse y resolverse para q,

$$q = 0.433\sqrt{2g}\left(\frac{y_1}{y_1 + h}\right)^{1/2} H^{3/2} \tag{3-17}$$

Al considerar los límites de h desde cero hasta infinito, esta ecuación varía de $q = 3.47H^{3/2}$ hasta $q = 2.46H^{3/2}$. Nótese que el rango práctico del coeficiente de $H^{3/2}$ obtenido en observaciones reales[7] varía entre 3.05 y 2.67. En la aplicación del principio de *momentum* a este problema, puede verse que el conocimiento de las pérdidas de energía internas debidas a la separación del flujo a la entrada y a otras causas no se necesita para el análisis.

3-7. Fuerza específica. Al aplicar el principio de *momentum* a un tramo horizontal corto de un canal prismático, pueden ignorarse los efectos de las fuerzas externas de fricción y del peso del agua. Luego $\theta = 0$ y $F_f = 0$, y suponiendo también que $\beta_1 = \beta_2 = 1$, la ecuación (3-14) se convierte en

$$\frac{Qw}{g}(V_2 - V_1) = P_1 - P_2$$

Las fuerzas hidrostáticas P_1 y P_2 pueden expresarse como

$$P_1 = w\bar{z}_1 A_1 \quad \text{y} \quad P_2 = w\bar{z}_2 A_2$$

donde $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$ son las distancias de los centroides de las respectivas áreas mojadas A_1 y A_2 por debajo de la superficie de flujo. También, $V_1 = Q/A_1$ y $V_2 = Q/A_2$. Luego la anterior ecuación de *momentum* puede escribirse como

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2 \tag{3-18}$$

Los dos lados de la ecuación (3-18) son análogos y, por consiguiente, pueden expresarse para cualquier sección del canal mediante una función general

$$F = \frac{Q^2}{gA} + \bar{z}A \tag{3-19}$$

Esta función consta de dos términos. El primer término es el *momentum* del flujo pasa a través de la sección del canal por unidad de tiempo y por unidad de peso del agua, y el segundo es la fuerza por unidad de peso del agua. Como ambos términos en esencia son fuerza por unidad de peso del agua, su suma puede denominarse *fuerza específica*[8]. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (3-18) puede expre-

[7] En realidad el valor del coeficiente depende de muchos factores: sobre todo, el redondeo del borde de aguas arriba, la longitud y la pendiente de la cresta del vertedero y la altura del vertedero. Se han desarrollado muchos experimentos sobre *vertederos de cresta ancha.* A partir de algunos de los experimentos más conocidos, King [7] interpoló los datos y preparó tablas para el coeficiente bajo diferentes condiciones. Un análisis muy completo, incluidos los datos más recientes, y una presentación de los resultados para aplicaciones prácticas fue hecha por Tracy [8]. Los experimentos más conocidos sobre vertederos de cresta ancha son 1) las *pruebas de Bazin*, llevadas a cabo en Dijon, Francia, en 1886 [9]; 2) las *pruebas de Cornell U.S.D.W.B.*, llevadas a cabo en la Universidad de Cornell en 1899 por el U.S. Deep Waterways Board, bajo la dirección de G.W. Rafter, y las *pruebas de Cornell U.S.G.S.*, llevadas a cabo por el U.S. Geological Survey, bajo la dirección de Robert E. Horton en 1903 [10]; 3) las *pruebas de Michigan*, llevadas a cabo en la Universidad de Michigan durante 1928-1929 [11]; y 4) las *pruebas de Minnesota* y las *pruebas de Washington*, llevadas a cabo, respectivamente, en la Universidad de Minnesota y en la Universidad estatal de Washington [6]. Para tener en cuenta ecuaciones y coeficientes de descarga desarrollados en la Unión Soviética, *véase* [12]. Para un tratamiento analítico del problema *véase* [13].

[8] Ésta también se conoce indiferentemente como "fuerza más *momentum*", "flujo de *momentum*", "fuerza total" o, simplemente, "fuerza" de una corriente (*véanse* pp. 81-82 de [14]. La función repre-

sarse como $F_1 = F_2$. Esto significa que las fuerzas específicas en las secciones 1 y 2 son iguales, siempre y cuando las fuerzas externas y el peso efectivo del agua en el tramo entre las dos secciones sean insignificantes.

Al graficar la profundidad contra la fuerza específica para una sección del canal y un caudal determinados, se obtiene una *curva de fuerza específica* (figura 3-9). Esta curva tiene dos ramas, AC y BC. La rama AC se aproxima asintóticamente al eje horizontal hacia la derecha. La rama BC aumenta hacia arriba y se extiende indefinidamente hacia la derecha. Para un determinado valor de la fuerza específica, la curva tiene dos profundidades posibles, y_1 y y_2. Tal como se demostrará más adelante, las dos profundidades constituyen las profundidades inicial y secuente de un resalto hidráulico. En el punto C de la curva las dos profundidades se convierten en una y la fuerza específica es mínima. El siguiente argumento demuestra que la profundidad en el valor mínimo de la fuerza específica es igual a la profundidad crítica[9].

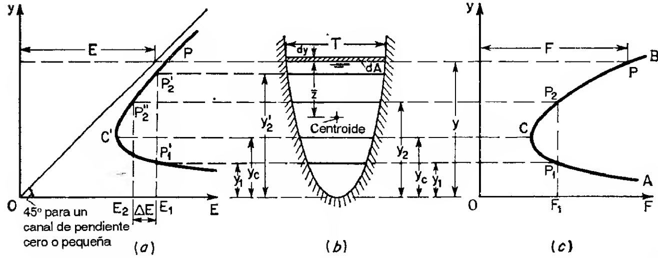


Figura 3-9. Curva de fuerza específica complementada con una curva de energía específica. (*a*) Curva de energía específica; (*b*) sección del canal; (*c*) curva de fuerza específica.

Para un valor mínimo de la fuerza específica, la primera derivada de F con respecto a y debe ser cero, o, a partir de la ecuación (3-19),

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dy} + \frac{d(\bar{z}A)}{dy} = 0$$

Para un cambio d_y en la profundidad, el cambio correspondiente $d(\bar{z}A)$ en el momento estático del área mojada alrededor de la superficie libre es igual a $[A(\bar{z} + dy) + T(dy)^2/2] - \bar{z}A$ (figura 3-9). Al no considerar el diferencial de orden mayor, es decir, al suponer que $(dy)^2 = 0$, el cambio en el momento estático se convierte en $d(\bar{z}A) = A\,dy$. Luego la ecuación precedente puede escribirse como

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dy} + A = 0$$

sentada por la ecuación (3-19) fue formulada por Bresse [15] para el estudio del resalto hidráulico descrito en el ejemplo 3-3.

[9] El concepto de profundidad crítica, basado en el teorema de *momentum*, se cree que fue desarrollado por Boussinesq [16].

Como $dA/dy = T$, $Q/A = V$ y $AT = D$, la anterior ecuación puede reducirse a

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \tag{3-10}$$

Éste es el criterio para el estado de flujo crítico, deducido anteriormente (sección 3-3). Por consiguiente, se ha probado que la profundidad correspondiente al valor mínimo de la fuerza específica es la profundidad crítica[10]. También puede establecerse que *en el estado crítico de flujo la fuerza específica es mínima para un caudal determinado*.

Ahora, compare la curva de fuerza específica con la curva de energía específica (figura 3-9). Para una determinada energía específica E_1, la curva de energía específica indica dos posibles profundidades, es decir, un nivel bajo y_1 en la región de flujo supercrítico y un nivel alto y_2' de flujo subcrítico[11]. Para un determinado valor de F_1, la curva de fuerza específica también indica dos profundidades posibles, es decir, una profundidad inicial y_1 en la región supercrítica y una profundidad secuente y_2 en la región de flujo subcrítico. Se supone que el nivel bajo y la profundidad inicial son ambas iguales a y_1. Luego, las dos curvas indican de manera conjunta que la profundidad secuente y_2 es siempre menor que el nivel alto y_2'. Además, la curva de energía específica muestra que el contenido de energía E_2 para la profundidad y_2 es menor que el contenido de energía E_1 para la profundidad y_2'. Por consiguiente, para mantener un valor constante de F_1, la profundidad de flujo debe cambiar de y_1 a y_2 con el costo de perder cierta cantidad de energía, que es igual a $E_1 - E_2 = \Delta E$. Un ejemplo de esto es el resalto hidráulico en un fondo horizontal, en el cual las fuerzas específicas antes y después del resalto son iguales y la pérdida de energía es una consecuencia del fenómeno. Esto se explicará más en extenso en el siguiente ejemplo. Nótese en este punto, sin embargo, que las profundidades y_1 y y_2' mostradas por la curva de energía específica son las profundidades alternas; en tanto que las profundidades y_1 y y_2 mostradas por la curva de fuerza específica son las profundidades inicial y secuente de un resalto hidráulico, respectivamente.

Ejemplo 3-3. Deduzca una relación entre las profundidades inicial y secuente de un resalto hidráulico en un fondo horizontal de un canal rectangular.

Solución. Las fuerzas de fricción externas y el peso efectivo del agua en el resalto hidráulico sobre un fondo horizontal son insignificantes, debido a que el resalto ocurre en una distancia relativamente corta y a que el ángulo del fondo horizontal es cero. Las fuerzas específicas de las secciones 1 y 2 (figura 3-4), respectivamente, antes y después del resalto pueden considerarse iguales; es decir,

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2A_2 \tag{3-18}$$

[10] Nótese que la prueba anterior se basó en las suposiciones de flujo paralelo y distribución uniforme de velocidades. Sin embargo, el concepto de profundidad crítica es un concepto general que es válido para todos los flujos, ya sea deducido de consideraciones de energía o de *momentum*. Esta validez fue probada por Jaeger [14, 17, 18] y esta prueba se conoce como *teorema de Jaeger* [19].

[11] Con el fin de establecer una diferencia clara entre la profundidad secuente y el nivel alto de las profundidades alternas, la profundidad secuente se designa mediante y_2 y el nivel alto mediante y_2'. Sin embargo, en algunos apartes de este libro ambas profundidades se designan mediante y_2.

Para un canal rectangular de ancho b, $Q = V_1A_1 = V_2A_2$, $A_1 = by_1$, $A_2 = by_2$ y $\bar{z}_1 = y_1/2$ y $\bar{z}_2 = y_2/2$. Al sustituir estas relaciones y $\mathbf{F}_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$ en la anterior ecuación y al simplificar

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 - (2\mathbf{F}_1^2 + 1)\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 2\mathbf{F}_1^2 = 0 \tag{3-20}$$

Al factorizar

$$\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2\mathbf{F}_1^2\right]\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) = 0$$

Luego,

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2\mathbf{F}_1^2 = 0$$

La solución cuadrática es

$$\frac{y_2}{y_1} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1\right) \tag{3-21}$$

Para un determinado número de Froude $\mathbf{F}_1$ del flujo de aproximación, la relación de la profundidad secuente con respecto a la profundidad inicial está dada por la ecuación anterior.

Nótese que el principio del momentum se utiliza en esta solución debido a que en el resalto hidráulico se produce una alta cantidad de pérdidas de energía interna, las cuales no pueden evaluarse en la ecuación de energía.

El uso conjunto de las curvas de energía específica y de fuerza específica ayuda a determinar gráficamente la pérdida de energía resultante en el resalto hidráulico para un flujo de aproximación determinado. Para una determinada profundidad de aproximación y_1, los puntos P_1 y P_1' se localizan en las curvas de fuerza específica y de energía específica, respectivamente (figura 3-4). El punto P_1' da el contenido de energía inicial E_1. Dibuje una línea vertical, pasando a través del punto P_1 e intersecando la rama superior de la curva de fuerza específica en el punto P_2, el cual da la profundidad secuente y_2. Luego, dibuje una línea horizontal que pase a través del punto P_2 y corte la curva de energía específica en el punto P_2'', el cual da el contenido de energía E_2 después del resalto. La pérdida de energía es entonces igual a $E_1 - E_2$, representada por ΔE.

3-8. Principio de *momentum* aplicado a canales no prismáticos.

La fuerza específica, al igual que la energía específica, varía con la forma de la sección del canal. Al aplicar el principio de *momentum* a canales no prismáticos, por consiguiente, puede construirse una gráfica tridimensional similar a la mostrada para la aplicación del principio de energía (figura 3-5). Sin embargo, para propósitos prácticos, esto pocas veces es necesario.

Cuando no existe intervención de fuerzas externas o cuando estas fuerzas son insignificantes o conocidas, el principio de *momentum* puede aplicarse con todas sus ventajas a problemas como el resalto hidráulico, el cual produce unas altas pérdidas de energía interna que no pueden evaluarse si el principio de energía se utiliza por sí solo. El siguiente ejemplo muestra la aplicación del principio de *momentum* al diseño de una transición de canal en la cual se involucra un resalto hidráulico.

Ejemplo 3-4. Un canal rectangular de 8 pies de ancho, que conduce 100 pies³/s con una profundidad de 0.5 pies, se conecta mediante una transición de paredes rectas a un canal de 10 pies de ancho, el cual fluye con una profundidad de 4 pies (figura 3-10). Determine el perfil de flujo en la transición si las pérdidas de fricción a través de ésta son insignificantes. Si en la transición ocurre un resalto hidráulico, ¿cómo puede eliminarse?

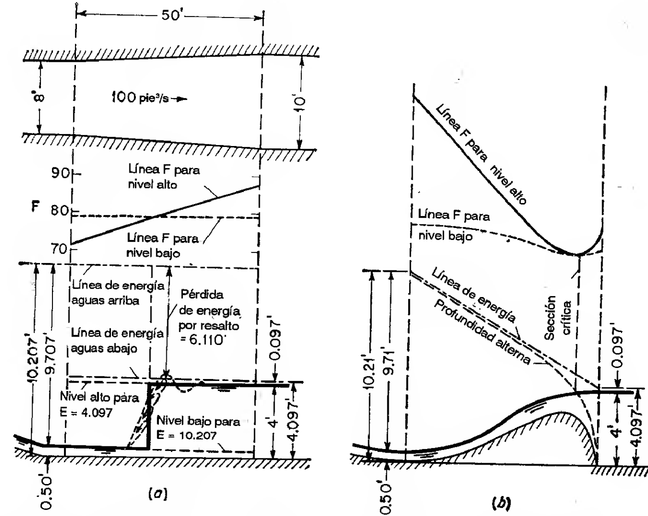


Figura 3-10. Principios de energía y de *momentum* aplicados a una sección de canal (*a*) con resalto hidráulico; (*b*) sin resalto hidráulico.

Solución. A partir de los datos dados, la energía total con respecto al fondo del canal para el flujo de aproximación es $E = 0.5 + [100/(0.5 \times 8)]^2/2g] = 10.207$ pies, y aguas abajo, $E = 4.0 + [100/(4 \times 10)]^2/2g = 4.097$ pies. Es claro que esta diferencia de energía de 6.11 pies debe disiparse a través de la transición por algún medio, debido a que la pérdida por fricción es insignificante. Además, los números de Froude 6.24 y 0.22 de los flujos de aproximación y aguas abajo son, respectivamente, mayor y menor que la unidad, indicando un cambio en el flujo de supercrítico a subcrítico. Por consiguiente, debe esperarse que ocurra un resalto hidráulico para disipar la diferencia de energía y para efectuar un cambio en el estado de flujo. Sin embargo, el que este resalto ocurra dentro de la transición o en el canal aguas arriba o aguas abajo se podrá saber utilizando análisis adicional.

Tabla 3-1. Cálculo para la expansión del canal descrita en el ejemplo 3-4.

Ancho de la sección b, pies	Nivel bajo y_1, pies para $E = 10.207$	F_1	Nivel alto y_2, pies para $E = 4.097$	F_2
8.00	0.500	78.6	3.940	71.9
8.50	0.470	78.7	3.960	75.9
9.00	0.443	78.8	3.979	79.9
9.50	0.419	78.8	3.987	83.6
10.00	0.398	78.8	4.000	87.8

Se toman cinco secciones de la transición con sus anchos mostrados en la tabla 3-1. Para la energía de aproximación total de 10.207 pies, el nivel bajo y_1 para cada sección puede calcularse a partir de las ecuaciones (3-8) o (3-9), o

$$\frac{(100/by_1)^2}{2g} + y_1 = 10.207$$

donde b es el ancho de la sección. De manera similar, el nivel alto y_2 para una energía total de 4.097 pies puede calcularse a partir de

$$\frac{(100/by_2)^2}{2g} + y_2 = 4.097$$

Las líneas de niveles bajo y alto se construyen a lo largo en conjunto con las líneas de energía (figura 3-10*a*). Después de que estos niveles y líneas de energía han sido determinados, pueden calcularse las fuerzas específicas F_1 y F_2 para los niveles bajo y alto, respectivamente, en cada sección y luego se grafican utilizando unas escalas y unos niveles de referencias convenientes. El resalto hidráulico debe ocurrir donde las fuerzas específicas para los niveles bajo o alto son iguales, o en la intersección de las líneas F. En esta sección el nivel bajo de la superficie del agua saltará hasta el nivel alto, tal como se indica mediante una línea vertical (figura 3-10*a*). Sin embargo, en realidad, el resalto ocurrirá a través de una distancia corta, tal como se muestra mediante la línea punteada. La pérdida de energía en el resalto se representa mediante la intersección vertical entre las líneas de energía aguas arriba y aguas abajo, la cual es igual a 6.11 pies, cubriendo la diferencia de energía entre los flujos en los dos canales conectados. Al variar la forma de la sección transversal de los canales conectados puede alterarse la localización de la intersección de las líneas F o la posición de resalto. Al cambiar la profundidad de flujo en el canal aguas abajo también se cambia la posición del resalto. Por lo general, un incremento en la profundidad de aguas abajo moverá el resalto hacia aguas arriba, y una disminución en la profundidad moverá el resalto hacia aguas abajo.

El resalto hidráulico puede eliminarse si la pérdida de energía se disipa gradual y suavemente. Esto puede hacerse introduciendo la rugosidad necesaria en la transición, por ejemplo, colocando maderos cruzados en el fondo de la transición. Supóngase en este ejemplo que la diferencia de energía de 6.11 pies se disipa uniformemente en la transición debido a rugosidad artificial. Luego, la línea de energía en la transición es sólo una línea recta que une las alturas totales de las dos secciones extremas (figura 3-10*b*). Para propósitos de diseño, primero es conveniente suponer el perfil de flujo y luego proporcionar las dimensiones de la transición, de tal modo que el resalto pueda eliminarse. Mediante la proporción de la transición se elimina el resalto ya sea variando el ancho o elevando el fondo de la transición. En este ejemplo, se supone que el fondo va a ser subido o "jorobado" (figura 3-10*b*). El procedimiento subseeuente para el cálculo es 1) suponer el perfil de flujo; 2) calcular la altura de velocidad, la cual es igual a la diferencia entre la altura total y la elevación de la superficie del agua, en un cierto número de secciones seleccionadas; 3) calcular la velocidad y luego el área mojada y la profundidad de flujo para cada sección; 4) determinar la elevación del fondo de la transición, la cual es igual a la elevación de la superficie del agua menos la profundidad del flujo; 5) calcular la profundidad alterna, debido a que el fondo de la transición es fijo; y 6) calcular las líneas F_1 y F_2 para los niveles bajo y alto y graficarlas en una escala conveniente. Nótese que las dos líneas F se intersecan y se vuelven tangentes la una con respecto a la otra en la sección crítica, donde el flujo cambia desde un nivel bajo a un nivel alto, es decir, desde un estado supercrítico a un estado subcrítico. Si se grafica la línea de profundidad crítica, ésta intersecará la línea de profundidad alterna y la superficie del agua de manera simultánea en la sección crítica. Con base en la línea de profundidad crítica, también puede construirse una línea de energía específica mínima. Esta línea debe ser tangente a la línea de energía total en la sección crítica.

PROBLEMAS

3-1. Con referencia al canal de pendiente baja y con la sección que ilustra la figura 2-2, *a*) construya una familia de curvas de energía específica para Q = 0,50, 100, 200, 300 y 400 pies^3/s, respectivamente, *b*) dibuje el lugar geométrico del punto de profundidad crítica en estas curvas, *c*) grafique una curva de la profundidad crítica contra el caudal, y *d*) grafique una familia de curvas de profundidades alternas, y_1 *versus* y_2, para los caudales dados.

3-2. Construya la curva de energía específica para un tubo de 36 pulg que conduce un flujo en canal abierto de 20 pies^3/s, *a*) en una pendiente plana, y *b*) en una pendiente de 30°.

3-3. Demuestre que en el estado crítico de flujo la altura de energía específica en un canal rectangular es igual a 1.5 veces la profundidad de flujo, suponiendo pendiente 0 y $\alpha = 1$.

3-4. Deduzca las ecuaciones para el lugar geométrico del punto de profundidad crítica en la curva de energía específica y para la curva de profundidad crítica *versus* caudal, como se obtuvo en el problema 3-1.

3-5. Demuestre la ecuación (3-12).

3-6. Demuestre la ecuación (3-13).

3-7. Demuestre que en el estado crítico de flujo el caudal es máximo para una determinada energía específica[12].

3-8. Demuestre que la relación entre las profundidades alternas y_1 y y_2 en un canal rectangular puede expresarse por

$$\frac{2y_1^2y_2^2}{y_1 + y_2} = y_c^3 \qquad (3\text{-}22)$$

donde y_c es la profundidad crítica. Utilizando los valores de y_1/y_c como ordenadas y de y_2/y_c como abscisas, construya una gráfica adimensional para la anterior ecuación y estudie sus características.

3-9. Resuelva el problema dado en el ejemplo 3-1, *a*) si existe una pérdida de energía total de 0.6 pies distribuida uniformemente a través de la longitud de la contracción, y *b*) si se desea una caída hidráulica gradual con su punto de inflexión localizado a una distancia de 20 pies aguas arriba de la sección de salida.

3-10. A partir del principio de *momentum* y de la ecuación de continuidad aplicado al análisis de un resalto hidráulico sumergido, que ocurre a la salida de una compuerta deslizante en un canal rectangular (figura 3-11), demuestre que

$$\frac{y_s}{y_2} = \sqrt{1 + 2F_2^2\left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right)} \qquad (3\text{-}23)$$

donde y_s es la profundidad sumergida; y_1 es la apertura de la compuerta deslizante; y_2 es la profundidad aguas abajo; y $F_2^2 = q^2/g\,y_2^3$, siendo q el caudal por unidad de ancho del canal. No considere la fricción F_f en el lecho del canal

3-11. Demuestre que la pérdida de energía en un resalto hidráulico horizontal es

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \qquad (3\text{-}24)$$ [13]

[12] El concepto de profundidad crítica, basado en el teorema de caudal máximo, fue presentado por primera vez por Bélanger [20].

[13] Esta ecuación fue demostrada por Bresse a principios de 1860 [15]. Al mismo tiempo, Bresse introdujo el concepto de profundidad crítica, como una profundidad para la cual el flujo subcrítico cambia a supercrítico, o viceversa.

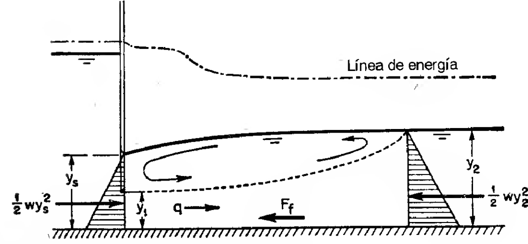


Figura 3-11. Resalto hidráulico sumergido a la salida de una compuerta deslizante.

3-12. Si un resalto hidráulico se forma en el fondo horizontal a la salida del vertedero descrito en el problema 2-11, determine la profundidad secuente y la pérdida de energía que se produce en el resalto.

3-13. Con referencia a un canal de pendiente baja y a la sección que ilustra la figura 2-2, *a*) construya una familia de curvas de fuerza específica para Q = 0, 50, 100, 200, 300 y 400 pies³/s, respectivamente, y *b*) grafique una familia de curvas de profundidad inicial contra profundidad secuente para los caudales dados.

3-14. Construya la curva de fuerza específica para un tubo de 36 pulg que conduce un flujo a superficie libre de 20 pies³/s con una pendiente baja.

3-15. Demuestre la ecuación (3-15).

3-16. A partir del principio de *momentum*, demuestre que el número de Froude para un flujo paralelo o gradualmente variado en un canal con ángulo θ de la pendiente puede definirse por

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{gD \cos \theta / \beta}} \tag{3-25}$$

donde V es la velocidad media, D es la profundidad hidráulica de la sección y β es el coeficiente de *momentum* para una distribución no uniforme de velocidades.

3-17. Para eliminar el resalto hidráulico en el ejemplo 3-4, suponga que el perfil de flujo está compuesto por dos curvas circulares inversas tangentes una a la otra en la sección media de la transición y también a la superficie de agua en los canales conectados en los dos extremos de la transición. Verifique el cálculo (mostrado a escala en la figura 3-10*b*).

3-18. Se supone que existe una pérdida por fricción de 1.0 pie uniformemente distribuida a lo largo de la longitud de la transición del ejemplo 3-4. Determine el perfil de flujo en la transición.

REFERENCIAS

1. Hunter Rouse y Simon Ince, *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City, Iowa, 1957.
2. Boris A. Bakhmeteff, *O Neravnomernom Dvizhenii Zhidkosti v Otkrytom Rusle* (*Varied flow in open channel*), St. Petersburg, Russia, 1912.
3. Paul Böss, *Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fliesszustandes* (*Computation of water surface with change of the flow type*), Springer-Verlag, Berlin, 1919, pp. 20 y 52.
4. Hunter Rouse, "Discharge characteristics of the free overfall", *Civil Engineering*, Vol. 6, Nº 7, abril, 1936, pp. 257-260.
5. J. B. Bélanger, *Résumé de leçons* (*Summary of Lectures*), Paris, 1838.

6. H. A. Doeringsfeld y C. L. Barker, "Pressure-momentum theory applied to the broad-crested weir", *Transactions*, Vol. 106, American Society of Civil Engineers, 1941, pp. 934-946.
7. Horace William King, *Handbook of Hydraulics*, revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., 4a. ed., New York, 1954, pp. 5-1 a 5-16.
8. H. J. Tracy, *Discharge characteristics of broad-crested weirs*, U.S. Geological Survey, Circular 397, 1957.
9. H. Bazin, "Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir" ("Recent experiments on the flow of water over weirs"), *Mémoires et Documents, Annales des ponts et chaussées*, 2ºsemestre, octubre, 1888, pp. 393-448. Traducido al inglés por Arthur Marichal y John C. Trautwine, Jr., *Proceedings, Engineers' Club of Philadelphia*, Vol. 7, Nº 5, 1890, pp. 259-310; Vol. 9, Nº 3, pp. 231-244, y Nº 4, 1892, pp. 287-319, y Vol. 10, Nº 2, 1893, pp. 121-164.
10. R. E. Horton, "Weir experiments, coefficients, and formulas", *U.S. Geological Survey, Water Supply and Irrigation, Paper 150*, 1906; revisado como *Paper 200*, 1907.
11. James G. Woodburn, "Tests of broad-crested weirs", *Transactions*, Vol. 96, American Society of Civil Engineers, 1932, pp. 387-416.
12. M. A. Mostkow, *Handbuch der hydraulik* (*Handbook of hydraulics*), VEB Verlag Technik, Berlin, 1956, pp. 188-195.
13. L. J. Tison, "Le déversoir à seuil épais" ("The broad-crested weir"), *La Houille blanche*, 5ºaño, Nº 4, Grenoble, julio-agosto, 1950, pp. 426-439.
14. Charles Jaeger, *Engineering fluid mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956, pp. 98-112.
15. J. A. Ch. Bresse, "Cours de mécanique appliquée", 2a. parte, *Hydraulique* ("Course in applied mechanics", parte 2, *Hydraulics*), Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
16. J. V. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes" ("Essay on the theory of water flow"), *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, Paris, Vol. 23, Ser. 2, Nº 1, 1877, pp. 1-680.
17. Charles Jaeger, "Contribution a l'étude des courants liquides à surface libre" ("Contribution to the study of free-surface liquid flows"), *Revue générale de l'hydraulique*, Paris, Vol. 9, Nº 33, 1943, pp. 111-120; Nº 34, pp. 139-153.
18. Charles Jaeger, "De l'impulsion totale et de ses rapports avec l'énergie totale d'un courant liquide à surface libre" ("The total impulse and its relations with the total energy of a free-surface liquid flow"), *Revue générale de l'hydraulique*, Paris, Vol. 13, Nº 37, 1947, pp. 12-19; Nº 38, pp. 86-87; Nº 39, pp. 143-151; Nº 40, pp. 191-197; Nº 41, pp. 257-261.
19. Étienne Crausse, *Hydraulique des canaux découverts en régime permanent* (*Hydraulics of open channels with steady flow*), Éditions Eyrolles, Paris, 1951, pp. 111-112.
20. J. B. Bélanger, "Notes sur le cours d'hydraulique" ("Notes on the course in hydraulics"), *Mémoire*, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1849-1850, pp. 32-33.

CAPÍTULO 4

FLUJO CRÍTICO: SU CÁLCULO Y SUS APLICACIONES

4-1. Flujo crítico. Tal como se describió en el capítulo anterior, el estado crítico del flujo a través de una sección de canal se caracteriza por varias condiciones importantes[1]. En resumen, éstas son: 1) la energía específica es mínima para un caudal determinado; 2) el caudal es máximo para una determinada energía específica (problema 3-7); 3) la fuerza específica es mínima para un caudal determinado; 4) la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica en un canal de baja pendiente; 5) el número de Froude es igual a la unidad; y 6) la velocidad de flujo en un canal de baja pendiente con distribución uniforme de velocidades es igual a la celeridad de pequeñas ondas gravitacionales en aguas poco profundas causadas por perturbaciones locales.

Los análisis sobre el estado crítico de flujo se han referido principalmente a una sección particular de canal, conocida como *sección crítica.* Si el estado crítico del flujo existe a través de toda la longitud del canal o a lo largo de un tramo de éste, el flujo en el canal es un *flujo crítico.* Debido a que, tal como se indicó mediante la ecuación (3-10) de criterio de flujo crítico, la profundidad del flujo crítico depende de los elementos geométricos A y D de la sección de canal cuando el caudal es constante, la profundidad crítica en un canal prismático con pendiente uniforme será la misma en todas las secciones, y el flujo crítico en un canal prismático deberá ser por consiguiente flujo uniforme. Para esta condición, la pendiente del canal que mantiene un determinado caudal con una profundidad uniforme y crítica se conoce como *pendiente crítica* S_c. Una pendiente del canal menor que la pendiente crítica producirá un flujo más lento de naturaleza subcrítica para el caudal determinado, tal como se demostrará más adelante y, por consiguiente, se conoce como *pendiente suave* o *subcrítica.* Una pendiente mayor que la pendiente crítica producirá un flujo

[1] Para un resumen histórico de la teoría de flujo crítico, *véase* [1].

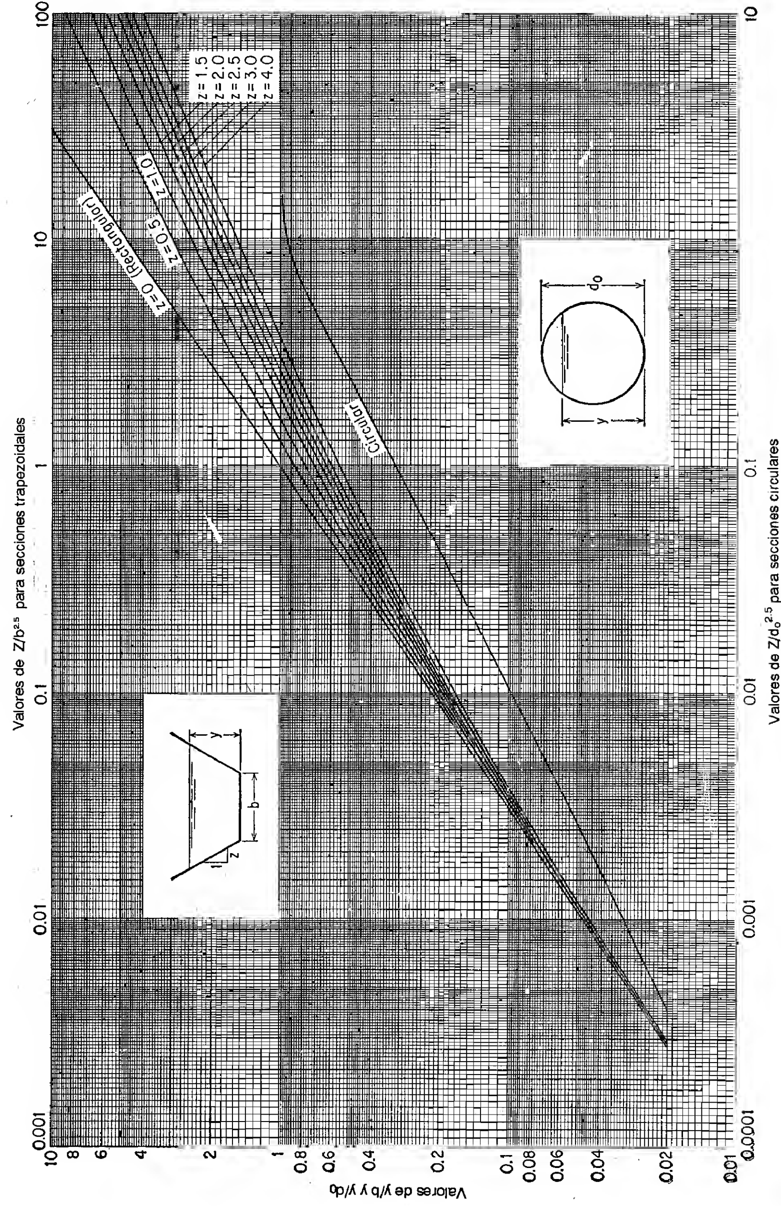


Figura 4-1. Curvas para el cálculo de la profundidad crítica

son conocidos, el caudal crítico puede calcularse mediante la ecuación (4-1) de la siguiente manera:

$$Q = Z\sqrt{g} \tag{4-3}$$

o, mediante la ecuación (4-2), como sigue:

$$Q = Z\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tag{4-4}$$

Algunas veces se utiliza un subíndice c para especificar la condición de flujo crítico. En la tabla 2-1 se dan fórmulas para el factor de sección Z de siete secciones de canales comunes. Los valores de Z para una sección circular pueden calcularse a partir de la curva dada en la figura 2-1 o a partir de la tabla del apéndice A.

Para simplificar el cálculo del flujo crítico se han preparado curvas adimensionales que muestran la relación entre la profundidad y el factor de sección Z (figura 4-1) para canales rectangulares, trapezoidales y circulares. Estas curvas por sí mismas explicativas ayudarán a determinar la profundidad y para un determinado factor de sección Z, y viceversa.

Ejemplo 4-1. Deduzca una ecuación que muestre el caudal crítico a través de una sección rectangular de un canal en términos del ancho del canal y de la altura total.

Solución. Para la sección rectangular, la tabla 2-1 da el factor de sección $Z = by^{1.5}$. En el estado crítico de flujo, la profundidad es $y = H/1.5$ (*véase* problema 3-3). Al sustituir estas expresiones en la ecuación (4-3), utilizando $g = 32.16$, y al simplificar, encontramos que el caudal crítico es

$$Q_c = 3.087bH^{1.5} \tag{4-5}$$

4-3. El exponente hidráulico para el cálculo del flujo crítico. Como el factor de sección Z es una función de la profundidad de flujo y, se supone que:

$$Z^2 = Cy^M \tag{4-6}$$

donde C es un coeficiente y M es un parámetro conocido como *exponente hidráulico para el cálculo del flujo crítico.*

En una gráfica logarítmica de la ecuación (4-6) es evidente que el exponente hidráulico M correspondiente a la profundidad y es

$$M = 2\frac{d(\ln Z)}{d(\ln y)} \tag{4-7}$$

Ahora, al tomar logaritmos a ambos lados de la ecuación (2-3), o $Z = A\sqrt{A/T}$, y al derivar con respecto al ln y,

$$\frac{d(\ln Z)}{d(\ln y)} = \frac{3}{2}\frac{T}{A}y - \frac{y}{2T}\frac{dT}{dy} \tag{4-8}$$

Al igualar los lados derechos de las ecuaciones (4-7) y (4-8) y al resolver para M,

$$M = \frac{y}{\ldots}\left(3T - \frac{A}{\ldots}\frac{dT}{\ldots}\right) \quad (4\text{-}9)$$

Ésta es una ecuación general para el exponente hidráulico M, que es una función de la sección de canal y de la profundidad de flujo. Para una sección trapezoidal, las expresiones para A y T obtenidas de la tabla 2-1 se sustituyen en la ecuación (4-9); la ecuación resultante [2] se simplifica y se convierte en

$$M = \frac{3[1 + 2z(y/b)]^2 - 2z(y/b)[1 + z(y/b)]}{[1 + 2z(y/b)][1 + z(y/b)]} \quad (4\text{-}10)^3$$

Esta ecuación indica que el valor de M para la sección trapezoidal es una función de z y y/b. Para valores de z = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0, respectivamente, se construye una familia de curvas de M *versus* y/b (figura 4-2). Estas curvas indican que el valor de M varía en un rango de 3.0 a 5.0.

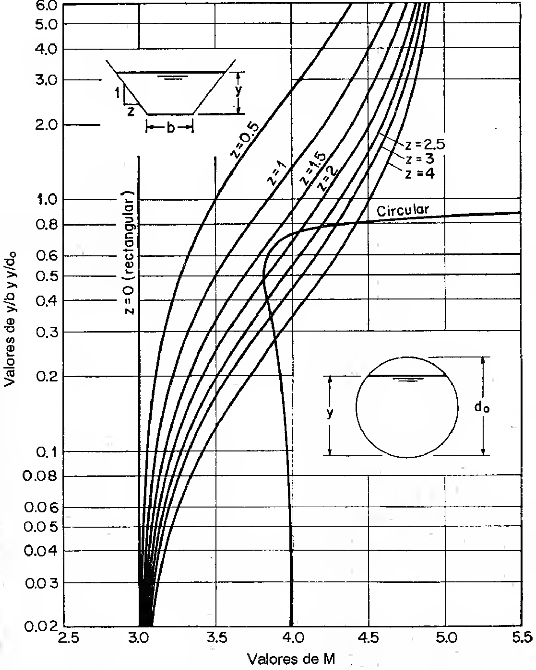


Figura 4-2. Curvas de valores de M.

[3] Esta ecuación también fue desarrollada de manera independiente por Chugaev [3]. En esta ecuación M puede suponerse como una función de $z(y/b)$; por consiguiente, puede construirse una curva única de M *versus* $z(y/b)$. Es obvio que esta curva sería idéntica a la curva para $z = 1$ en la figura 4-2. Sin embargo, por conveniencia en la aplicación, se muestra una familia de curvas de M *versus* y/b, utilizando z como un parámetro.

También se muestra (figura 4-2) una curva para una sección circular con M graficado contra y/d_o, donde d_o es el diámetro. Esta curva fue desarrollada utilizando un procedimiento similar, pero construida utilizando una fórmula mucho más complicada. La curva muestra que el valor de M varía dentro de un rango pequeño para valores de y/d_o menores que 0.7 o similares, pero se incrementa con rapidez a medida que el valor de y/d_o se vuelve mayor que 0.7. El significado de esta característica es que, cuando la profundidad de flujo en una sección circular se aproxima a la parte superior del círculo, el factor de sección y con él el caudal crítico, tal como se demuestra mediante la ecuación (4-3), crecen de manera indefinida. En otras palabras, es prácticamente imposible mantener flujo crítico en un conducto circular con profundidades que se aproximen al máximo de la sección. De hecho, la superficie ondulante del flujo crítico tocará la parte superior del conducto antes de que éste se aproxime al tope de la tubería. Una característica y un fenómeno similares también existen en otros tipos de conductos con claves que se cierran gradualmente, cuando la superficie del agua se aproxima a la clave del conducto.

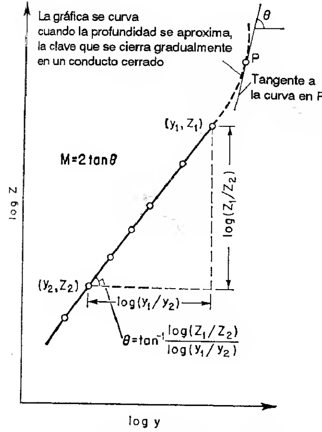


Figura 4-3. Determinación gráfica del valor de M.

Para secciones de canal diferentes de las trapezoidales o de las circulares, los valores exactos de M pueden calcularse directamente a partir de la ecuación (4-9), siempre que pueda evaluarse la derivada dT/dy. Sin embargo, valores aproximados de M para cualquier sección de canal pueden obtenerse a partir de la siguiente ecuación

$$M = 2\frac{\log(Z_1/Z_2)}{\log(y_1/y_2)} \qquad (4\text{-}11)$$

donde Z_1 y Z_2 son los factores de sección para cualquier par de profundidades y_1 y y_2 en la determinada sección. Esta ecuación se deduce con facilidad de la ecuación (4-6). Al aplicar la ecuación (4-11) se recomienda un método gráfico en lugar del cálculo directo. Éste requiere la graficación logarítmica de Z como ordenada contra la profundidad como abscisa (figura 4-3). Para la mayor parte de los canales, excepto los conductos cerrados con profundidades que se aproximan a una clave que se cierra gradualmente y para canales con formas especiales, la gráfica toma más o menos una forma de línea recta. El exponente hidráulico es igual a dos veces la pendiente de la línea recta dibujada. Para profundidades de un conducto cerrado que se aproximan a la clave que se cierra gradualmente, la gráfica se vuelve curva y el exponente hidráulico para una determinada profundidad es igual al doble de la pendiente de la tangente a la curva en esa profundidad.

El exponente hidráulico M se describe aquí sólo como un valor característico de una sección de canal bajo la condición de flujo crítico. La aplicación de este

exponente será descrita con mayor detalle en el cálculo del flujo gradualmente variado (sección 10-2).

4-4. Cálculo del flujo crítico. El cálculo del flujo crítico comprende la determinación de la profundidad crítica y la velocidad cuando se conocen el caudal y la sección de canal. A continuación se dan tres métodos ilustrados con ejemplos simples. Por otro lado, si se conocen la profundidad crítica y la sección del canal puede determinarse el caudal crítico por el método descrito en la sección 4-2.

A. Método algebraico. Para una sección geométrica simple de canal, el flujo crítico puede determinarse mediante un cálculo algebraico con las ecuaciones básicas. El método ya ha sido utilizado (ejemplo 3-1), pero el siguiente ejemplo da una mayor ilustración.

Ejemplo 4-2. Calcule la profundidad crítica y la velocidad del canal trapezoidal (figura 2-2) que conduce un caudal de 400 pie³/s.

Solución. La profundidad hidráulica y el área mojada de la sección transversal se expresan en términos de la profundidad y como

$$D = \frac{y(10+y)}{10+2y} \quad \text{y} \quad A = y(20+2y)$$

La velocidad es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{400}{y(20+2y)}$$

Al sustituir las anteriores expresiones para D y V en la ecuación (3-10), y al simplificar,

$$2{,}484(5+y) = [y(10+y)]^3$$

Al resolver esta ecuación para y utilizando un procedimiento de ensayo y error, y_c = 2.15 pies. Esta es la profundidad crítica. El área correspondiente es A_c = 52.2 pies² y la velocidad crítica es V_c = 400/52.2 = 7.66 pie/s.

B. Método gráfico. Para una sección de canal complicada o natural, por lo general se emplea un procedimiento gráfico para el cálculo del flujo crítico. Mediante este procedimiento se construye una curva de y *versus* Z. Luego se calcula el valor de $Q/\sqrt{g}$. A partir de la ecuación (4-1) se obtiene directamente la profundidad crítica de la curva, donde $Z = Q/\sqrt{g}$.

Ejemplo 4-3. Una alcantarilla de concreto de sección circular de 36 pulg conduce un caudal de 20 pies³/s. Determine la profundidad crítica.

Solución. Construya una curva de y *versus* Z (figura 4-4). Luego calcule $Z = Q/\sqrt{g} = 20/\sqrt{g}$ = 3.53. En la curva se encuentra que la profundidad crítica correspondiente a este valor de Z es y_c = 1.44 pies.

La curva adimensional (figura 2-1) o la tabla del apéndice A para los elementos geométricos de una sección circular también pueden utilizarse para resolver este problema. Como d_0 = 3.0 pies y $d_0^{2.5}$ = 15.6, $Z/d_0^{2.5}$ = 3.53/15.6 = 0.226. A partir de la curva adimensional o de la tabla, y/d_0 = 0.48, y luego y_c = 0.48 × 3 = 1.44 pies.

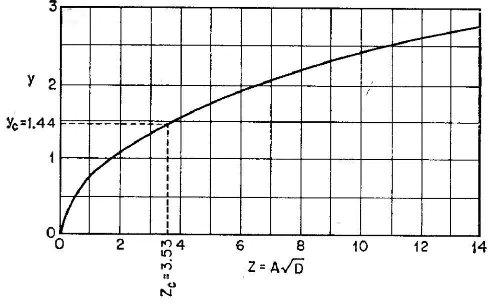


Figura 4-4. Curva de y *versus* Z para una sección circular.

C. Método del cuadro de diseño. El cuadro de diseño para determinar la profundidad crítica (figura 4-1) puede utilizarse con gran rapidez.

En el ejemplo 4-2, $Z = 400/\sqrt{g} = 70.5$ [ecuación (4-1)]. El valor de $Z/b^{2.5}$ es 0.0394. Para este valor, el cuadro da $y/b = 0.108$ o $y_c = 2.16$ pies.

En el ejemplo 4-3, $Z/d_0^{2.5} = 0.226$. Para este valor el cuadro da $y/d = 0.48$ o $y_c = 1.44$ pies.

4-5. Control de flujo. El control de flujo en un canal abierto se define de muchas maneras. Tal como se utiliza aquí, el término significa el establecimiento de una condición definitiva de flujo en un canal o, más específicamente, una relación definitiva entre el nivel y el caudal del flujo. Cuando el control de flujo se alcanza en una cierta sección de canal, esta sección es una *sección de control.* Más adelante se demostrará que la sección de control regula el flujo de tal modo que restringe la transmisión de efectos de cambios en la condición del flujo, ya sea en una dirección hacia aguas arriba o en una dirección hacia aguas abajo, según el estado de flujo en el canal. Como la sección de control mantiene una relación nivel-caudal definitiva, siempre es un lugar adecuado para una estación de aforo y para el desarrollo de una *curva de calibración de caudales*, la cual es una curva que representa la relación profundidad-caudal en la estación de aforo.

En el estado crítico de flujo puede establecerse una relación definitiva nivel-caudal, y representarla mediante la ecuación (4-1). Esta ecuación muestra que la relación nivel-caudal es teóricamente independiente de la rugosidad del canal y de otras circunstancias no controladas. Por consiguiente, una sección de flujo crítico es una sección de control.

La localización de la sección de control en un canal prismático por lo general está gobernada por el estado de flujo, el cual a su vez se determina mediante la pendiente del canal. Tómese como ejemplo un canal prismático recto largo en el cual se crea un embalse mediante una presa a través del canal y el agua fluye por encima de la presa a través de un vertedero de rebose (figura 4-5). Se muestran tres condiciones de flujo en el canal, que representan los flujos subcrítico, crítico y supercrítico, respectivamente. Las pendientes del canal en los tres casos son, *suave* o subcrítica, crítica y *empinada* o supercrítica, de manera equivalente.

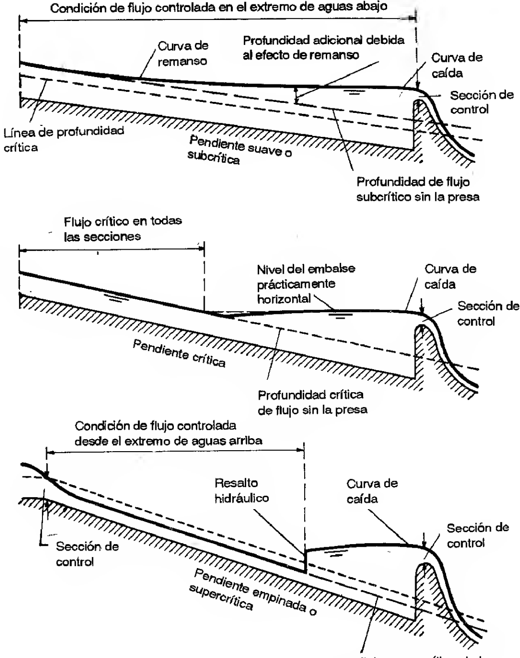


Figura 4-5. Condiciones de flujo en un canal prismático largo.

Si el canal tiene una pendiente crítica (esquema intermedio de la figura 4-5), entonces en principio el flujo es uniforme y crítico a través del canal. Sin embargo, debido a la presencia de la presa, el flujo a través del embalse será subcrítico y la superficie del embalse será casi horizontal. En el extremo de aguas abajo se desarrollará una *curva de caída,* que se extiende aguas arriba desde una sección cercana a la cresta del vertedero y se vuelve asintótica al nivel del embalse.

Si el canal tiene una pendiente subcrítica (esquema superior de la figura 4-5), en principio el flujo es subcrítico. Debido a la presencia de la presa, el nivel del embalse se extenderá aguas arriba a lo largo de una gran distancia formando una curva conocida como *curva de remanso.* La profundidad de agua adicional se requiere para obtener la altura suficiente con el fin de alcanzar el incremento de velocidad necesario para pasar el agua por encima del vertedero. Este efecto de represar el agua por detrás de la presa se conoce como *efecto de remanso.* En el extremo de aguas abajo la curva de remanso se conecta con una curva de caída suave, que lleva el agua por encima del vertedero.

Si el canal tiene una pendiente supercrítica (esquema inferior de la figura 4-5), en principio el flujo es supercrítico. Debido a la presencia de la presa, el efecto de

remanso originado en el embalse no se extiende muy lejos aguas arriba. Por el contrario, el flujo en el canal de aguas arriba continuará en la dirección de aguas abajo en estado supercrítico, hasta que el perfil de la superficie de flujo se encuentre por debajo del nivel del embalse[4]; luego aumentará abruptamente hasta la elevación del embalse a través de un resalto hidráulico. El efecto de remanso no se extenderá aguas arriba a través del resalto hidráulico. El flujo aguas arriba del resalto está completamente gobernado por las condiciones de aguas arriba.

Los ejemplos anteriores explican la importancia del hecho de que en pendientes subcríticas el efecto de cambio en la elevación de la superficie del agua del lado de aguas abajo se transmite aguas arriba a través de una curva de remanso, en tanto que en pendientes supercríticas no puede transmitirse lejos aguas arriba. La condición de flujo en un canal subcrítico se afecta por las condiciones de aguas abajo; pero, en un canal supercrítico o en el lugar donde el agua entra al canal, la condición de flujo depende por completo de las condiciones aguas arriba. En consecuencia, se dice que el control de flujo se localiza en el extremo de aguas abajo para canales con pendientes subcríticas, y en el extremo de aguas arriba para canales con pendientes supercríticas.

Cuando el canal tiene una pendiente subcrítica, una sección de control en el extremo de aguas abajo puede ser una sección crítica, como la creada en la parte superior de un vertedero de rebose. En una pendiente supercrítica, la sección de control en el extremo de aguas arriba también puede ser una sección crítica, tal como se muestra en la figura. Una compuerta deslizante, o un orificio o cualquier otra estructura de control también pueden utilizarse para crear una sección de control. Nótese que si la pendiente del canal es crítica, subcrítica o supercrítica, dependerá no sólo de la medida de la pendiente real, sino también del caudal o en la profundidad de flujo.

4-6. Medición del flujo. En la sección anterior se mencionó que, en una sección crítica de control, la relación entre la profundidad y el caudal es definitiva, independiente de la rugosidad del canal y de otras circunstancias no controlables. Tal relación nivel-caudal definitiva da una base teórica para la medición del caudal en canales abiertos.

Con base en el principio del flujo crítico, se han desarrollado varias estructuras para la medición del flujo. En tales estructuras, a menudo la profundidad crítica se crea mediante la construcción de una pequeña elevación en el fondo del canal, tal como un vertedero, o mediante una contracción en la sección transversal, tal como en una *canaleta de flujo crítico.* El uso de un vertedero es un método simple, pero causa unas pérdidas de altura relativamente altas. Si el agua contiene partículas en suspensión, algunas se depositarán en el embalse de aguas arriba formado por el vertedero, dando como resultado un cambio gradual en el coeficiente de descarga. Sin embargo, estas dificultades pueden resolverse, al menos parcialmente, mediante el uso de una canaleta de flujo crítico.

[4] Nótese que el nivel del embalse en este caso no es horizontal sino curvado. La superficie curvada del agua tiene un perfil S1, el cual será descrito más adelante (sección 9-4).

La canaleta de flujo crítico, también conocida como *canaleta Venturi*, ha sido diseñada de varias formas[5]. Por lo general se opera con una condición no sumergida o de flujo libre, que tiene la profundidad crítica en la sección contraída y un resalto hidráulico en la sección de salida. Bajo ciertas condiciones de flujo, sin embargo, el resalto puede sumergirse.

Una de las canaletas de flujo crítico utilizadas con mayor amplitud es la ***canaleta Parshall***[6] (figura 4-6), la cual fue desarrollada en 1920 por R. L. Parshall. Las relaciones profundidad-caudal para canaletas Parshall de diferentes tamaños, tal como se calibraron empíricamente, se representan mediante las siguientes ecuaciones:

Ancho de garganta	*Ecuación*	
3″	$Q = 0.992H_a^{1.547}$	(4-12)
6″	$Q = 2.06H_a^{1.58}$	(4-13)
9″	$Q = 3.07H_a^{1.53}$	(4-14)
12″ a 8′	$Q = 4WH_a^{1.522W^{0.026}}$	(4-15)
10′ a 50′	$Q = (3.6875W + 2.5)H_a^{1.6}$	(4-16)

En las ecuaciones anteriores Q es el caudal libre en pies^3/s, W es el ancho de la garganta en pies y H_a es la lectura de la mira de aforo en pies. Cuando la relación de las lecturas de aforo H_b (figura 4-6) y H_a excede el límite de 0.6 para canaletas de 3, 6 y 9 pulg, respectivamente, de 0.7 para canaletas de 1 a 8 pies y de 0.8 para canaletas de 10 a 50 pies, el flujo se vuelve sumergido. El efecto de la sumergencia es de reducir el caudal. En este caso, el caudal calculado mediante las ecuaciones anteriores debe corregirse mediante una cantidad negativa. Los diagramas mostrados en la figura 4-7 dan las correcciones por sumergencia para canaletas Parshall de diferentes tamaños. La corrección para la canaleta de 1 pie se hace aplicable a canaletas mayores multiplicando la corrección de la canaleta de 1 pie por el factor dado a continuación, de acuerdo con el tamaño particular de la canaleta que se utilice.

Tamaño de la canaleta W, pies	*Factor de corrección*
1	1.0
1.5	1.4
2	1.8
3	2.4
4	3.1
6	4.3
8	5.4

[5] Las canaletas de flujo crítico mencionadas en el texto son aquéllas desarrolladas y estudiadas en los Estado Unidos. Diseños destacados de canaletas de flujo crítico también fueron desarrollados y probados por Jameson [4, 5], Engel [6, 7] y Linford [8] en Inglaterra; por Crump [9] e Inglis [10], en la India; por De Marchi [11, 12], Contessini [11], Nebbia [13-15] y Citrini [16, 17], en Italia; por Khafagi [18], en Suiza; y por Balloffet [19], en Argentina.

[6] Experimentos en este tipo de estructuras, entonces llamadas *canaletas Venturi*, fueron iniciados por V. M. Cone en el laboratorio de hidráulica de la Colorado Agricultural Experiment Station, Fort Collins, Colorado. Los estudios iniciales fueron reportados en [20] y [21]. El nombre "canaleta de medición Parshall" fue adoptado para la estructura por el Executive Committee of the Irrigation Division, American Society of Civil Engineers, durante su reunión de diciembre de 1929. Desarrollos adicionales sobre la canaleta Parshall fueron descritos por R. L. Parshall en [22] a [26].

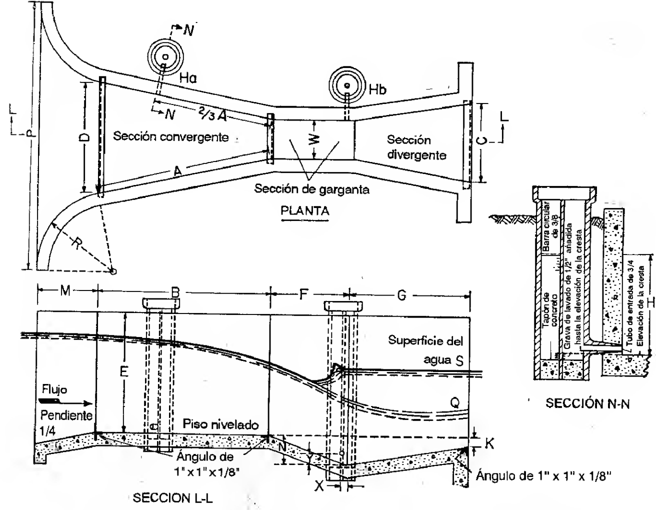


Figura 4-6. Planta, elevación y dimensiones de una canaleta Parshall, (*U. S. Soil Conservation Service* [26]). Planta y elevación de una canaleta Parshall de medición en concreto, que muestra las siguientes dimensiones demarcadas:

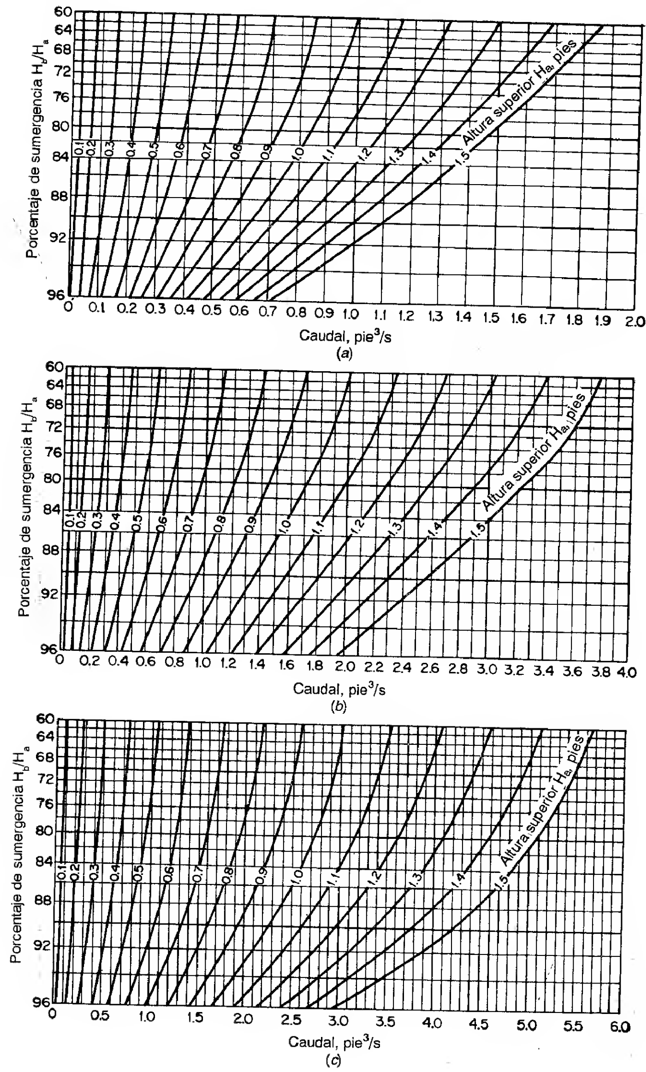
W = tamaño de la canaleta en pulg o pies; A = longitud de la pared lateral de la sección convergente; 2/3 A = distancia desde el final de la cresta hasta el punto de medición; B = longitud axial de la sección convergente; C = ancho del extremo de aguas abajo de la canaleta; D = ancho del extremo de aguas arriba de la canaleta; E = profundidad de la canaleta; F = longitud de la garganta; G = longitud de la sección divergente; K = diferencia de nivel entre el punto más bajo de la canaleta y la cresta; M = longitud del fondo de aproximación; N = profundidad de la depresión en la garganta debajo de la cresta; P = ancho entre los extremos de las paredes curvadas; R = radio de curvatura de las paredes curvas; X = distancia horizontal desde el punto más bajo de la garganta hasta el punto de medición H_b; Y = distancia vertical desde el punto más bajo de la garganta hasta el punto de medición H_b. *Véase* la tabla de la siguiente página para obtener las dimensiones reales para varios tamaños de canaletas.

De manera similar, la corrección para la canaleta de 10 pies se hace aplicable a canaletas mayores multiplicando la corrección para la canaleta de 10 pies por el factor dado abajo para la canaleta particular que esté utilizándose.

Tamaño de la canaleta pies W	*Factor de corrección*
10	1.0
12	1.2
15	1.5
20	2.0
25	2.5
30	3.0
40	4.0
50	5.0

Dimensiones y capacidades de las canaletas de medición. Parshall, para varios anchos de garganta, *W*
[Las dimensiones correspondientes a cada letra se muestran en la figura 4-6]

W	*A*	⅔*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*K*	*N*	*R*	*M*	*P*	*X*	*Y*	Capacidad a flujo libre Min	Max
Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg	Pie Pulg.	Pulg.	Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pie Pulg.	Pulg.	Pulg.	Pie³/s	Pie³/s
0 3	1 6⅜	1 ¼	1 6	0 7	0 10³⁄₁₆	2 0	0 6	1 0	1	2¼	1 4	1 0	2 6¼	1	1½	0.03	1.9
0 6	2 ⁷⁄₁₆	1 4⁵⁄₁₆	2 0	1 3½	1 3⅝	2 0	1 0	2 0	3	4½	1 4	1 0	2 11½	2	3	.05	3.9
0 9	2 10⅝	1 11⅛	2 10	1 3	1 10⅝	2 6	1 0	1 6	3	4½	1 4	1 0	3 6½	2	3	.09	8.9
1 0	4 6	3 0	4 4⅞	2 0	2 9¼	3 0	2 0	3 0	3	9	1 8	1 3	4 10¾	2	3	.11	16.1
1 6	4 9	3 2	4 7⅞	2 6	3 4⅜	3 0	2 0	3 0	3	9	1 8	1 3	5 6	2	3	.15	24.6
2 0	5 0	3 4	4 10⅞	3 0	3 11½	3 0	2 0	3 0	3	9	1 8	1 3	6 1	2	3	.42	33.1
3 0	5 6	3 8	5 4¾	4 0	5 1⅞	3 0	2 0	3 0	3	9	1 8	1 3	7 3½	2	3	.61	50.4
4 0	6 0	4 0	5 10⅝	5 0	6 4¼	3 0	2 0	3 0	3	9	2 0	1 6	8 10¾	2	3	1.3	67.9
5 0	6 6	4 4	6 4½	6 0	7 6⅝	3 0	2 0	3 0	3	9	2 0	1 6	10 1¼	2	3	1.6	85.6
6 0	7 0	4 8	6 10⅜	7 0	8 9	3 0	2 0	3 0	3	9	2 0	1 6	11 3½	2	3	2.6	103.5
7 0	7 6	5 0	7 4¼	8 0	9 11⅜	3 0	2 0	3 0	3	9	2 0	1 6	12 6	2	3	3.0	121.4
8 0	8 0	5 4	7 10⅛	9 0	11 1¾	3 0	2 0	3 0	3	9	2 0	1 6	13 8¼	2	3	3.5	139.5



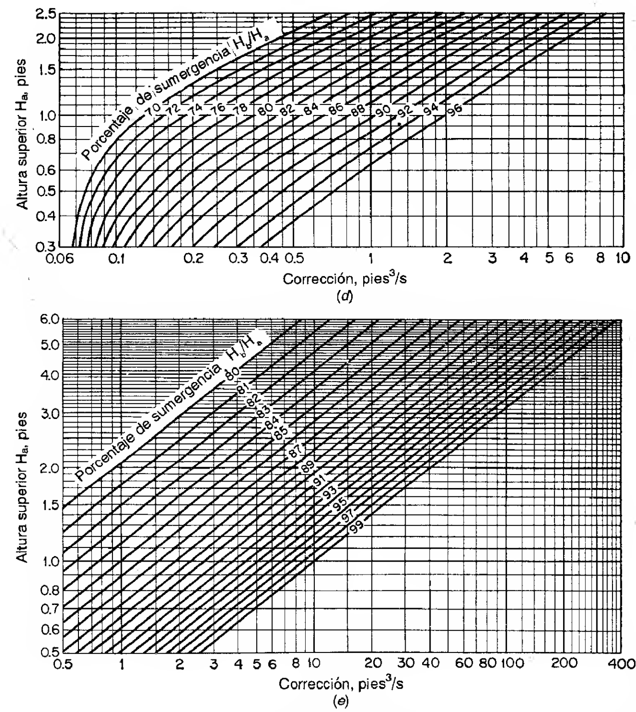
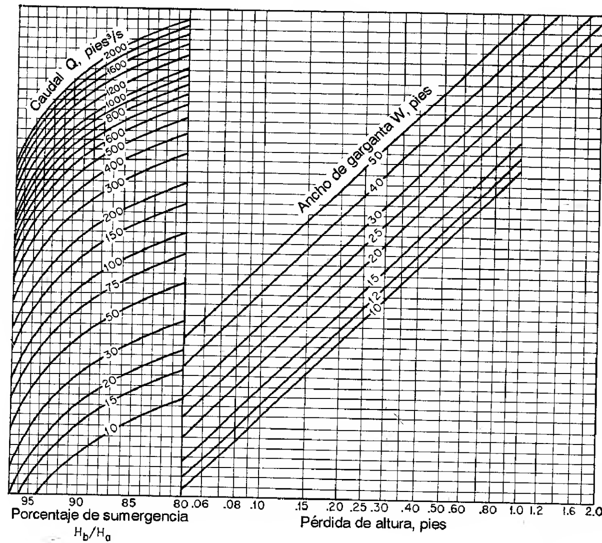


Figura 4-7. Diagramas para el cálculo de flujo sumergido a través de canaletas Parshall de diferentes tamaños (*Colorado Agricultural Experiment Station* [2.5] *y U. S. Soil Conservation Service* [26]. (*a*) Diagrama que muestra la tasa de flujo sumergido, en pies cúbicos por segundo, a través de una canaleta de medición Parshall de 3 pulg. (*b*) Diagrama que muestra la tasa de flujo sumergido, en pies cúbicos por segundo, a través de una canaleta de medición Parshall de 6 pulg. (*c*) Diagrama que muestra la tasa de flujo sumergido, en pies cúbicos por segundo, a través de una canaleta de medición Parshall de 9 pulg. (*d*) Diagrama para el cálculo de la tasa de flujo sumergido, en pies cúbicos por segundo, a través de una canaleta de medición Parshall de 1 pie. (*e*) Diagrama para determinar la corrección en pies cúbicos por segundo por cada 10 pies de cresta para caudal a flujo sumergido.

Es conveniente fijar la cresta de la canaleta Parshall de tal manera que ocurra flujo libre. Si las condiciones no permiten una operación de flujo libre, el porcentaje de sumergencia H_b/H_a debe mantenerse, siempre que sea posible, por debajo del límite práctico de alrededor del 95%, debido a que la canaleta no medirá de manera confiable si la sumergencia es mayor. El tamaño y la elevación de la cresta dependen del caudal que vaya a medirse y del tamaño de la canaleta y, en consecuencia, de las pérdidas de altura a través de la canaleta. Las pérdidas de altura pueden determinarse a partir de los diagramas de la figura 4-8. Más adelante se dará un ejemplo práctico (ejemplo 4-5) para mostrar la determinación del tamaño y de la elevación de la cresta de la canaleta.



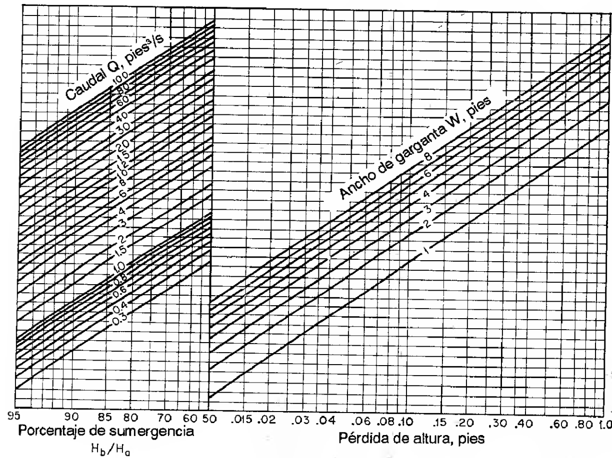


Figura 4-8. Diagramas para determinar la pérdida de altura a través de canaletas Parshall de diferentes tamaños (*Colorado Agricultural Experiment Station* [2.5] *y U. S. Soil Conservation Service* [26]).

Debido a la contracción en la garganta, la velocidad del agua que fluye a través de la canaleta es mayor que la del flujo en el canal. Por esta razón, cualquier partícula de arena o limo en suspensión o por arrastre a lo largo del fondo puede ser arrastrada, dejando la canaleta libre de depósitos. Sin embargo, cuando existe una carga pesada de materiales de erosión en la corriente, la canaleta se volverá inútil al igual que un vertedero, debido a que la sedimentación producirá resultados no confiables. Para ser utilizada en tales circunstancias, se ha desarrollado una canaleta Parshall conocida como ***canaleta San Dimas*** [27, 28], la cual tiene la ventaja de un mecanismo autolimpiante para flujos altamente cargados de basuras en la corriente.

Se han propuesto diseños especiales de canaletas de flujo crítico para la medición de flujo en canales abiertos en conductos cerrados, como alcantarillas y canales de irrigación cubiertos. Palmer y Bowlus [29, 31] han desarrollado algunas de estas canaletas incluyendo una que es simplemente una loza plana en el fondo y que no tiene contracciones laterales, una con sección transversal rectangular y varias con gargantas de forma trapezoidal. Stevens [32] recomendó una canaleta de flujo crítico en la cual se utilizó una "joroba" de control en forma de ampolla sobre el lecho del conducto para producir flujo crítico sobre ella. Las pérdidas por fricción en este diseño se consideran muy pequeñas.

Como muchas estructuras de medición, la canaleta de flujo crítico tiene ciertas desventajas. La canaleta no puede utilizarse directamente o combinada con una compuerta aguas arriba. Es más costosa de construir y requiere una mano de obra más precisa en su construcción que otras estructuras de uso común, como vertederos u orificios sumergidos. Información técnica sobre otras clases de estructuras de medición en canales abiertos y sus métodos puede encontrarse con facilidad en muchos libros y manuales de hidráulica (como [33] a [35]).

Muchas alcantarillas a lo largo de carreteras modernas pueden utilizarse como canaletas de flujo crítico para medir la escorrentía de tierras agrícolas adyacentes. Esta idea fue sugerida por primera vez por Mavis [36] y otros, y fue estudiada después en la Oklahoma Agricultural Experiment Station [37, 38] llevando a cabo pruebas experimentales extensas en alcantarillas rectangulares de carretera. Los resultados de este estudio experimental indican que la alcantarilla puede utilizarse como un aparato de medición de tasa de flujo si fluye parcialmente llena y si tiene una caída libre a la salida. Sin embargo, debe instalarse un vertedero para mejorar la precisión en el rango de flujos bajos. En esta investigación, se desarrolló un umbral vertedero estándar tipo Villemonte[7] y se determinó su localización en el fondo de la alcantarilla. También se determinaron las relaciones altura-caudal para varios rangos de flujo.

Ejemplo 4-4. A partir de la teoría de flujo crítico, deduzca una ecuación para el caudal a través de un vertedero de cresta ancha.

Solución. Considere la sección del vertedero de cresta ancha donde ocurre el flujo crítico. En esta sección $y_c = 2(V_c 2/2g) = H_c/1.5$ o $V_c = \sqrt{gH_c/1.5}$, donde H_c es la altura de energía específica en la sección. El caudal por pie de ancho del vertedero es, por consiguiente, igual a

$$q = V_c y_c = \tfrac{2}{3} H_c \sqrt{\tfrac{2}{3} g H_c} = 3.09 H_c^{1.5} \qquad (4\text{-}17)$$

[7] El umbral vertedero Villemonte consta de 2 bloques triangulares afilados convergentes localizados en el fondo de la alcantarilla con una apertura entre ellos [39].

Ésta es una ecuación teórica de caudal en la cual H_c es incierta debido a que la sección crítica a menudo es difícil de localizar. Sin embargo, para propósitos prácticos, la ecuación por lo general se escribe como $q = CH^{1.5}$, donde H es la elevación de la superficie del agua del lado de aguas arriba por encima de la cresta del vertedero. Ésta es la forma descrita anteriormente (ejemplo 3-2).

Si existe una caída libre aireada en el extremo de aguas abajo del vertedero, la ecuación anterior puede expresarse en términos de la profundidad de borde y_o, la cual puede medirse con facilidad. Como $y_c = 1.4y_o$ (sección 3-4), la ecuación requerida es

$$q = 9.39y_0^{1.5} \tag{4-18}$$

Los experimentos han demostrado que cuando la altura en el vertedero de cresta ancha es mayor que alrededor de 1.5 veces la longitud de la cresta, la lámina de agua de la caída libre se separa de la pared y el vertedero actúa como un vertedero de cresta delgada.

Ejemplo 4-5. Diseñe una canaleta Parshall para manejar 20 pies³/s de flujo en un canal de pendiente moderada cuando la profundidad de flujo en éste es 2.5 pies[8].

Solución. El caudal dado puede medirse utilizando canaletas de diferentes tamaños, pero la mejor selección es la canaleta de tamaño más práctico y económico.

Suponga $W = 4$ pies y $H_b/H_a = 0.7$. Para $Q = 20$ pies³/s, la ecuación (4-15) da $H_a = 1.15$ pies. Luego, $H_b = 0.81$ pies.

Con una sumergencia del 70%, la superficie de agua en la garganta, en el punto de medida de H_b, está al mismo nivel de la superficie de aguas abajo. Bajo esta condición de flujo, que se ilustra en la figura 4-9, la profundidad de aguas abajo es $D = 2.5$ pies y la elevación de la cresta por encima del fondo del canal $X = 2.5 - 0.81 = 1.69$ pies.

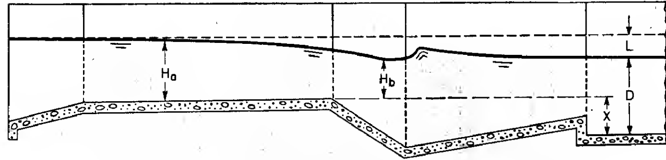


Figura 4-9. Sección de una canaleta Parshall para ilustrar el cálculo de la elevación de cresta apropiada [26].

A partir de la figura 4-8, la pérdida de altura correspondiente a $H_b/H_a = 0.7$, $Q = 20$ pies³/s y $W = 4$ pies es 0.43 pies. Por consiguiente, la profundidad del agua del lado de aguas arriba de la canaleta será 2.50 + 0.43 = 2.93 pies.

De manera similar, ensaye las canaletas de 2 pies y 3 pies. Nótese que las respectivas elevaciones de cresta son 1.53 pies y 1.23 pies y que las profundidades respectivas del agua del lado de aguas arriba son 2.98 pies y 3.12 pies.

Para decidir el tamaño de la canaleta más práctico para ser utilizado será necesario examinar el borde libre del canal y el efecto de aumento en la superficie del agua sobre el flujo a través de la compuerta aguas arriba. Si estas condiciones son satisfactorias, la canaleta de 2 pies será la más económica debido a que sus dimensiones son más pequeñas. Sin embargo, cuando se considera el ancho del canal, la selección final puede favorecer las canaletas de 3 pies o 4 pies, debido a que una canaleta más pequeña requeriría unos muros-aletas de aproximación con una longitud entre moderada y larga. A menudo, el ancho de la garganta de la canaleta variará entre un tercio y un medio del ancho del canal.

[8] Este ejemplo se adoptó de [26].

PROBLEMAS

4-1. Demuestre las siguientes ecuaciones de caudal crítico para las secciones triangular, trapezoidal y circular:

Sección del canal	*Ecuación*	
Triangular	$Q_c = 2.295zH_c^{2.5}$	(4-19)
Trapezoidal	$Q_c = \dfrac{5.671[(b+zy)y]^{1.5}}{(b+2zy)^{0.5}}$	(4-20)
Circular	$Q_c = \dfrac{0.251(\theta - \text{sen}\ \theta)^{1.5}}{(\text{sen}\ \frac{1}{2}\theta)^{0.5}} d_0^{2.5}$	(4-21)
Parabólica	$Q_c = 2.005TH_c^{1.5}$	(4-22)

En las ecuaciones anteriores, $\alpha = 1$ y H_c es la altura energía específica; la otra notación sigue la de la tabla 2-1.

4-2. Calcule el exponente hidráulico M para la sección de canal trapezoidal (figura 2-2) que tiene una profundidad de flujo de 6 pies, a partir de *a*) la ecuación (4-10), *b*) la figura 4-2, y *c*) el método gráfico basado en la ecuación (4-11).

4-3. Calcule el exponente hidráulico M de un conducto circular de 36 pulg que tiene una profundidad de flujo de 24 pulg, por encima de la cota de batea, a partir de *a*) la figura 4-2, y *b*) el método gráfico basado en la ecuación (4-11).

4-4. Demuestre que la profundidad y velocidad críticas para un canal rectangular se expresan por

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \tag{4-23}$$

y

$$V_c = \sqrt{\frac{gy_c}{\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{Qg}{\alpha b}} \tag{4-24}$$

donde Q es el caudal, b es el ancho del canal y α es el coeficiente de energía.

4-5. Un canal rectangular de 20 pies de ancho conduce un caudal de 200 pies³/s. Calcule la profundidad y la velocidad críticas.

4-6. Resuelva el ejemplo 4-2 utilizando varios métodos, si el caudal es 300 pies³/s.

4-7. Resuelva el ejemplo 4-3 utizando varios métodos, si el caudal es 15 pies³/s.

4-8. Una fórmula aproximada pero práctica para el cálculo de la profundidad crítica en una sección circular de diámetro d_o, deducida por Braine [40] a partir de una ecuación equivalente a la ecuación (4-21), es

$$y_c = 0.325\left(\frac{Q}{d_0}\right)^{2/3} + 0.083d_0 \tag{4-25}$$

la cual sólo es exacta cuando $0.3\, y_c/d_o$ - . Resuelva el ejemplo 4-3 y el problema 4-7 utilizando esta fórmula.

4-9. Con referencia al canal natural dado en el problema 2-5, construya una curva de profundidad crítica contra caudal, con un rango de 0 a 400 pies³/s.

4-10. Demuestre que la sección de un canal en la cual el flujo es crítico para cualquier nivel toma la forma expresada por

$$x^2y^3 = \frac{Q^2}{32g} \tag{4-26}$$

donde x es la mitad del ancho superficial y y es la distancia de la superficie del agua por debajo de la línea de energía. Dibuje un esquema de la sección y describa sus propiedades. ¿Es posible este canal? Si no, ¿cómo podría hacerse posible? ¿Es práctico este canal y es estable el flujo?

4-11. Verifique los cálculos de las canaletas Parshall de 2 pies y 3 pies tratadas en el ejemplo 4-5.

4-12. Determine el caudal a través de la canaleta Parshall de 4 pies descrita en el ejemplo 4-5 si el porcentaje desumergencia es del 80%.

4-13. Determine el caudal medido mediante una canaleta Parshall de 10 pies si la lectura de medida H_a es 3.41 pies para una condición de flujo libre.

4-14. Diseñe una canaleta Parshall para medir un flujo de 10 pies³/s en un canal que tiene una profundidad de flujo igual a 1.5 pies.

4-15. Un flujo de 300 pies³/s ocurre a una profundidad de 5 pies en un canal rectangular largo de 10 pies de ancho. Calcule la altura mínima de un escalón plano que puede construirse en el fondo del canal, con el fin de producir una profundidad crítica. ¿Cuál será el resultado si el escalón es mayor o menor que la altura mínima calculada?

4-16. Si la profundidad crítica en el problema anterior se produce mediante una contracción en el canal, ¿cual será el máximo ancho contraído?

4-17. Una presa baja de 5 pies de altura que tiene una cresta horizontal se construye en un canal rectangular de 20 pies de ancho. Suponga que una profundidad de 2.5 pies medida en la cresta es la profundidad crítica, y calcule el caudal y la profundidad de flujo aguas arriba de la presa.

4-18. Con base en la teoría de flujo crítico, Stevens [32] dedujo las curvas de calibración para la canaleta de flujo crítico con forma de ampolla que propuso para ser utilizada en conductos circulares (figura 4-10). En la deducción, se supone 1) que no existe pérdida de energía desde y_1 hasta y_c, 2) que la velocidad de aproximación en el tubo es igual al caudal dividido por el área mojada correspondiente a la altura de energía en lugar del área real correspondiente y_1, y 3) que la sección de flujo crítico se localiza en la altura máxima de la "joroba" de control. La segunda suposición elimina un procedimiento de ensayo y error en la determinación de la altura de velocidad del flujo de aproximación y, por consiguiente, tiende a compensar el error implícito en la primera suposición. Verifique cualquiera de las curvas de calibración.

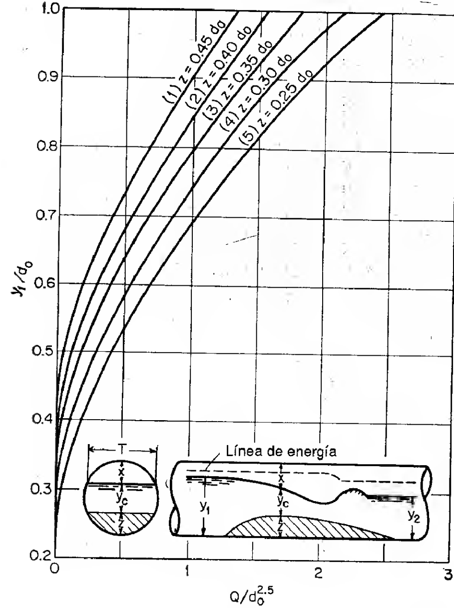


Figura 4-10. Curvas de calibración de una canaleta de flujo crítico propuesta para un conducto cerrado (*según J. C. Stevens* [32]. d_o = diámetro del conducto.

REFERENCIAS

1. Charles Jaeger, *Engineering fluid mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956, pp. 93-119.
2. Ven Te Chow, "Integrating the equations of gradually varied flow", artículo 833, *Proceedings*, Vol. 81, *American Society of Civil Engineers*, noviembre, 1955, pp. 1-32.
3. R. R. Chugaev, "Nekotorye voprosy neravonomernogo dvizheniia vody v otkrytykh prizmaticheskikh ruslakh" ("About some questions concerning non'uniform flow of water in open prismatic channels"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 1, Leningrad, 1931, pp. 157-289.
4. A. H. Jameson, "The Venturi flume and the effect of contractions in open channels", *Transactions*, Vol. 30, Institution of Water Engineers, junio 30 de 1925, pp. 19-24.
5. A. H. Jameson, "The development of the Venturi flume", *Water and Water Engineering*, Vol. 32, Nº 375, London, marzo 20, 1930, pp. 105-107.
6. F. V. A. Engel, "Non-uniform flow of water: problems and phenomena in open channels with side contractions", *The Engineer*, Vol. 155, 1933, abril 21, pp. 392-394; abril 28, pp. 429-430; mayo 5, pp. 456-457.
7. F. V. A. Engel, "The Venturi flume", *The Engineer*, Vol. 158, 1934, agosto 3, pp. 104-107; agosto 10, pp. 131-133.
8. A. Linford, "Venturi flume flow meter", *Civil Engineering and Public Works Review*, Vol. 36, Nº 424, London, octubre de 1941, pp. 582-587. Un resumen se ofrece en *Journal*, Vol. 34, *American Water Works Association*, septiembre de 1942, pp. 1473-1475.
9. E. S. Crump, "Moduling of irrigation channels", *Punjab Irrigation Branch Publications*, artículos Nº 26 y 30A, Lahore, India, 1922 y 1933.
10. C. C. Inglis, "Notes on standing wave flumes and flume meter baffle falls", *Public Works Department, Government of Bombay, Technical Papers*, Nº 15, India, 1928.
11. Giulio De Marchi (autor, partes I y III) y Francesco Contessini (autor, parte II), "Dispositivi per la misura della portata dei canali con minime perdite di quota: nuove ricerche sperimentali sui misuratori a risalto idraulico (canali Venturi)"; Parte I, "Esame del processo idraulico"; Parte II, "Descrizione delle esperienze"; Parte III, "Risultati delle esperienze". "Devices for measuring discharge in canals with minimum loss of level: new experimental researches on standing wave flumes (Venturi flumes)"; Parte I, "Analysis of the hydraulic process"; Parte II, "Description of the experiments"; y Parte III, "Results of the experiments", *L'Energia elettrica*, Vol. 13, Nº 1, Milano, enero de 1936, pp. 6-15; Vol. 13, Nº 5, mayo de 1936, pp. 236-244; Vol. 14, Nº 3, marzo de 1937, pp. 189-214. Reimpreso como *Memorie e studi*, Nos. 17, 25 y 26, *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Milano, 1936-1937.
12. Giulio De Marchi, "Nouvelles recherches expérimentales sur le jaugeur à ressaut hydraulique, canal Venturi" ("New experimental researches on standing-wave flume, Venturi flume"), Ministry of Agriculture, Paris, France, 1937. Esto es un resumen de la parte I de [11].
13. Guido Nebbia, "Venturimetri per canali a sezioni di forma generica" ("Venturi meter for canals with cross sections of general forms"), *Acqua e gas*, Vol. 25, Nº 11, noviembre de 1936, pp. 270-291.
14. Guido Nebbia, "Venturimetri per canali a sezioni di tipo monomio" ("Venturi meter for canals with cross sections of monomial type"), *Acqua e gas*, Vol. 25, Nº 12, diciembre, 1936, pp. 326-333.
15. Guido Nebbia, "Venturimetri per canali a sezione di forma generica: primi risultati sperimentali" ("Venturi meter for canals with cross sections of general forms: preliminary experimental results"), *Acqua e gas*, Vol. 27, Nº 5, mayo de 1938, pp. 155-181; Vol. 27, Nº 6, junio de 1938, pp. 199-214.
16. Duilio Citrini, "Misuratori a risalto" ("Standing-wave flumes"), *L'Energia elettrica*, Vol. 16, Nº 10, Milano, octubre de 1939, pp. 758-763. Reimpreso como *Memorie e studi*, No. 35, Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, 1939.

17. Duilio Citrini, "Modellatori a risalto: guida al progetto" ("Standing-wave meters: directions for design"), "Centro studi per le applicazioni dell'ingegneria all'agricoltura", artículo separado Nº 5, *Sindacato ingegneri di Milano*, Milán, 1941. Reimpreso como *Memorie e studi* Nº 44, Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, 1941.
18. Anwar Khafagi, "Der Venturikanal: Theorie und Anwendung" ("The Venturi flume: theory and application"), *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau*, Nº 1, *Eidgenössische technische Hochschule Zürich*, Zürich, 1942.
19. Armando Balloffet, "Critical flow meters" ("Venturi flumes"), artículo 743, *Proceedings*, Vol. 81, *American Society of Civil Engineers*, julio de 1955, pp. 1-31.
20. V. M. Cone, "The Venturi flume", *Journal of Agricultural Research*, Vol. 9, Nº 4, abril 23 de 1917, pp. 115-129.
21. Ralph L. Parshall y Carl Rohwer, "The Venturi flume", *Colorado Agricultural Experiment Station Bulletin* Nº 265, febrero, 1921.
22. R. L. Parshall, "The improved Venturi flume", *Transactions*, Vol. 89, American Society of Civil Engineers, 1926, pp. 841-851.
23. R. L. Parshall, "The Parshall measuring flume", *Colorado Agricultural Experiment Station Bulletin* Nº 423, marzo de 1936.
24 R. L. Parshall, "Measuring water in irrigation channels", *U.S. Department of Agriculture, Farmer's Bulletin* Nº 1683, enero de 1932; revisado en octubre de 1941.
25. R. L. Parshall, "Parshall flumes of large size", *Colorado Agricultural Experiment Station Bulletin* Nº 386, mayo de 1932. Revisado como *Bulletin* Nº 426A, marzo de 1953.
26. R. L. Parshall, "Measuring water in irrigation channels with Parshall flumes and small weirs", *U.S. Soil Conservation Service*, Circular 843, mayo de 1950. Esta circular remplaza la [24].
27. H. G. Wilm, John S. Cotton, y H. C. Storey, "Measurement of debris-laden stream flow with critical-depth flumes", *Transactions*, Vol. 103, *American Society of Civil Engineers*, 1938, pp. 1237-1253.
28. K. J. Bermel, "Hydraulic influence of modifications to the San Dimas critical depth measuring flume", *Transactions*, Vol. 31, Nº 5, *American Geophysical Union*, octubre de 1950, pp. 763-768.
29. Harold K. Palmer y Fred D. Bowlus, "Adaptation of Venturi flumes to flow measurements in conduits", *Transactions*, Vol. 101, *American Society of Civil Engineers*, 1936, pp. 1195-1216.
30. John H. Ludwig y Russel G. Ludwig, "Design of Palmer-Bowlus flumes", *Sewage and Industrial Wastes*, Vol. 23, Nº 9, septiembre, 1951, pp. 1096-1107.
31. Edwin A. Wells, Jr., y Harold B. Gotaas, "Design of Venturi flumes in circular conduits", *Transactions*, Vol. 123, American Society of Civil Engineers, 1958, pp. 749-771.
32. J. C. Stevens, "Discussion on Adaptation of Venturi flumes to flow measurements in conduits", por Harold K. Palmer y Fred D. Bowlus, *Transactions*, Vol. 101, *American Society of Civil Engineers*, 1936, pp. 1229-1231.
33. Herbert Addison, *Hydraulic measurements*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941.
34. *Water measurement manual*, U.S. Bureau of Reclamation, mayo de 1953, pp. 43-58.
35. Horace William King, *Handbook of hydraulics*, 4ª ed., revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
36. F. T. Mavis, "Reducing unknowns in small culvert design", *Engineering News-Record*, Vol. 137, Nº 2, julio 11 de 1946, pp. 51-52.
37. W. O. Ree y F. R. Crow, "Measuring runoff rates with rectangular highway culverts", *Oklahoma Agricultural Experiment Station, Technical Bulletin T*-51, noviembre de 1954.
38. W. O. Ree y F. R. Crow, "Culverts as water runoff measuring devices", *Agricultural Engineering*, Vol. 35, Nº 1, enero de 1954, pp. 28-31 y 39.
39. James R. Villemonte, "New type gaging station for small streams", *Engineering News-Record*, Vol. 131, Nº 21, noviembre 18 de 1953, pp. 748-750.
40. C. D. C. Braine, "Draw-down and other factors relating to the design of stormwater outflows on sewers", *Journal*, Vol. 28, Nº 6, *Institution of Civil Engineers*, London, abril, 1947, pp. 136-163.

PARTE II

FLUJO UNIFORME

CAPÍTULO 5

DESARROLLO DEL FLUJO UNIFORME Y DE SUS ECUACIONES

5-1. Características del flujo uniforme. Se considera que el flujo uniforme tiene las siguientes características principales: 1) la profundidad, el área mojada, la velocidad y el caudal en cada sección del canal son constantes; y 2) la línea de energía, la superficie del agua y el fondo del canal son paralelos; es decir, sus pendientes son todas iguales, o $S_f = S_w = S_o = S$. Para propósitos prácticos, el requerimiento de una velocidad constante puede interpretarse libremente como el requerimiento de que el flujo posea una velocidad media constante. Sin embargo, en rigor, esto significaría que el flujo posee una velocidad constante en cada punto de la sección del canal dentro del tramo del flujo uniforme. En otras palabras, la distribución de velocidades a través de la sección del canal no se altera dentro del tramo. Este patrón estable de la distribución de velocidades puede obtenerse cuando la llamada "capa límite" se encuentra desarrollada por completo (sección 8-1).

Se considera que el flujo uniforme es sólo permanente, debido a que el flujo uniforme no permanente prácticamente no existe. En corrientes naturales, aun el flujo uniforme permanente es raro, debido a que en ríos y corrientes en estado natural casi nunca se experimenta una condición estricta de flujo uniforme. A pesar de esta desviación de la realidad, a menudo se supone una condición de flujo uniforme para el cálculo de flujo en corrientes naturales. Los resultados obtenidos a partir de esta suposición son aproximados y generales, pero ofrecen una solución relativamente simple y satisfactoria para muchos problemas prácticos.

Como el flujo uniforme turbulento se encuentra más a menudo en problemas de ingeniería, se discutirá más en extenso en los capítulos siguientes. El flujo uniforme laminar tiene aplicaciones de ingeniería limitadas y se describirá sólo en la sección 6-10.

Nótese que el flujo uniforme no puede ocurrir a velocidades muy altas, a menudo descritas como *ultra rápidas*. Esto se debe a que, cuando el flujo uniforme

alcanza una cierta velocidad alta, se vuelve muy inestable. A velocidades más altas el flujo eventualmente atrapará aire y se volverá inestable. El criterio para la inestabilidad del flujo uniforme se estudiará en la sección 8-8.

5-2. Establecimiento del flujo uniforme. Cuando el flujo ocurre en un canal abierto, el agua encuentra resistencia a medida que fluye aguas abajo. Esta resistencia por lo general es contrarrestada por las componentes de fuerzas gravitacionales que actúan sobre el cuerpo de agua en la dirección del movimiento (figura 5-2). Un flujo uniforme se desarrollará si la resistencia se balancea con las fuerzas gravitacionales. La magnitud de la resistencia, cuando otros factores físicos del canal se mantienen constantes, depende de la velocidad de flujo. Si el agua entra al canal con lentitud, la velocidad y, por consiguiente, la resistencia son pequeñas, y la resistencia es sobrepasada por las fuerzas de gravedad, dando como resultado una aceleración de flujo en el tramo de aguas arriba. La velocidad y la resistencia se incrementarán de manera gradual hasta que se alcance un balance entre las fuerzas de resistencia y de gravedad. A partir de este momento, y de ahí en adelante, el flujo se vuelve uniforme. El tramo de aguas arriba que se requiere para el establecimiento del flujo uniforme se conoce como *zona transitoria*. En esta zona el flujo es acelerado y variado. Si el canal es más corto que la longitud transitoria requerida para las condiciones dadas, no puede obtenerse flujo uniforme. Hacia el extremo de aguas abajo del canal la resistencia puede ser excedida de nuevo por las fuerzas gravitacionales y el flujo nuevamente se vuelve variado.

Para mayor explicación, se muestra un canal largo con tres pendientes diferentes: subcrítica, crítica y supercrítica (figura 5-1). En la pendiente subcrítica (esquema superior de la figura 5-1) el agua en la zona de transición aparece ondulante. El flujo es uniforme en el tramo medio del canal pero variado en los dos extremos[1]. En la pendiente crítica (esquema intermedio de la figura 5-1) la superficie del agua del flujo crítico es inestable. En el tramo intermedio pueden ocurrir ondulaciones, pero en promedio la profundidad es constante y el flujo puede considerarse uniforme. En la pendiente supercrítica (esquema inferior en la figura 5-1) la superficie de agua transitoria pasa del nivel subcrítico al nivel supercrítico a través de una caída hidráulica gradual. Después de la zona de transición el flujo se aproxima al uniforme. La profundidad del flujo uniforme se conoce como *profundidad normal*. En todas las figuras la línea de trazos largos representa la línea de profundidad normal, abreviada como L.P.N., y la línea de trazos cortos representa la línea de profundidad crítica o L.P.C.

La longitud de la zona transitoria depende del caudal y de las condiciones físicas del canal, como la condición de entrada, la forma, la pendiente y la rugosidad. Desde un punto de vista hidrodinámico (*véase* sección 8-1), la longitud de la zona de transición no debería ser menor que la longitud requerida para el desarrollo completo de la capa límite bajo las condiciones dadas.

[1] En teoría, la profundidad variada en cada extremo se aproxima a la profundidad uniforme asintótica y gradualmente en el medio. Sin embargo, para propósitos prácticos, la profundidad puede considerarse constante si la variación de la profundidad está dentro de cierto margen, por ejemplo, 1% del promedio de la profundidad del flujo uniforme.

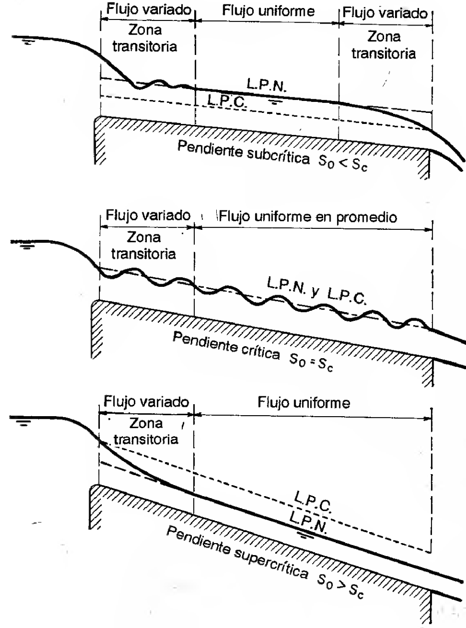


Figura 5-1. Establecimiento de flujo uniforme en un canal largo.

5-3. Expresión de la velocidad en flujo uniforme. Para los cálculos hidráulicos la velocidad media de un flujo uniforme turbulento en canales abiertos por lo general se expresa aproximadamente por la llamada *ecuación de flujo uniforme*. La mayor parte de las ecuaciones prácticas de flujo uniforme pueden expresarse de la siguiente manera:

$$V = CR^xS^y \tag{5-1}$$

donde V es la velocidad media en pies/s; R es el radio hidráulico en pies; S es la pendiente de energía[2] x y y son exponentes; y C es un factor de resistencia al flujo, el cual varía con la velocidad media, el radio hidráulico, la rugosidad del canal, la viscosidad y muchos otros factores.

Para propósitos prácticos, puede suponerse que el flujo en un canal natural es uniforme bajo condiciones normales, es decir, si no existen flujos de creciente o

[2] En flujo uniforme, $S = S_f = S_w = S_o$. Cuando se aplica la ecuación de flujo uniforme al cálculo de la pendiente de energía en flujo gradualmente variado, la pendiente de energía se denominará específicamente mediante S_f en lugar de S.

flujos notablemente variados causados por irregularidades en el canal. Al aplicar una ecuación de flujo uniforme a una corriente natural se entiende que el resultado es muy aproximado, debido a que las condiciones del flujo están sujetas a más factores inciertos de los que se involucrarían en un canal artificial regular. Tal como lo señaló Schneckenberg [1], una buena ecuación de flujo uniforme para un canal aluvial con transporte de sedimentos y flujo turbulento debería tener en cuenta todas las siguientes variables:

A	el área mojada
V	la velocidad media
V_{ms}	la velocidad máxima en la superficie
P	el perímetro mojado
R	el radio hidráulico
y	la máxima profundidad del área mojada
S_w	la pendiente de la superficie de agua
n	un coeficiente que representa la rugosidad del canal, conocido como *coeficiente de rugosidad*[3]
Q_s	la carga de sedimentos en suspensión
Q_b	la carga de lecho
μ	la viscosidad dinámica del agua
T	la temperatura del agua

Se ha desarrollado y publicado una gran cantidad de ecuaciones prácticas de flujo uniforme[4], pero ninguna de estas ecuaciones cumple todas las cualidades de una buena ecuación, tal como se definió antes. Las ecuaciones mejor conocidas y más ampliamente utilizadas son las ecuaciones de Chézy y de Manning, las cuales se describirán en las siguientes secciones y se utilizarán en extenso en este libro. También se han deducido ecuaciones teóricas de flujo uniforme con base en la distribución de velocidad teórica a través de la sección de canal, que se estudiarán más adelante (sección 8-5).

Una aproximación diferente para la determinación de la velocidad en un canal natural ha sido propuesta por Toebes [6]. En esta aproximación se aplica un análisis de correlación múltiple a los siguientes factores significativos que afectan la velocidad en un canal aluvial determinado: área mojada, velocidad máxima en la superficie, perímetro mojado, profundidad máxima, pendiente de la superficie del agua, coeficiente de rugosidad y temperatura del agua. A partir de este método es posible evaluar la influencia individual independiente de cada variable sobre la magnitud de la velocidad. Cuando se hace tal evaluación, la velocidad bajo cualquier condición deterrminada de las variables es simplemente igual a la suma algebraica de las contribuciones individuales afectadas por cada variable. Sin embargo, este método es aplicable sólo a corrientes localizadas en la región geográfica donde se hace el análisis; luego, su aplicación no puede generalizarse.

[3] En la literatura británica se utiliza el término "coeficiente de rugosidad".
[4] En las referencias [2] a [5] se dan y se analizan varias ecuaciones de flujo uniforme bien conocidas.

5-4. La ecuación de Chézy. En 1769 el ingeniero francés Antoine Chézy desarrollaba probablemente la primera ecuación de flujo uniforme, la famosa *ecuación de Chézy*[5], que a menudo se expresa como sigue:

$$V = C\sqrt{RS} \tag{5-2}$$

donde V es la velocidad media en pies/s, R es el radio hidráulico en pies, S es la pendiente de la línea de energía y C es un factor de resistencia al flujo, conocido como *C de Chézy*.

La ecuación de Chézy puede deducirse matemáticamente a partir de dos suposiciones. La primera suposición fue hecha por Chézy. Ésta establece que la fuerza que resiste el flujo por unidad de área del lecho de la corriente es proporcional al cuadrado de la velocidad; es decir, esta fuerza es igual a KV^2, donde K es una constante de proporcionalidad. La superficie de contacto del flujo con el lecho de la corriente es igual al producto del perímetro mojado y la longitud del tramo del canal o PL (figura 5-2). Luego la fuerza total que resiste al flujo[6] es igual a KV^2PL.

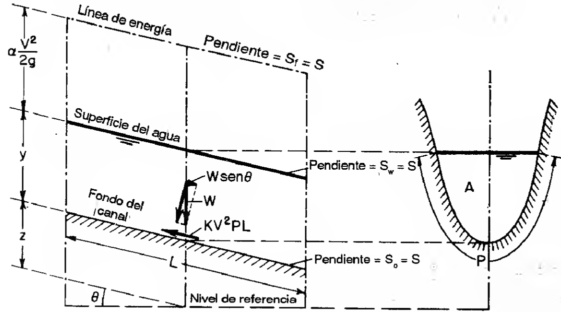


Figura 5-2. Deducción de la ecuación de Chézy para flujo uniforme en un canal abierto.

[5] La fuente de esta famosa ecuación no se menciona en la mayor parte de los textos de hidráulica. De hecho, esta información fue buscada extensamente. En 1876, el ingeniero alemán Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen mencionó en su trabajo [7] que Gaspard de Prony afirmó que Chézy planteó esta ecuación en 1775, con ocasión de un informe que Chézy hizo acerca del canal de l'Yvette, en conjunto con Jean-Rodolphe Perronet. "Pero", dice Hagen, "he buscado en vano información adicional sobre el tema". Luego, en 1897, el ingeniero norteamericano Clemens Herschel, con la colaboración de un amigo en París, encontró el informe original acera del canal de l'Yvette, luego tradujo la parte relacionada con la ecuación y la publicó en [8]. El informe de Chézy mostraba que la ecuación fue desarrollada y verificada mediante experimentos hechos en un canal en tierra, el canal Courpalet, y en el río Sena a finales de 1769.

[6] Esta fuerza de resistencia en el canal también puede explicarse mediante los principios de dinámica de fluidos. El canal abierto puede concebirse como una placa plana curvada para formar un cilindro pero sin cerrarse en uno de sus lados, el cual corresponde a la superficie libre del flujo en canal abierto. Un fluido que fluye dentro del cilindro no cerrado creará una fuerza de arrastre o de resistencia en la superficie interna. Esta fuerza es igual al arrastre creado por el flujo de fluido a lo largo de la placa plana cuyas dos superficies ofrecen resistencia al flujo. Ésta última es igual a $C_d\rho V^2PL/2$, donde C_d es el coeficiente de arrastre y ρ es la densidad de masa del fluido. Luego, el factor $C_d\rho/2$ es equivalente a la constante de proporcionalidad K.

La segunda suposición es el principio básico del flujo uniforme, el cual se cree que fue establecido por primera vez por Brahms [9] en 1754. Ésta establece que en el flujo uniforme la componente efectiva de la fuerza gravitacional que causa el flujo debe ser igual a la fuerza total de resistencia. La componente efectiva de la fuerza gravitacional (figura 5-2) es paralela al fondo del canal e igual a wAL sen $\theta = wALS$, donde w es el peso unitario del agua, A es el área mojada, θ es el ángulo de la pendiente y S es la pendiente del canal[7]. Entonces, $wALS = KV^2PL$. Si $A/P = R$ y $\sqrt{w/K}$ se remplazan por un factor C; la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Chézy o $V = \sqrt{(w/K)(A/P)S} = C\sqrt{RS}$.

Se han hecho muchos intentos para determinar el valor del C de Chézy. En la siguiente sección se darán tres ecuaciones importantes desarrolladas con este propósito.

5-5. Cálculo del factor de resistencia de Chézy. A continuación se presentan tres ecuaciones importantes para el cálculo del C de Chézy.

A. La ecuación de G. K. En 1869, dos ingenieros suizos, Ganguillet y Kutter [10], publicaron una ecuación que expresa el valor de C en términos de la pendiente S, el radio hidráulico R y el coeficiente de rugosidad n. En unidades inglesas, la ecuación es

$$C = \frac{41.65 + \dfrac{0.00281}{S} + \dfrac{1.811}{n}}{1 + \left(41.65 + \dfrac{0.00281}{S}\right)\dfrac{n}{\sqrt{R}}} \tag{5-3}$$

El coeficiente n de esta ecuación se conoce específicamente como *n de Kutter*. El valor de n se analizará en las secciones 5-7 y 5-8.

La ecuación de G. K. se dedujo en detalle a partir de datos de mediciones de flujo en canales de diferentes tipos, incluidos los aforos de Bazin y los aforos de muchos ríos europeos y del río Mississippi[8]. A pesar de que la ecuación parece complicada, por lo general produce resultados satisfactorios. Se ha utilizado con tanta amplitud que existen diversos cuadros y tablas para su aplicación; así que, el uso de la misma ecuación rara vez es necesario en oficinas de ingeniería. La figura 5-3 muestra un cuadro muy conocido para la solución de la ecuación de G. K.

[7] La pendiente bajo consideración se define como el seno del ángulo de inclinación, o S = sen θ.

[8] Los aforos del río Mississippi fueron hechos por Humphreys y Abbot en el bajo río Mississippi entre 1850 y 1860, y luego los datos obtenidos fueron publicados en un informe remitido al U. S. Army Corps of Topographical Engineers en 1861 [11]. El término que contiene S se introdujo en la ecuación G. K. sólo con el fin de hacer que la fórmula estuviera de acuerdo con los datos de Humphreys y Abbot. Esto puede parecer ridículo ahora, debido a que se sabe que esos datos son imprecisos (*véanse* pp. 133-136 de [2]). Algunos autores han sugerido que el término de la pendiente $0.00281/S$ de la ecuación de G. K. puede omitirse con el fin de simplificar la apariencia de la ecuación e inclusive para hacer más satisfactorios los resultados generales.

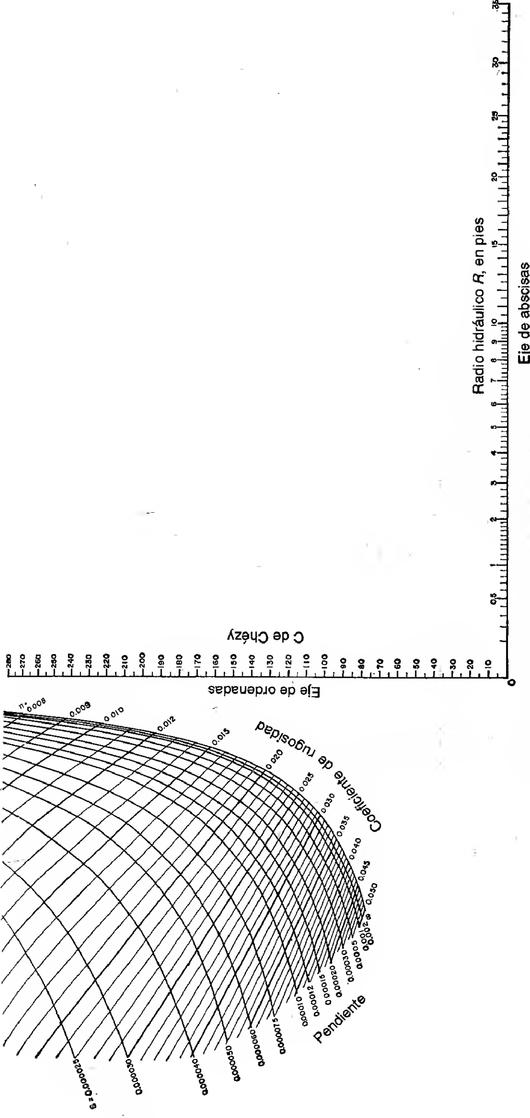


Figura 5-3. Solución gráfica de la ecuación de G.K.

Para encontrar C cuando se conocen R, S y n: una línea recta que una el valor de R en el eje de las abscisas con el punto donde la curva de pendiente S intersecca la línea n indicará el valor de C en el eje de las ordenadas.

Para encontrar R cuando se conocen C, S y n: una línea recta desde el punto donde la línea de pendiente S interseca la línea n hasta el punto C en el eje de las ordenadas indicará, cuando se extienda hasta el eje de las abscisas, el valor de R.

Para encontrar S cuando se conocen C, R y n: una línea recta desde R en el eje de las abscisas hasta C en el eje de las ordenadas, extendida hasta la línea n, indicará encima de sí misma el valor de S.

Para encontrar n cuando se conocen C, R y S: una línea recta desde R en el eje de las abscisas hasta C en el eje de las ordenadas, extendida hasta la curva de pendiente S, indicará encima de sí misma el valor de n.

B. La ecuación de Bazin. En 1897, el ingeniero hidráulico francés H. Bazin[9] propuso una ecuación de acuerdo con la cual el C de Chézy se considera como una función de R pero no de S. Expresada en unidades inglesas, esta ecuación es

$$C = \frac{157.6}{1 + m/\sqrt{R}} \tag{5-4}$$

donde m es un coeficiente de rugosidad cuyos valores propuestos por Bazin se dan en la tabla 5-1.

Tabla 5-1. Valores propuestos para el m de Bazin

Descripeión del canal	m de Bazin
Cemento muy suave con formaleta de madera cepillada	0.11
Madera sin cepillar, concreto o ladrillo	0.21
Mampostería en bloques de piedra o de piedra y ladrillo mal acabado .	0.83
Canales en tierra en perfectas condiciones	1.54
Canales en tierra en condiciones normales	2.36
Canales en tierra en condiciones rugosas	3.17

La ecuación de Bazin se desarrolló primordialmente a partir de datos obtenidos en pequeños canales experimentales; luego, su aplicación general es menos satisfactoria que la ecuación de G. K.

El Miami Conservancy District [2] hizo un estudio comparando las variaciones en el C de Chézy, el m de Bazin y el n de Kutter para los datos experimentales de Bazin y varias corrientes naturales. Los resultados basados en este estudio se muestran en la tabla 5-2. Los valores de la variación promedio indican que la ecuación de Bazin no es tan buena como la de Kutter, inclusive para sus propios experimentos.

C. La ecuación de Powell. En 1950, Powell [14] sugirió una ecuación logarítmica para la rugosidad de canales artificiales. Esta ecuación, una función implícita de C, es

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4\mathrm{R}} + \frac{\epsilon}{R} \right) \tag{5-5}$$

donde R es el radio hidráulico en pies; R es el número de Reynolds; y ϵ es una medida de la rugosidad de canal, la cual tiene los valores tentativos presentados en la tabla 5-3.

[9] Desde 1855 hasta 1862, una serie extensa de experimentos sobre flujo en canales abiertos fue iniciada por H. Darcy y luego completada por Bazin. Los resultados fueron publicados por Bazin en 1865 [12]. Con base en los datos acumulados, Bazin propuso la ecuación en 1897 [13].

Tabla 5-2. Comparación de las variaciones en el C de Chézy, el m de Bazin y el n de Kutter

Mediciones	Valores promedios			Variaciones promedias, %		
	C	m	n	C	m	n
Series de Bazin 6	.....	0.185	0.0127	.....	5.2	1.1
7	.....	0.156	0.0120	.....	3.4	1.0
8	.....	0.142	0.0116	.....	3.8	2.5
9	.....	0.199	0.0130	.....	10.6	1.2
10	.....	0.144	0.0117	.....	3.4	1.4
11	.....	0.129	0.0113	.....	3.7	3.8
12	.....	0.324	0.0151	.....	1.6	1.0
13	.....	0.311	0.0148	.....	2.7	1.2
14	.....	0.321	0.0150	.....	4.4	1.8
15	.....	0.715	0.0209	.....	4.2	1.2
16	.....	0.711	0.0212	.....	5.7	1.6
17	.....	0.721	0.0215	.....	6.7	2.2
32	.....	0.424	0.0168	.....	1.8	0.4
33	.....	0.444	0.0171	.....	3.1	1.2
44	.....	0.658	0.0195	.....	18.6	8.8
46	.....	0.704	0.0205	.....	11.1	5.7
Río Miami en Tadmor, Ohio, 1915-1916	67.4*	1.98	0.0316	4.08	10.9	4.9
Río Bogue Phalia, Miss., 1914	63.3*	4.09	0.0704	24.20	35.7	22.2
Canales de drenaje de Arkansas, Ark., 1915	65.9*	2.12	0.0324	3.18	4.8	1.6
Río Mississippi, Carrolton, La., 1912	.....	1.33	0.0320	1.30	5.4	3.0
Río Mississippi, Carrolton, La., 1913	.....	1.46	0.0334	2.80	12.8	2.8
Río Irawadi, Birmania	.....	1.35	0.0332	4.10	23.0	6.2
Río Volga en Samara, Rusia	.....	1.58	0.0311	1.87	13.0	4.1
Río Volga en Zhiguly, Rusia	.....	1.76	0.0363	18.80	36.5	5.0
Variación promedio	.....	.....	.....	7.54	9.67	3.58

* Valores promediados por el autor

Tabla 5-3. Valores tentativos del ϵ de Powell

Descripción del canal	ϵ de Powell	
	Nuevo	Viejo
Superficie de cemento pulido	0.0002	0.0004
Canaletas de tablones de madera sin cepillar	0.0010	0.0017
Canales revestidos en concreto	0.004	0.006
Canales en tierra, rectos y uniformes	0.04	
Canales en tierra dragados	0.10	

Para canales rugosos, el flujo por lo general es tan turbulento que **R** se vuelve muy grande comparado con C; luego, la ecuación (5-5) se aproxima a la forma $C = 42 \log (R/\epsilon)$. Para canales lisos, la rugosidad superficial puede ser tan pequeña que ϵ se vuelve insignificante con R; luego la ecuación se aproxima a la forma $C = 42 \log (4R/C)$. Como el C de Chézy está expresado de manera implícita en la ecuación de Powell, la solución de la ecuación para C requiere un procedimiento de ensayo y error.

La ecuación de Powell fue desarrollada a partir de un número limitado de experimentos de laboratorio en canales lisos y rugosos y a partir de la distribución de velocidades teórica estudiada por Keulegan (sección 8-4). La aplicación práctica de esta ecuación está limitada, debido a que se necesita investigación adicional para la determinación de los valores apropiados de ϵ.

Ejemplo 5-1. Calcule la velocidad y el caudal en el canal trapezoidal descrito en el ejemplo 2-1, el cual tiene un ancho en el fondo de 20 pies, pendientes laterales de 2:1 y profundidad de agua de 6 pies. Se da: n de Kutter = 0.015 y S = 0.005.

Solución. A partir del ejemplo 2-1, A = 192.0 pies^2 y R = 4.10 pies. Al utilizar la ecuación de G. K., el valor del C de Chézy es

$$C = \frac{41.65 + \frac{0.00281}{0.005} + \frac{1.811}{0.015}}{1 + \left(41.65 + \frac{0.00281}{0.005}\right)\frac{0.015}{\sqrt{4.10}}} = 124.2$$

Luego, al utilizar la ecuación de Chézy,

$$V = 124.2\sqrt{4.10 \times 0.005} = 17.8 \text{ pies/s}$$

Por consiguiente,

$$Q = 192.0 \times 17.8 = 3{,}420 \text{ pies}^3/\text{s}$$

5-6. La ecuación de Manning. En 1889 el ingeniero irlandés Robert Manning[10] presentó una ecuación, la cual se modificó más adelante hasta llegar a su bien conocida forma actual

[10] Manning presentó por primera vez la ecuación durante la lectura de un artículo el 4 de diciembre de 1889 en una reunión del Institute of Civil Engineers de Irlanda. El artículo fue publicado más adelante en *Transactions*, del Instituto [15]. La ecuación en principio fue dada en una forma complicada y luego simplificada a $V = CR^{2/3}S^{1/2}$, donde V es la velocidad media, C es el factor de resistencia al flujo, R es el radio hidráulico y S es la pendiente. Después, ésta fue modificada por otros y expresada en unidades métricas como $V = (1/n)R^{2/3}S^{1/2}$. Luego fue reconvertida a unidades inglesas, dando como resultado $V = (1.486/n)R^{2/3}S^{1/2}$. En esta conversión, al igual que en la conversión de la ecuación de Ganguillet y Kutter, el valor numérico de n se mantuvo inmodificado. En consecuencia, el mismo valor de n es bastante utilizado en ambos sistemas de unidades.

Al tener en cuenta el punto de vista de la mecánica de fluidos moderna, la cual presta mucha atención a las dimensiones, las dimensiones de n deben ser motivo de consideración. A partir de la ecuación de Manning, se encuentra que las dimensiones de n son $TL^{-1/3}$. Como no es razonable suponer que el coeficiente de rugosidad contenga la dimensión T, algunos autores suponen que el numerador contiene el término $\sqrt{g}$, obteniéndose así las dimensiones de $L^{1/6}$ para n. También, por razones físicas, nótese que $n = [\phi(R/k)]k^{1/6}$ [ecuación (8-26)], donde k es una medida lineal de la rugosidad y $\phi(R/k)$

$$V = \frac{1.49}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (5\text{-}6)$$

donde V es la velocidad media en pies/s, R es el radio hidráulico en pies, S es la pendiente de la línea de energía y n es el coeficiente de rugosidad, específicamente conocido como ***n de Manning***. Esta ecuación fue desarrollada a partir de siete ecuaciones diferentes, basada en los datos experimentales de Bazin y además verificada mediante 170 observaciones[11]. Debido a la simplicidad de su forma y a los resultados satisfactorios que arroja en aplicaciones prácticas, la ecuación de Manning se ha convertido en la más utilizada de todas las ecuaciones de flujo uniforme para cálculos de flujos de canales abiertos[12]. En el apéndice C se da una solución nomográfica de la ecuación.

es una función de R/k. Si se considera que $\phi(R/k)$ es adimensional, n tendrá las mismas dimensiones que las de $k^{1/6}$, es decir, $L^{1/6}$.

Por otro lado, por supuesto, es igualmente posible suponer que el numerador de $1.486/n$ puede contener las dimensiones de $L^{1/3}T^{-1}$, o que $\phi(R/k)$ involucra un factor dimensional, lo cual deja a n sin dimensiones. Algunos autores, por consiguiente, prefiriendo la alternativa más simple, consideran a n como un coeficiente adimensional.

Nótese que la conversión de unidades para la ecuación de Manning es independiente de las dimensiones de n, siempre que se utilice el mismo valor de n en ambos sistemas de unidades. Si se supone que n es adimensional, entonces la ecuación en unidades inglesas tiene una constante numérica de $3.2808^{1/3} = 1.486$, debido a que 1 m = 3.2808 pies. Ahora, si se supone que n tiene las dimensiones de $L^{1/6}$, su valor numérico en unidades inglesas debe ser diferente de su valor en unidades métricas, a menos que se introduzca una corrección numérica de compensación. Sea n el valor en unidades métricas y n' el valor en unidades inglesas. Entonces, $n' = (3.2808^{1/6})n = 1.2190n$. Cuando la ecuación se convierte de unidades métricas a unidades inglesas, la forma resultante toma la constante numérica $3.2808^{1/3\,+\,1/6} = 3.2808^{1/2} = 1.811$, debido a que n tiene dimensiones de $L^{1/6}$. Luego, la ecuación resultante debe escribirse como $V = 1.811R^{2/3}S^{1/2}/n'$. Como se utiliza el mismo valor de n en ambos sistemas, la forma práctica de la ecuación en el sistema inglés es $V = 1.811R^{2/3}S^{1/2}/1.2190n = 1.486R^{2/3}S^{1/2}/n$, la cual es idéntica a la forma deducida con la suposición de que n no tiene dimensiones.

En una investigación en la literatura pionera en hidráulica, el autor no pudo encontrar ningún análisis importante con respecto a las dimensiones de n. Parece que éste no era un problema importante para los padres fundadores de la hidráulica. Sin embargo, es más probable que n fuera tomado, de manera inconsciente, como adimensional en la conversión de la ecuación de Manning, debido a que esa conversión, tal como se mostró antes, es más directa y simple.

Ahora, al considerar las aproximaciones involucradas en la deducción de la ecuación y la incertidumbre en el valor de n, parece injustificable utilizar una constante numérica con más de tres cifras significativas. Para propósitos prácticos, un valor de 1.49 se cree que es suficientemente aproximado [16].

Manning mencionó que la forma simplificada de la ecuación había sido sugerida independientemente por G. H. L. Hagen antes del propio trabajo de Manning, de acuerdo con una afirmación hecha por Major Cunningham [17]. Se cree que la ecuación de Hagen apareció primero en 1876 [7]. También se sabe que Philippe-Gaspard Gauckler [18] hizo una propuesta anterior de la forma simplificada de la ecuación de Manning en 1868 y que Strickler [19], por su parte, presentó la misma forma de la ecuación en 1923.

[11] Para la deducción del exponente de R, se utilizaron los datos experimentales de Bazin en canales artificiales [12]. Para diferentes formas y rugosidades, se encontró que el valor promedio del exponente variaba de 0.6499 a 0.8395. Al considerar estas variaciones, Manning adoptó un valor aproximado de 2/3 para el exponente. Con base en estudios posteriores, algunos autores sugirieron un valor de 3/4 [20] y otros sugirieron una variable dependiente de R y n [21].

[12] El uso internacional de la ecuación de Manning fue sugerido por Lindquist [3] en la Scandinavia Sectional Meeting of the World Power Conference en 1933, en Estocolmo. La recomendación final

Dentro de los rangos normales de pendiente y radio hidráulico, los valores del n de Manning y del n de Kutter son numéricamente muy parecidos. Para propósitos prácticos, los dos valores pueden considerarse idénticos cuando la pendiente es igual a o mayor que 0.0001, y el radio hidráulico está entre 1.0 y 30 pies. En la tabla 5-6 y en la figura 5-5 se presentan valores comunes que sirven tanto para el n de Kutter como para el n de Manning.

Al comparar la ecuación de Chézy con la ecuación de Manning, puede verse que

$$C = \frac{1.49}{n} R^{1/6} \quad (5\text{-}7)$$

Esta ecuación da una relación[13] importante entre el C de Chézy y el n de Manning.

El exponente del radio hidráulico en la ecuación de Manning no es una constante, sino que varía en un rango que por lo general depende de la forma y la rugosidad del canal (*véase* nota de pie de página anterior). Por esta razón, algunos ingenieros hidráulicos prefieren el uso de la ecuación con un exponente variable. Por ejemplo, la ecuación de flujo uniforme muy utilizada en la Unión Soviética es de este tipo; ésta es la *ecuación de Pavlovskiĭ* [21], propuesta en 1925[14]. En unidades *métricas* esta ecuación es

$$C = \frac{1}{n} R^{y} \quad (5\text{-}8)$$

donde $$y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.10) \quad (5\text{-}9)$$

y donde C es el factor de resistencia en la ecuación de Chézy expresada en unidades *métricas*. El exponente y depende del coeficiente de rugosidad y del radio hidráulico. Esta ecuación es válida para valores de R entre 0.1 m y 3.0 m y para valores de n entre 0.011 y 0.040. Para propósitos prácticos, por lo general se sugieren las siguientes formas aproximadas de la ecuación (5-9):

$$y = 1.5\sqrt{n} \quad \text{para } R < 1.0 \text{ m} \quad (5\text{-}10)$$

$$y = 1.3\sqrt{n} \quad \text{para } R > 1.0 \text{ m} \quad (5\text{-}11)$$

5-7. Selección del coeficiente de rugosidad de Manning. Al aplicar la ecuación de Manning o la ecuación de G. K., la mayor dificultad está en la determinación del coeficiente de rugosidad n, ya que no existe un método exacto

para tal uso fue hecha por la Executive Committee en la III World Power Conference en 1936, en Washington, D.C.

[13] Teniendo en cuenta esta relación, algunas veces se considera que la ecuación de Manning es una variación de la de Chézy con el C de Chézy definido mediante la ecuación (5-7).

[14] La ecuación de Pavlovskiĭ fue publicada en varias ediciones del *Manual de Hidráulica*, de Pavlovskiĭ [21]. En las páginas 140-149 de la edición de 1937 del libro se presenta un artículo acerca de esta ecuación titulado *"Formula dlia koeffitsienta Chézy"* (*"Ecuación para un coeficiente de Chézy"*). Una nota de pie de página en este artículo dice: "La ecuación fue propuesta en 1925".

para la selección del valor de n. Con el nivel de conocimiento actual, seleccionar un valor de n significa estimar la resistencia al flujo en un canal determinado, lo cual realmente es un asunto de intangibles. Para ingenieros veteranos, esto significa utilizar profundos criterios de ingeniería y experiencia; para principiantes, no pasa de ser un proceso de adivinanza, y diferentes individuos obtendrán diferentes resultados.

Con el fin de dar una guía para la determinación correcta del coeficiente de rugosidad, se estudiarán cuatro enfoques generales; éstos son: 1) entender los factores que afectan el valor de n con el fin de adquirir el conocimiento básico del problema y disminuir el rango de incertidumbre, 2) consultar una tabla de valores comunes de n para canales de diferentes tipos, 3) examinar y familiarizarse con la apariencia de algunos canales comunes cuyos coeficientes de rugosidad se conocen, y 4) determinar el valor de n mediante un procedimiento analítico basado en la distribución de velocidades teóricas en la sección transversal de un canal y en los datos de medición de velocidad o de rugosidad. En las siguientes tres secciones se darán los tres primeros métodos, y el cuarto se estudiará en el sección 8-7.

5-8. Factores que afectan el coeficiente de rugosidad de Manning. No es raro que los ingenieros piensen que un canal tiene un valor único de n para todas las ocasiones. En realidad, el valor de n es muy variable y depende de un cierto número de factores. Para seleccionar el valor de n apropiado para diferentes condiciones de diseño, resulta muy útil tener un conocimiento básico de estos factores. Los factores que ejercen la mayor influencia sobre el coeficiente de rugosidad tanto en canales artificiales como en canales naturales se escriben más adelante. Nótese que estos factores están hasta cierto punto interrelacionados; por tanto, la discusión de uno de los factores puede repetirse en conexión con otro.

A. Rugosidad superficial. La rugosidad superficial se representa por el tamaño y la forma de los granos del material que forman el perímetro mojado y que producen un efecto retardador del flujo. Por lo general éste se considera como el único factor para la selección de un coeficiente de rugosidad, pero en realidad es sólo uno de varios factores principales. En general, granos finos dan como resultado un valor relativamente bajo de n, y granos gruesos, un valor alto de n.

En corrientes aluviales en las cuales el material es fino, como arena, arcilla, marga o limos, el efecto retardador es mucho menor que cuando el material es grueso, como gravas o cantos rodados. Cuando el material es fino, el valor de n es bajo y relativamente no se afecta por cambios en el nivel de flujo. Cuando el material consta de gravas y cantos rodados, el valor de n por lo general es alto, en particular en niveles bajos o altos. Los cantos rodados grandes a menudo se concentran en el fondo de la corriente, haciendo que el fondo del canal sea más rugoso que sus bancas e incrementando el valor de n para los niveles bajos. En niveles altos, una proporción de la energía del flujo se utiliza para mover los cantos rodados aguas abajo, lo cual incrementa el valor de n. En la sección 8-2 se adelantará un análisis teórico de la rugosidad superficial.

B. Vegetación. La vegetación puede considerarse como una clase de rugosidad superficial, pero también reduce de manera notable la capacidad del canal y retarda

el flujo. Este efecto depende por completo de la altura, la densidad, la distribución y del tipo de vegetación, y es muy importante en el diseño de pequeños canales de drenaje.

En la Universidad de Illinois se ha desarrollado una investigación para determinar el efecto de la vegetación en el coeficiente de rugosidad [22]. En uno de los canales de drenaje bajo investigación en Illinois central, se midió un valor promedio de n de 0.033 en marzo de 1925, cuando el canal estaba en buenas condiciones. En abril de 1926, había materiales de sauces y hierbas secas en los taludes laterales, y se encontró que n era 0.055. Este incremento en n representa el resultado de un año de crecimiento de la vegetación. Durante los veranos de 1925 y 1926 ocurrió un gran crecimiento de plantas con hojas largas y planas en el fondo del canal. El valor del n de Manning correspondiente a niveles de mediados del verano fue aproximadamente de 0.115, y para la sección a banca llena fue de 0.099. Las plantas altas del fondo del canal fueron removidas por las aguas altas en septiembre de 1926; el valor promedio del n encontrado después de que ocurrió esto fue 0.072. Las conclusiones sacadas de esta investigación fueron, en parte, las siguientes.

1. El valor mínimo de n que debe utilizarse para el diseño de canales de drenaje en Illinois central es 0.040. Este valor se obtiene en niveles altos durante los meses de verano en la mayor parte de los canales con mantenimiento cuidadoso, en los cuales el fondo del canal está libre de vegetación y las pendientes laterales están cubiertas con pasto o hierbas pequeñas, pero no con matorrales. No debe utilizarse este valor bajo de n a menos que el canal se limpie anualmente de todas sus hierbas y matorrales.

2. Debe utilizarse un valor de $n = 0.050$ si el canal se limpia sólo en años alternos. Hierbas altas y matorrales de sauces de 3 a 4 pies de altura en los taludes laterales producirán este valor de n.

3. Si los canales no se limpian durante un determinado número de años, el crecimiento puede volverse tan abundante de tal modo que se encuentren valores de $n > 0.100$.

4. Los árboles con diámetros de 6 a 8 pulg que crecen en los taludes laterales no impiden el flujo tanto como lo hacen los crecimientos de matorrales pequeños, siempre y cuando se corten las ramas colgantes.

El U. S. Soil Conservation Service ha hecho una serie de estudios del flujo de agua en canales pequeños poco profundos protegidos con recubrimiento vegetal (capítulo 7, sección C). Se ha encontrado que para estos canales los valores de n varían con la forma y la sección transversal del canal, la pendiente del lecho del canal y la profundidad del flujo. Al comparar dos canales, y mantener los demás factores iguales, la menor profundidad promedio arroja un valor de n mayor, debido a la mayor proporción afectada por la vegetación. Luego, un canal triangular tiene un valor de n mayor que un canal trapezoidal, y un canal ancho tiene un valor de n menor que un canal angosto. Un flujo con suficiente profundidad tiende a doblar y a sumergir la vegetación, con lo cual se producen valores bajos de n. Una pendiente alta genera altas velocidades, mayor aplanamiento de la vegetación y valores bajos de n.

El efecto de la vegetación en planicies de inundación será estudiado más adelante en el ítem *H*.

C. Irregularidad del canal. Las irregularidades del canal incluyen irregularidades en el perímetro mojado y variaciones en la sección transversal, tamaño y forma de ésta a lo largo del canal. En canales naturales, tales irregularidades por lo general son producidas por la presencia de barras de arena, ondas de arena, crestas y depresiones y fosos y montículos en el lecho del canal. Estas irregularidades introducen rugosidad adicional a la causada por la rugosidad superficial y otros factores. En general, un cambio gradual y uniforme en la sección transversal o en su tamaño y forma no produce efectos apreciables en el valor de n, pero cambios abruptos o alternaciones de secciones pequeñas y grandes requieren el uso de un valor grande de n. En este caso, el incremento en n puede ser 0.005 o mayor. Los cambios que hacen que el flujo cambie de manera sinuosa de un lado al otro del canal producirán el mismo efecto.

D. Alineamiento del canal. Curvas suaves con radios grandes producirán valores de n relativamente bajos, en tanto que curvas bruscas con meandros severos incrementarán el n. Con base en pruebas de laboratorio llevadas a cabo en canaletas, Scobey [23] sugirió que el valor n se incrementara en 0.001 por cada 20 grados de curvatura en 100 pies de canal. Aunque es dudoso que la curvatura llegue a aumentar el valor de n en más de 0.002 ó 0.003, su efecto no debería ignorarse, debido a que la curvatura puede inducir la acumulación de material flotante y, por consiguiente, incrementar indirectamente el valor de n. En general, el incremento de la rugosidad en canales no revestidos que conducen agua con baja velocidad es insignificante. Un aumento de 0.002 en el valor de n constituye una provisión adecuada para la pérdida en curvas en la mayor parte de las canaletas que contengan curvaturas pronunciadas sin importar que estén construidos en concreto* o en otros materiales. La presencia de meandros en corrientes naturales, sin embargo, puede incrementar el valor de n tan alto como 30%.

E. Sedimentación y socavación. En general, la sedimentación puede cambiar un canal muy irregular en un canal relativamente uniforme y disminuir el n, en tanto que la socavación puede hacer lo contrario e incrementar el n. Sin embargo, el efecto dominante de la sedimentación dependerá de la naturaleza del material depositado. Depósitos no uniformes, como barras de arena y ondulaciones de arena, constituyen irregularidades del canal e incrementarán la rugosidad. La cantidad y uniformidad de la socavación dependerán del material que conforma el perímetro mojado. Así, un lecho de arena o de gravas se erosionará más uniformemente que un lecho de arcillas. La sedimentación de las arcillas erosionadas en los terrenos aguas arriba tenderá a emparejar las irregularidades en un canal dragado a través de un suelo arcilloso. La energía utilizada para erosionar y mover el material en suspensión o por saltación a lo largo del lecho también incrementará el valor de n. El efecto de la socavación no es importante siempre y cuando la erosión en el lecho del canal causada por velocidades altas progrese igual y uniformemente.

* *Nota del revisor técnico.* En España y otros países de habla hispana se utiliza la palabra "hormigón".

F. Obstrucción. La presencia de obstrucciones de troncos, pilas de puente y estructuras similares tiende a incrementar el n. La magnitud de este aumento depende de la naturaleza de las obstrucciones, de su tamaño, forma, número y distribución.

G. Tamaño y forma del canal. No existe evidencia definitiva acerca del tamaño y la forma del canal como factores importantes que afecten el valor de n. Un incremento en el radio hidráulico puede aumentar o disminuir el n, según la condición del canal (figura 5-4).

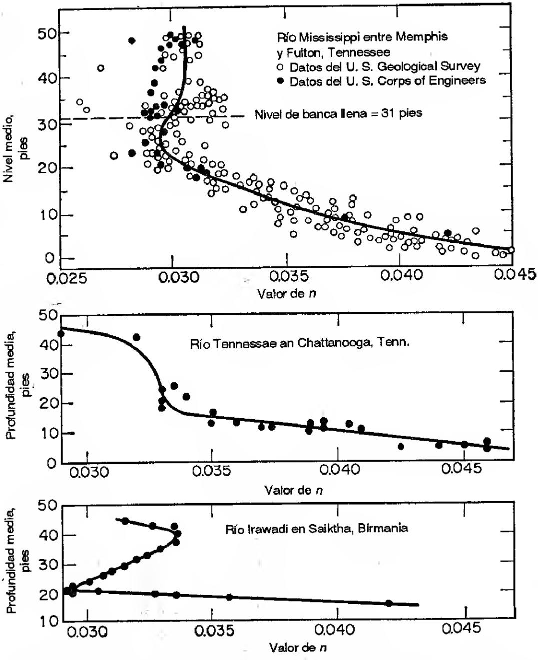


Figura 5-4. Variaciones del valor de n con el nivel medio o la profundidad.

H. Nivel y caudal. En la mayor parte de las corrientes el valor de n disminuye con el aumento en el nivel y en el caudal. Cuando el agua es poco profunda, las irregularidades del fondo del canal quedan expuestas y sus efectos se vuelven pronunciados. Sin embargo, el valor del n puede ser grande en niveles altos si las bancas están cubiertas por pastos o son rugosas.

Cuando el caudal es muy alto, la corriente puede rebosar sus bancas y una parte del flujo se localizará en la planicie de inundación. El valor de n para planicies de

inundación por lo general es mayor que el del canal en sí y su magnitud depende de la condición superficial o de la vegetación. Si el lecho y las bancas de un canal son igualmente suaves y regulares y la pendiente del fondo es uniforme, el valor de n puede permanecer constante para todos los niveles; en estas condiciones a menudo se supone un valor constante de n para el cálculo de flujo. Esto ocurrre principalmente en los canales artificiales. En planicies de inundación el valor de n a menudo varía con el nivel de sumergencia de la vegetación correspondiente a niveles bajos. Por ejemplo, esto puede verse en la tabla 5-4; ésta muestra los valores de n para varios niveles de inundación de acuerdo con el tipo de cubierta vegetal y la profundidad de inundación, tal como se observó en el río Nishnabotna, en Iowa, para la estación de crecimiento promedio [24]. Sin embargo, nótese que la vegetación tiene un efecto importante sólo hasta cierto nivel y que el coeficiente de rugosidad puede considerarse constante para propósitos prácticos en la determinación de caudales de crecientes por encima de las bancas.

Tabla 5-4. Valores de n para varios niveles en el río Nishnabotna, Iowa, para la estación de crecimiento promedio

Profundidad de agua, pies	Sección del canal	Cubierta de la planicie de inundación				
		Maíz	Pastos	Vegas	Pastos de grano	Maleza y basuras
Por debajo de 1	0.03	0.06	0.05	0.10	0.10	0.12
1 a 2	0.03	0.06	0.05	0.08	0.09	0.11
2 a 3	0.03	0.07	0.04	0.07	0.08	0.10
3 a 4	0.03	0.07	0.04	0.06	0.07	0.09
Por encima de 4	0.03	0.06	0.04	0.05	0.06	0.08

Lane [25] preparó curvas del valor de n *versus* el nivel (figura 5-4), las cuales muestran cómo varía el valor de n con respecto al nivel en tres canales de ríos grandes. Para las rugosidades de canales grandes, un estudio relacionado con el diseño del canal de Panamá fue hecho por Meyers y Schultz [26][15]. Las dos conclusiones más importantes alcanzadas en este trabajo fueron: 1) el valor de n para un canal aluvial es el mínimo posible cuando el nivel se encuentra en el nivel de banca llena o algo por encima de él y tiende a incrementarse para niveles mayores y menores; y 2) los valores de n de banca llena no varían de manera sustancial para ríos y canales en diferentes clases de material y en localizaciones completamente diferentes.

[15] En esta referencia también se da una tabla de los valores de n para once canales grandes alrededor de sus profundidades más eficientes y las curvas que muestran las variaciones del valor de n con respecto al radio hidráulico en ocho canales fluviales.

Para conductos circulares, Camp [27, 28] pudo demostrar que el valor de n para un conducto que fluye parcialmente lleno es mayor que para el conducto completamente lleno. Utilizando mediciones hechas en tubos de alcantarillado limpios y en canaletas de drenaje, tanto de arcilla como de concreto, con tamaños que variaban de 4 a 12 pulg, encontró un incremento de alrededor del 24% en el valor de n para una profundidad igual a la mitad del diámetro (figura 6-5)[16]. Se encontró que el valor de n para el tubo que fluía lleno variaba de 0.0095 a 0.011. Al tomar un valor promedio de 0.0103, el valor de n correspondiente a profundidad de medio diámetro debe ser alrededor de 0.013. Éste es idéntico al valor de diseño usual, el cual está basado sobre todo en valores medidos en alcantarillas que fluyen parcialmente llenas.

I. Cambio estacional. Debido al crecimiento estacional de plantas acuáticas, hierbas, malezas, sauces y árboles en el canal o en la bancas, el valor de n puede aumentar en la estación de crecimiento y disminuir en la estación inactiva. Este cambio estacional puede producir cambios en otros factores.

J. Material en suspensión y carga de lecho. El material en suspensión y la carga de lecho, ya sea en movimiento o no, consumirá energía y causará una pérdida de altura e incrementará la rugosidad aparente del canal.

Todos los factores anteriores deben estudiarse y evaluarse con respecto a las condiciones relacionadas con el tipo de canal, el estado de flujo, el grado de mantenimiento y otras consideraciones. Ellos dan una base para determinar el valor de n apropiado para un problema determinado. Como una guía general para la escogencia, debe aceptarse que las condiciones que tiendan a inducir turbulencia y a causar retardo incrementarán el valor de n, y aquéllas que tiendan a reducir la turbulencia y el retardo disminuirán el valor de n.

A partir del reconocimiento de varios factores primordiales que afectan el coeficiente de rugosidad, Cowan [32] desarrolló un procedimiento para estimar el valor de n. Mediante este procedimiento, el valor de n puede calcularse por

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)m_5 \qquad (5\text{-}12)$$

donde n_0 es un valor básico de n para un canal recto, uniforme y liso en los materiales naturales involucrados, n_1 es un valor que debe agregarse al n_0 para corregir el efecto de las rugosidades superficiales, n_2 es un valor para considerar las variaciones en forma y tamaño de la sección transversal del canal, n_3 es un valor para considerar las obstrucciones, n_4 es un valor para considerar la vegetación y las condiciones de flujo, y m_5 es un factor de corrección de los efectos por meandros en el canal. Los valores apropiados de n_0 a n_4 y m_5 pueden seleccionarse en la tabla 5-5 de acuerdo con las condiciones dadas.

[16] La curva n/n_0 se basó en las medidas hechas por Wilcox [29] en tuberías de alcantarillado de 8 pulg en arcilla y concreto, y por Yarnell y Woodward [30] en canaletas de drenaje de concreto y arcillas con juntas abiertas con tamaños de 4 a 12 pulg. Para profundidades menores que alrededor de $0.15d_0$, la curva fue verificada mediante los datos de Johnson [31] para alcantarillas grandes.

Tabla 5-5. Valores para el cálculo del coeficiente de rugosidad mediante la ecuación (5-12)

Condiciones del canal		Valores	
Material involucrado	Tierra	n_0	0.020
	Corte en roca		0.025
	Grava fina		0.024
	Grava gruesa		0.028
Grado de irregularidad	Suave	n_1	0.000
	Menor		0.005
	Moderado		0.010
	Severo		0.020
Variaciones de la sección transversal	Gradual	n_2	0.000
	Ocasionalmente alternante		0.005
	Frecuentemente alternante		0.010-0.015
Efecto relativo de las obstrucciones	Insignificante	n_3	0.000
	Menor		0.010-0.015
	Apreciable		0.020-0.030
	Severo		0.040-0.060
Vegetación	Baja	n_4	0.005-0.010
	Media		0.010-0.025
	Alta		0.025-0.050
	Muy alta		0.050-0.100
Grado de los efectos por meandros	Menor	m_5	1.000
	Apreciable		1.150
	Severo		1.300

Al establecer el valor de n_1, se considera que el grado de irregularidad es *suave* para superficies comparables con la mejor obtenible en los materiales involucrados; *menor* para canales artificiales bien dragados, con taludes laterales ligeramente erosionados o socavados en canales artificiales o canales de drenaje; *moderado* para canales mediana a pobremente dragados, taludes laterales moderadamente derrumbados o erosionados de canales artificiales o canales de drenaje; y *severos* para bancas muy derrumbadas de cauces naturales o con taludes laterales muy erosionados o muy derrumbados en canales artificiales o canales de drenaje, y canales

artificiales excavados en roca con superficies deformes, con entrantes y salientes e irregulares.

Al establecer el valor de n_2 se considera que el carácter de las variaciones en tamaño y forma de la sección transversal es *gradual* cuando el cambio en el tamaño o en la forma ocurre de manera gradual, *ocasionalmente alternante* cuando las secciones grandes y pequeñas se alternan ocasionalmente o cuando los cambios en la forma causan el cambio de la corriente principal de un lado al otro, y *frecuentemente alternante* cuando las secciones grandes y pequeñas se alternan con frecuencia o cuando los cambios en la forma causan frecuentes cambios de la corriente principal de un lado a otro.

Al establecer el valor de n_3 se consideran la presencia y las características de obstrucciones como depósitos de basura, palos, raíces expuestas, cantos rodados y troncos caídos y atascados. Recuérdese que las condiciones consideradas en los pasos anteriores no deben ser reevaluadas o tenidas en cuenta más de una vez. Para juzgar el efecto relativo de las obstrucciones, considere lo siguiente: hasta qué punto las obstrucciones ocupan o reducen el promedio de área mojada, la naturaleza de las obstrucciones (objetos puntiagudos o angulares inducen mayor turbulencia que objetos curvos o con superficies lisas), y la posición y el espaciamiento, transversal y longitudinal, de las obstrucciones en el tramo bajo consideración.

Al establecer el valor de n_4 se considera el grado del efecto de la vegetación:

1) *Bajo* para condiciones comparables a lo siguiente: *a*) crecimientos densos de pastos o malezas flexibles, de los cuales los pastos bermuda y azul son ejemplos, donde la profundidad promedio de flujo es de dos a tres veces la altura de la vegetación, y *b*) varas flexibles de plantas jóvenes, como sauce, matas de algodón o cedro salado, donde la profundidad promedio de flujo es tres a cuatro veces la altura de la vegetación.

2) *Medio* para condiciones comparables a las siguientes: *a*) césped cuando la profundidad promedio de flujo es una a dos veces la altura de la vegetación, *b*) pastos con tallo, malezas o plantas jóvenes con cubierta moderada cuando la profundidad promedio de flujo es dos a tres veces la altura de la vegetación, y *c*) crecimientos de matorrales, moderadamente densos, similares a sauces de uno a dos años, durante la estación invernal, a lo largo de los taludes laterales de un canal sin vegetación importante a lo largo del fondo del canal, cuando el radio hidráulico es mayor que 2 pies.

3) *Alto* para condiciones comparables a las siguientes: *a*) prados de césped cuando la profundidad promedio es más o menos igual a la altura de la vegetación, *b*) sauces o plantas de algodón de ocho a diez años de edad durante la estación invernal, con crecimiento intermedio de malezas y matorrales, sin vegetación en el follaje, cuando el radio hidráulico es mayor que 2 pies, y *c*) matorrales de sauces de aproximadamente un año de edad durante la estación de crecimiento, con intercalaciones de algunas malezas con follaje completo a lo largo de los taludes laterales sin vegetación importante a lo largo del fondo del canal, cuando el radio hidráulico es mayor que 2 pies.

4) *Muy alto* para condiciones comparables a las siguientes: *a*) pastos cuando la profundidad promedio del flujo es menor que la mitad de la altura de la vegetación, *b*) matorrales de sauces de más o menos un año de edad durante la estación de crecimiento, con crecimientos intercalados de malezas con follaje completo a lo largo de los taludes laterales o crecimientos densos de plantas de hojas anchas en el fondo del canal, con cualquier valor del radio hidráulico hasta 10 ó 15 pies, y *c*) árboles en la estación de crecimiento con intercalaciones de malezas y matorrales, todos con follaje completo, con cualquier valor del radio hidráulico hasta 10 ó 15 pies.

Al establecer el valor de m_5, el grado de los efectos por meandros depende de la relación entre la longitud con meandros y la longitud recta del tramo del canal. Los meandros se consideran *menores* para relaciones de 1 a 1.2, *apreciables* para relaciones de 1.2 a 1.5, y *severos* para relaciones de 1.5 y mayores.

Al aplicar el método anterior para determinar el valor del *n*, deben considerarse algunos aspectos. El método no considera el efecto del sedimento en suspensión y la carga de lecho. Los valores dados en la tabla 5-5 se desarrollaron a partir de un estudio de 40 a 50 casos de canales pequeños y moderados. Por consiguiente, el método es cuestionable cuando se aplica a canales grandes cuyos radios hidráulicos exceden 15 pies. El método se aplica sólo a corrientes naturales sin revestimiento, canales de creciente y canales de drenaje, y muestra un valor mínimo de 0.02 para el valor de *n* en dichos canales. Sin embargo, el valor mínimo de *n*, en general, puede ser tan bajo como 0.012 en canales revestidos y 0.008 en canales artificiales de laboratorio.

5-9. Tabla del coeficiente de rugosidad de Manning. La tabla 5-6 presenta una lista de valores de *n* para canales de diferentes clases[17]. Para cada tipo de canal se muestran los valores mínimo, normal y máximo de *n*. Los valores normales para canales artificiales dados en la tabla se recomiendan sólo para canales con buen mantenimiento. Los números en negrillas son los valores a menudo recomendados para diseño. En el caso de que se espere un mantenimiento pobre en el futuro, los valores mostrados deben incrementarse de acuerdo con la situación esperada. Nótese que la tabla 5-6 es muy útil para una rápida selección del valor de *n* que debe utilizarse en un determinado problema. Horton [34] preparó una muy conocida tabla de este tipo con base en los mejores experimentos disponibles en su tiempo[18]. La tabla 5-6 se compiló a partir de información recolectada hasta la fecha en diferentes fuentes ([34, 36, 38] y de datos no publicados); luego su alcance es mucho más amplio que la tabla de Horton.

[17] El valor mínimo de la lucita se observó en el laboratorio de ingeniería hidráulica de la Universidad de Illinois [33]. Un valor tan bajo de *n* quizás también pueda obtenerse para bronce liso y vidrio, pero hasta ahora no se han reportado observaciones.

[18] King [35] también presenta una tabla que muestra los valores de *n* y otros elementos basadas en 269 observaciones hechas en muchos canales artificiales existentes.

Tabla 5-6. Valores del coeficiente de rugosidad *n*
(las cifras en **negrillas** son los valores generalmente recomendados para el diseño)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
A. Conductos cerrados que fluyen parcialmente llenos			
A-1. Metal			
a. Latón, liso	0.009	**0.010**	0.013
b. Acero			
1. Estriado y soldado	0.010	0.012	0.014
2. Riveteado y en espiral	0.013	0.016	0.017
c. Hierro fundido			
1. Recubierto	0.010	0.013	0.014
2. No recubierto	0.011	0.014	0.016
d. Hierro forjado			
1. Negro	0.012	0.014	0.015
2. Galvanizado	0.013	0.016	0.017
e. Metal corrugado			
1. Subdrenaje	0.017	0.019	0.021
2. Drenaje de aguas lluvias	0.021	**0.024**	0.030
A-2. No metal			
a. Lucita	0.008	0.009	0.010
b. Vidrio	0.009	**0.010**	0.013
c. Cemento			
1. Superficie pulida	0.010	0.011	0.013
2. Mortero	0.011	0.013	0.015
d. Concreto			
1. Alcantarilla, recta y libre de basuras	0.010	0.011	0.013
2. Alcantarilla con curvas, conexiones y algo de basuras	0.011	**0.013**	0.014
3. Bien terminado	0.011	0.012	0.014
4. Alcantarillado de aguas residuales, con pozos de inspección, entradas, etc., recto	0.013	0.015	0.017
5. Sin pulir, formaleta o encofrado metálico	0.012	0.013	0.014
6. Sin pulir, formaleta o encofrado en madera lisa	0.012	**0.014**	0.016
7. Sin pulir, formaleta o encofrado en madera rugosa	0.015	0.017	0.020
e. Madera			
1. Machihembrada	0.010	0.012	0.014
2. Laminada, tratada	0.015	0.017	0.020
f. Arcilla			
1. Canaleta común de baldosas	0.011	**0.013**	0.017
2. Alcantarilla vitrificada	0.011	0.014	0.017
3. Alcantarilla vitrificada con pozos de inspección, entradas, etc.	0.013	0.015	0.017
4. Subdrenaje vitrificado con juntas abiertas	0.014	0.016	0.018
g. Mampostería en ladrillo			
1. Barnizada o lacada	0.011	0.013	0.015
2. Revestida con mortero de cemento	0.012	0.015	0.017
h. Alcantarillados sanitarios recubiertos con limos y babas de aguas residuales, con curvas y conexiones	0.012	0.013	0.016
i. Alcantarillado con batea pavimentada, fondo liso	0.016	0.019	0.020
j. Mampostería de piedra, cementada	0.018	0.025	0.030

Tabla 5-6. Valores del coeficiente de rugosidad n (*continuación*)
(las cifras en **negrillas** son los valores generalmente recomendados para el diseño)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
B. Canales revestidos o desarmables			
B-1. Metal			
a. Superficie lisa de acero			
1. Sin pintar	0.011	**0.012**	0.014
2. Pintada	0.012	0.013	0.017
b. Corrugado	0.021	0.025	0.030
B-2. No metal			
a. Cemento			
1. Superficie pulida	0.010	0.011	0.013
2. Mortero	0.011	0.013	0.015
b. Madera			
1. Cepillada, sin tratar	0.010	0.012	0.014
2. Cepillada, creosotada	0.011	0.012	0.015
3. Sin cepillar	0.011	0.013	0.015
4. Láminas con listones	0.012	0.015	0.018
5. Forrada con papel impermeabilizante	0.010	0.014	0.017
c. Concreto			
1. Terminado con llana metálica (palustre)	0.011	**0.013**	0.015
2. Terminado con llana de madera	0.013	0.015	0.016
3. Pulido, con gravas en el fondo	0.015	0.017	0.020
4. Sin pulir	0.014	0.017	0.020
5. Lanzado, sección buena	0.016	0.019	0.023
6. Lanzado, sección ondulada	0.018	0.022	0.025
7. Sobre roca bien excavada	0.017	0.020	
8. Sobre roca irregularmente excavada	0.022	0.027	
d. Fondo de concreto terminado con llana de madera y con lados de			
1. Piedra labrada, en mortero	0.015	0.017	0.020
2. Piedra sin seleccionar, sobre mortero	0.017	0.020	0.024
3. Mampostería de piedra cementada, recubierta	0.016	0.020	0.024
4. Mampostería de piedra cementada	0.020	0.025	0.030
5. Piedra suelta o *riprap*	0.020	0.030	0.035
e. Fondo de gravas con lados de			
1. Concreto encofrado	0.017	0.020	0.025
2. Piedra sin seleccionar, sobre mortero	0.020	0.023	0.026
3. Piedra suelta o *riprap*	0.023	0.033	0.036
f. Ladrillo			
1. Barnizado o lacado	0.011	**0.013**	0.015
2. En mortero de cemento	0.012	**0.015**	0.018
g. Mampostería			
1. Piedra partida cementada	0.017	0.025	0.030
2. Piedra suelta	0.023	0.032	0.035
h. Bloques de piedra labrados	0.013	0.015	0.017
i. Asfalto			
1. Liso	0.013	0.013	
2. Rugoso	0.016	0.016	
j. Revestimiento vegetal	0.030	.....	0.500

Tabla 5-6. Valores del coeficiente de rugosidad n (*continuación*)
(las cifras en **negrillas** son los valores generalmente recomendados para el diseño)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
C. Excavado o dragado			
a. En tierra, recto y uniforme			
1. Limpio, recientemente terminado	0.016	0.018	0.020
2. Limpio, después de exposición a la intemperie	0.018	**0.022**	0.025
3. Con gravas, sección uniforme, limpio	0.022	0.025	0.030
4. Con pastos cortos, algunas malezas	0.022	0.027	0.033
b. En tierra, serpenteante y lento			
1. Sin vegetación	0.023	0.025	0.030
2. Pastos, algunas malezas	0.025	0.030	0.033
3. Malezas densas o plantas acuáticas en canales profundos	0.030	0.035	0.040
4. Fondo en tierra con lados en piedra	0.028	0.030	0.035
5. Fondo pedregoso y bancas con malezas	0.025	0.035	0.040
6. Fondo en cantos rodados y lados limpios	0.030	0.040	0.050
c. Excavado con pala o dragado			
1. Sin vegetación	0.025	0.028	0.033
2. Matorrales ligeros en las bancas	0.035	0.050	0.060
d. Cortes en roca			
1. Lisos y uniformes	0.025	0.035	0.040
2. Afilados e irregulares	0.035	0.040	0.050
e. Canales sin mantenimiento, malezas y matorrales sin cortar			
1. Malezas densas, tan altas como la profundidad de flujo	0.050	0.080	0.120
2. Fondo limpio, matorrales en los lados	0.040	0.050	0.080
3. Igual, nivel máximo de flujo	0.045	0.070	0.110
4. Matorrales densos, nivel alto	0.080	0.100	0.140
D. Corrientes naturales			
D-1. Corrientes menores (ancho superficial en nivel creciente < 100 pies)			
a. Corrientes en planicies			
1. Limpias, rectas, máximo nivel, sin montículos ni pozos profundos	0.025	**0.030**	0.033
2. Igual al anterior, pero con más piedras y malezas	0.030	0.035	0.040
3. Limpio, serpenteante, algunos pozos y bancos de arena	0.033	0.040	0.045
4. Igual al anterior, pero con algunos matorrales y piedras	0.035	0.045	0.050
5. Igual al anterior, niveles bajos, pendientes y secciones más ineficientes	0.040	0.048	0.055
6. Igual al 4, pero con más piedras	0.045	0.050	0.060
7. Tramos lentos, con malezas y pozos profundos	0.050	0.070	0.080
8. Tramos con muchas malezas, pozos profundos o canales de crecientes con muchos árboles con matorrales bajos	0.075	0.100	0.150

Tabla 5-6. Valores del coeficiente de rugosidad *n* (*continuación*)
(las cifras en **negrillas** son los valores generalmente recomendados para el diseño)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
b. Corrientes montañosas, sin vegetación en el canal, bancas usualmente empinadas, árboles y matorrales a lo largo de las bancas sumergidas en niveles altos			
1. Fondo: gravas, cantos rodados y algunas rocas	0.030	0.040	0.050
2. Fondo: cantos rodados con rocas grandes	0.040	0.050	0.070
D-2. Planicies de inundación			
a. Pastizales, sin matorrales			
1. Pasto corto	0.025	0.030	0.035
2. Pasto alto	0.030	0.035	0.050
b. Áreas cultivadas			
1. Sin cultivo	0.020	0.030	0.040
2. Cultivos en línea maduros	0.025	0.035	0.045
3. Campos de cultivo maduros	0.030	0.040	0.050
c. Matorrales			
1. Matorrales dispersos, mucha maleza	0.035	0.050	0.070
2. Pocos matorrales y árboles, en invierno	0.035	0.050	0.060
3. Pocos matorrales y árboles, en verano	0.040	0.060	0.080
4. Matorrales medios a densos, en invierno	0.045	0.070	0.110
5. Matorrales medios a densos, en verano	0.070	0.100	0.160
d. Árboles			
1. Sauces densos, rectos y en verano	0.110	0.150	0.200
2. Terreno limpio, con troncos sin retoños	0.030	0.040	0.050
3. Igual que el anterior, pero con una gran cantidad de retoños	0.050	0.060	0.080
4. Gran cantidad de árboles, algunos troncos caídos, con poco crecimiento de matorrales, nivel del agua por debajo de las ramas	0.080	0.100	0.120
5. Igual al anterior, pero con nivel de creciente por encima de las ramas	0.100	0.120	0.160
D-3. Corrientes mayores (ancho superficial en nivel de creciente > 100 pies). El valor de *n* es menor que el correspondiente a corrientes menores con descripción similar, debido a que las bancas ofrecen resistencia menos efectiva.			
a. Sección regular, sin cantos rodados ni matorrales	0.025	.....	0.060
b. Sección irregular y rugosa	0.035	.....	0.100

5-10. Ilustraciones de canales con diferentes rugosidades. En la figura 5-5 se muestran fotografías para un cierto número de canales comunes, acompañadas por una breve descripción de las condiciones del canal y de los valores del *n* correspondientes. Estas fotografías fueron recolectadas de diferentes fuentes y se presentan en orden ascendente con respecto a la magnitud de los valores de *n*. Éstas dan una idea de la apariencia de los canales que tienen diferentes valores de *n* y por tanto facilitan la selección del valor de *n* para una determinada condición de canal. El valor de *n* dado para cada canal representa aproximadamente el coeficiente de rugosidad cuando se toma la fotografía.

El U. S. Geological Survey también utiliza el anterior tipo de ayuda visual. El Survey ha hecho varias determinaciones de la rugosidad del canal en corrientes, sobre todo en el noroeste de los Estados Unidos. Éstas incluyen medidas en el área de la sección transversal, el ancho, la profundidad, la velocidad media, la pendiente y el cálculo del coeficiente de rugosidad. Los tramos fueron fotografiados en colores estereoscópicos, y las fotografías han estado circulando en las oficinas de distrito del Survey como una guía para la evaluación de *n*.

Figura 5-5. Canales comunes que muestran diferentes valores de n (*estas fotografías son reproducidas de* [37] *y* [38] *con permiso del U. S. Department of Agriculture. Las fotografías originales utilizadas con propósitos de reproducción fueron suministradas por cortesía del Sr. F. C. Scobey, fotografías* 1 *a* 14 *y* 19, *y por cortesía del Sr. C. E. Ramser, las demás*).

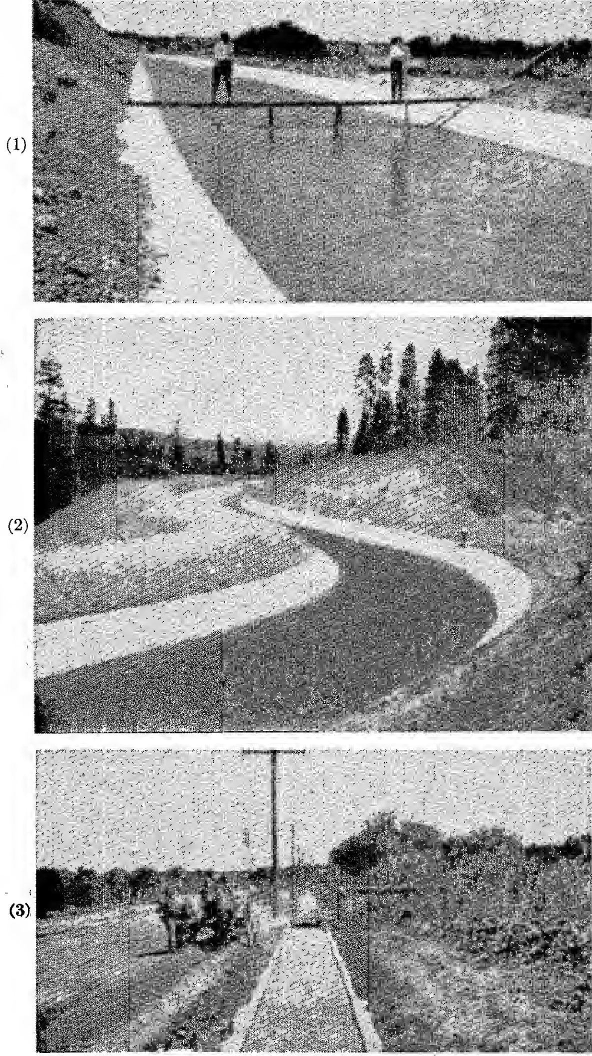
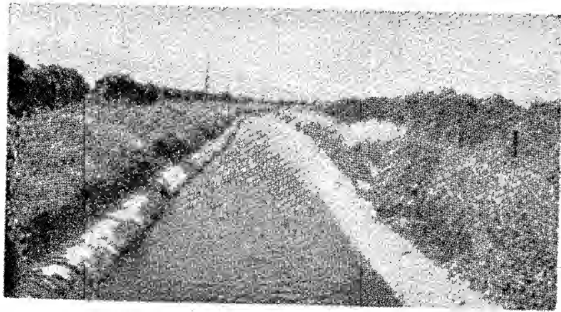


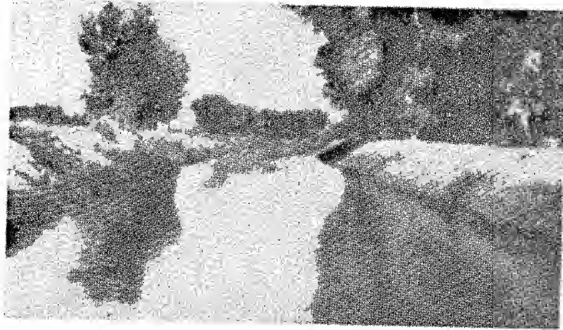
Figura 5-5 (1-3)

1. n = 0.012. Canal revestido con placas de concreto con juntas de cemento lisas y una superficie muy lisa, terminada a mano con llana y con lechada de cemento sobre la base de concreto.

2. n = 0.014. Canal de concreto vaciado por detrás de una plataforma móvil para nivelación y pulimento superficial.

3. n = 0.016. Zanja o cuneta, revestida en concreto, recta y uniforme, con fondo ligeramente curvo, lados y fondo recubiertos con un depósito rugoso, el cual incrementa el valor de n.


(4)


(5)

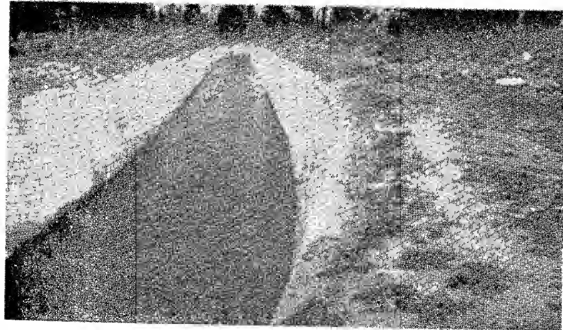
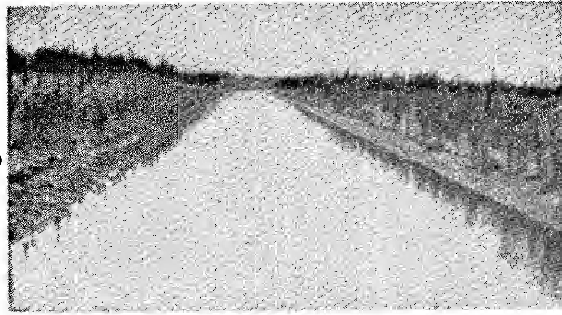

(6)

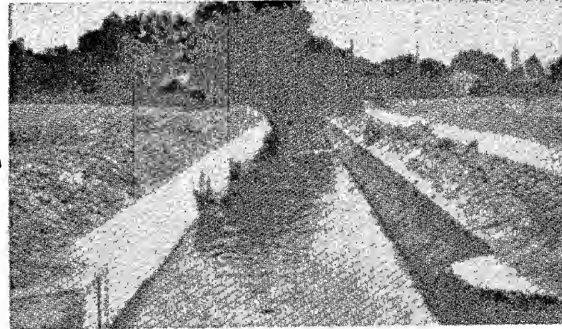
Figura 5-5 (4-6)

4. $n = 0.018$. Revestimiento de concreto lanzado sin tratamiento para alisado. Superficie cubierta por algas finas y fondo con dunas de arena arrastrada.

5. $n = 0.018$. Canal en tierra excavado en marga arcillosa, con depósito de arenas limpias en el medio y lodo limoso cerca de los lados.

6. $n = 0.020$. Recubrimiento de concreto hecho en un corte tosco en roca de lava, limpio, muy rugoso y excavado profundamente.


(7)


(8)

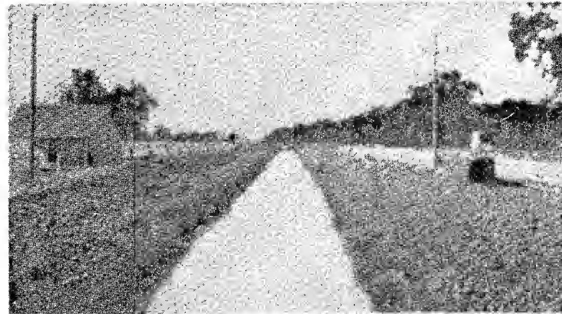
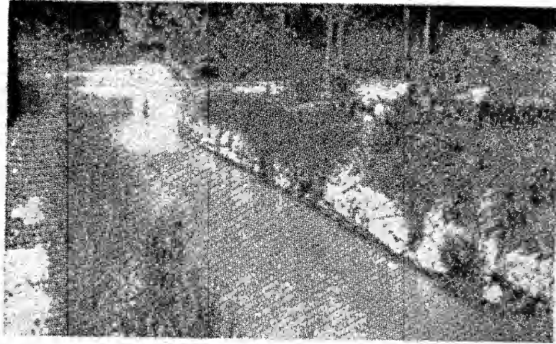

(9)

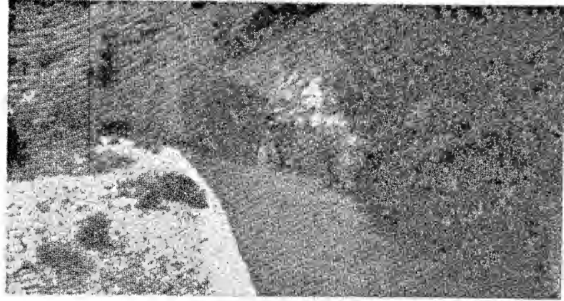
Figura 5-5 (7-9)

7. $n = 0.020$. Canal de irrigación, recto, en arena suave muy densa.

8. $n = 0.022$. Revoque o pañete de cemento aplicado directamente a la superficie tratada de un canal en tierra. Con malezas en los lugares dañados y arena suelta en el fondo.

9. $n = 0.024$. Canal excavado en marga arcillosa y limosa. Lecho duro y resbaladizo.


(10)


(11)

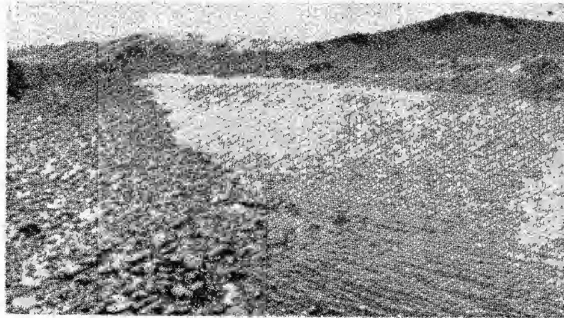
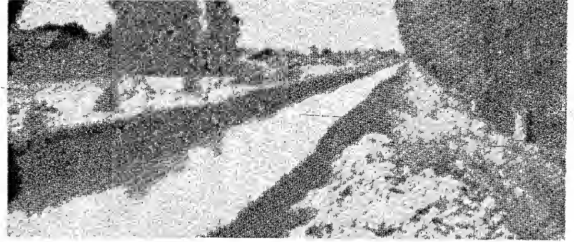

(12)

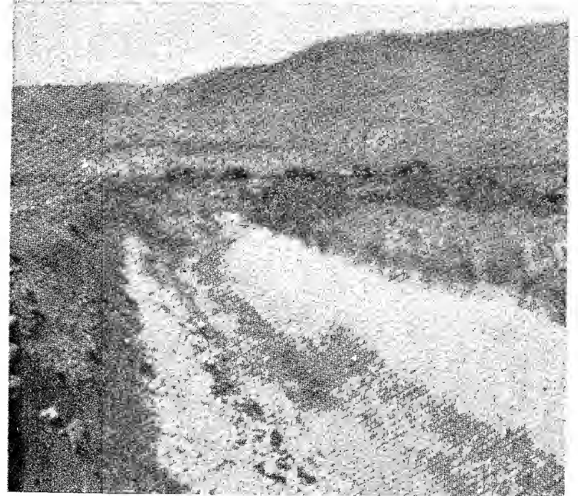
Figura 5-5 (10-12)

10. n = 0.024. Zanja o cuneta revestida en ambos lados y en el fondo con piedra partida acomodada en seco. Fondo bastante irregular, con algunos cantos rodados sueltos.

11. n = 0.026. Canal excavado a media ladera con la banca superior cubierta por raíces de sauces y la banca inferior con un muro de concreto bien terminado. Fondo cubierto con grava gruesa.

12. n = 0.028. Fondo del canal en cantos rodados, donde no hay suficiente arrcilla en el agua o donde existe una velocidad muy alta, que impide la formación de un lecho liso bien gradado.


(13)


(14)

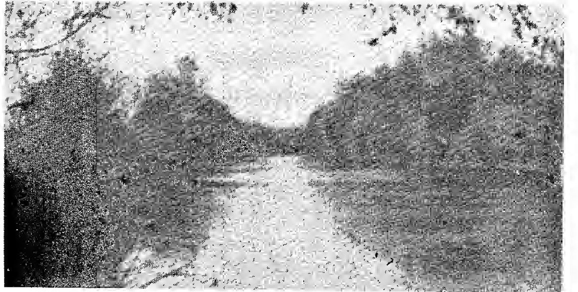
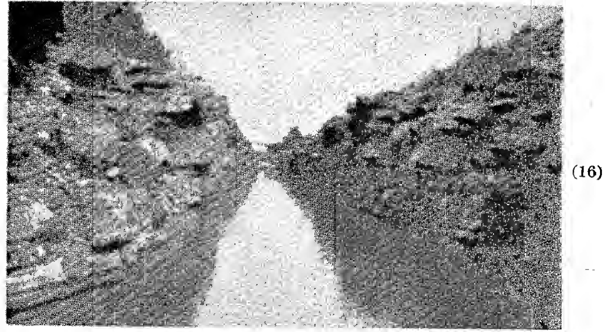

(15)

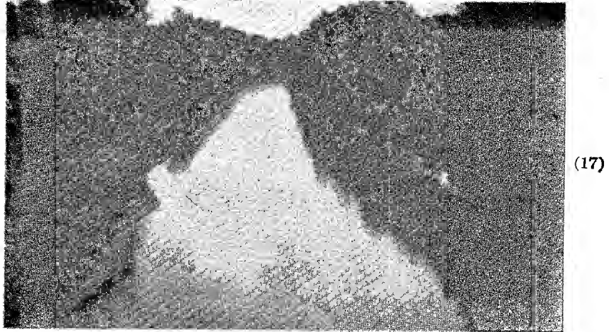
Figura 5-5 (13-15)

13. n = 0.029. Canal en tierra excavado en un suelo de limo aluvial, con depósitos de arena en el fondo y crecimiento de pastos.

14. n = 0.030. Canal con lecho de cantos rodados grandes.

15. n = 0.035. Canal natural, pendientes laterales algo irregulares; fondo más o menos nivelado, limpio y regular; en arcilla limosa gris clara a marga limosa marrón claro; muy poca variación en la sección transversal.


(16)


(17)

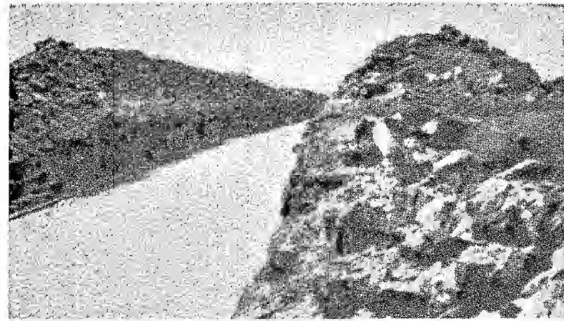

(18)

Figura 5-5 (16-18)

16. $n = 0.040$. Canal en roca excavado con explosivos.

17. $n = 0.040$. Zanja o cuneta en marga arenosa y arcillosa; pendientes laterales, fondo y sección transversal irregulares; pasto en las pendientes laterales.

18. $n = 0.045$. Canal dragado, pendientes laterales y fondo irregulares; en arcilla negra plástica en la parte superior hasta arcilla amarilla en el fondo, lados cubiertos con pequeños matorrales y arbustos, variaciones pequeñas y graduales en la sección transversal.


(19)


(20)

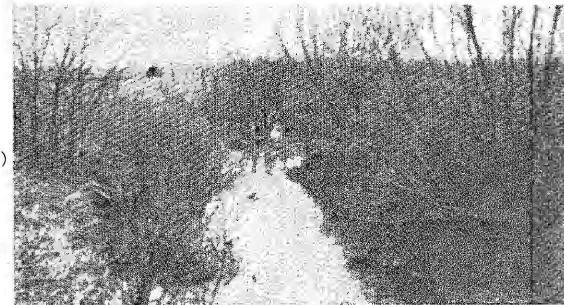
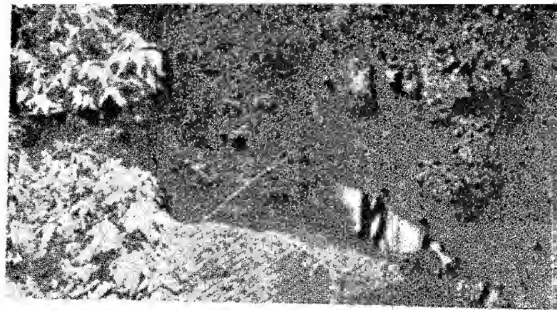

(21)

Figura 5-5 (19-21)

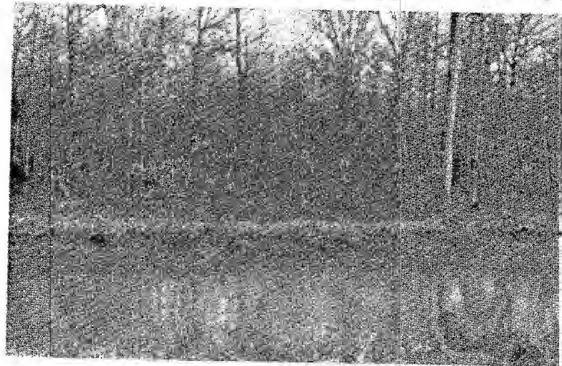
19. $n = 0.050$. Canal dragado con pendientes laterales y fondo muy irregulares, en arcilla plástica de color oscuro, con crecimiento de malezas y pastos. Pequeñas variaciones en la sección transversal debidas a variaciones en el tamaño.

20. $n = 0.060$. Cuneta en arcilla limosa pesada; pendientes laterales y fondo irregulares; prácticamente toda la sección llena con crecimientos de árboles grandes, sobre todo sauces y algodoneros. Sección transversal muy uniforme.

21. $n = 0.080$. Canal dragado en arcilla negra resbalosa y en marga arcillolimosa gris, pendientes laterales y fondo irregulares, cubierta con crecimientos densos de matorrales de sauces, algunos en el fondo; el resto de las pendientes laterales cubiertas con malezas y crecimiento escaso de sauces y álamos; algunos depósitos de sedimentos en el fondo.



(22)



(23)



(24)

Figura 5-5 (22-24)

22. n = 0.110. Igual al (21), pero con mucho follaje y cubierto unos 40 pies con vegetación semejante a malezas.

23. n = 0.125. Canal natural de crecientes en arena fina media a arcilla fina, sin ninguna pendiente lateral; fondo razonablemente liso y regular con fondos planos ocasionales; variación en la profundidad; árboles maderables prácticamente vírgenes, con muy poco crecimiento de malezas excepto por pequeños parches densos de matorrales y arbustos, algunos troncos y árboles caídos.

24. n = 0.150. Río natural en un suelo de arcilla arenosa. Alineamientos muy sinuosos, pendientes laterales irregulares y fondo disparejo. Muchas raíces, árboles y matorrales, troncos largos y otros residuos flotantes sobre el fondo; árboles caen continuamente en el canal debido a la socavación de las bancas.

PROBLEMAS

5-1. Explique por qué un flujo uniforme no puede ocurrir *a*) en un canal sin fricción, y *b*) en un canal horizontal.

5-2. Cuando el coeficiente C de Chézy determinado mediante la ecuación G. K. se vuelve independiente de la pendiente S, demuestre que el valor de R es 3.28. Encuentre la relación correspondiente entre C y el n de Kutter.

5-3. Para las condiciones dadas en el ejemplo 5-1, calcule los valores del m de Bazin y del ϵ de Powell.

5-4. Calcule la velocidad y el caudal de flujo para un canal nuevo en tierra que tiene igual forma, tamaño, pendiente y profundidad de flujo que el canal dado en el ejemplo 5-1. Utilice *a*) la ecuación de G. K., suponiendo que el n de Kutter es 0.022; *b*) la ecuación de Bazin, seleccionando el valor apropiado de m; y *c*) la ecuación de Powell, seleccionando el valor apropiado de ϵ.

5-5. Tomando el n de Manning como el valor del n de Kutter, resuelva el ejemplo 5-1 a partir de la ecuación de Manning.

5-6. Si el coeficiente de rugosidad n es desconocido para el canal del ejemplo 5-1, pero se observa un caudal de 2,000 pies³/s bajo determinadas condiciones, calcule los valores del n de Kutter y del n de Manning.

5-7. A partir de la ecuación de Manning (con una constante 1.486 en lugar de 1.49 para exactitud teórica) y de la ecuación de Chézy, determine la ecuación entre el C de Chézy y el n de Manning para la condición descrita en el problema 5-2. Esto demostrará que las ecuaciones G. K. y de Manning son teóricamente idénticas con la condición de que el C de Chézy sea independiente de la pendiente S.

5-8. Demuestre que el factor de fricción en la ecuaeión de Darcy-Weisbach, ecuación (1-4), se relaciona con el n de Manning mediante $f = 116n^2/R^{1/3}$.

5-9. El experimento 12-4 de las pruebas de Bazin [12] fue realizado en una canaleta rectangular de madera de 6.44 pies de ancho, con tacos de madera de 1 cm de espesor y 2.7 cm de ancho clavados en forma de cruz en el fondo y en los lados, con un espaciamiento de 3.7 cm de centro a centro de los tacos. En esta canaleta se obtuvo una velocidad de 3.33 pies/s con una profundidad de flujo de 1.02 pies y una pendiente de 0.0015. La temperatura del agua fue 8.5°C. Determine el n de Manning, y calcule *a*) el C de Chézy, *b*) el n de Kutter, *c*) el m de Bazin, y *d*) el ϵ de Powell.

5-10. El experimento 15-4 de las pruebas de Bazin fue igual al experimento 12-4, descrito en el problema anterior, excepto que el espaciamiento entre los tacos se incrementó a 7.7 cm. Utilizando el mismo caudal que en el experimento 12-4, se encontró que la profundidad de flujo era 1.33 pies. Determine el n de Manning y calcule *a*) el C de Chézy, *b*) el n de Kutter, *c*) el m de Bazin y *d*) el ϵ de Powell. Compare los valores de ϵ obtenidos para los experimentos 12-4 y 15-4 con la altura de los tacos y explique el efecto de la rugosidad en ambos casos.

5-11. A partir de la ecuación de Manning, construya una curva de calibración de caudales[19] para la sección de canal natural dada en el problema 2-5. La pendiente es 0.0016 y n = 0.035. Extienda los lados del canal utilizando líneas rectas para niveles altos, si es necesario.

5-12. La curva de calibración real para la sección del canal en el problema 2-5 se describe debajo. Construya una curva que muestre la variación del n de Manning con respecto al nivel por encima del nivel de referencia.

[19] Nótese que la curva de calibración sintética obtenida de esta manera es muy aproximada, particularmente para un canal natural, debido a que el valor de n en realidad no es una constante, sino una función de la profundidad (*véase* sección 5-8).

Nivel, pies	Caudal, pies^3/s	Nivel, pies	Caudal, pies^3/s
0.3	1.0	1.50	50.0
0.4	2.3	1.75	62.0
0.5	4.6	2.00	75.0
0.6	7.8	2.25	88.0
0.7	11.0	2.50	102.0
0.8	15.0	3.00	132.0
0.9	20.0	3.50	164.0
1.0	25.0	4.00	199.0
1.25	38.0		

5-13. A partir del método de Cowan, estime el valor de *n* para un tramo ligeramente curvado en el canal 21 de la figura 5-5.

REFERENCIAS

1. E. C. Schnackenberg, "Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers", *Proceedings*, Vol. 37, *New Zealand Institution of Engineers*, Wellington, 1951, pp. 340-409. Análisis, pp. 410-449
2. Ivan E. Houk, "Calculation of flow in open channels", *Technical Report, Parte IV, Miami Conservancy District*, Dayton, Ohio, 1918.
3. Erik Lindquist, "On velocity formulas for open channels and pipes", *Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia*, Vol. 1, Stockholm, 1933, pp. 177-234.
4. Philipp Forchheimer, *Hydraulik (Hydraulics)*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1930, pp. 139-163.
5. Zivko Vladislavljevitch, "Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme" ("Critical survey of the formulae for predetermination of mean velocity of uniform flow"), *Transactions of the 1st. Congress, International Commission on Irrigation and Drainage*, Vol. 2, informe 12, pregunta 2, New Delhi, 1951, pp. 405-428.
6. Cornelis Toebes, "Streamflow: poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers", *Proceedings*, Vol. 4, Nº 3, parte III, *Institution of Civil Engineers*, London, diciembre de 1955, pp. 900-938.
7. G. H. L. Hagen, *Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers (Researches on uniform flow of water)*, Berlin, 1876.
8. Clemens Herschel, "On the origin of the Chézy formula", Vol. 18, *Journal, Association of Engineering Societies*, pp. 363-368. Análisis, enero-junio de 1897, pp. 368-369.
9. A. Brahms, *Anfangsgründe der Deich- und Wasserbaukunst (Elements of dam and hydraulic engineering)*, Vol. I, Aurich, Germany, 1754 y 1757, p. 105.
10. E. Ganguillet y W. R. Kutter, "Versuch zur Aufstellung einer neuen allegemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen" ("An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers"), *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten Vereines*, Vol. 21, Nº 1, Vienna, 1869, pp. 6-25; Nº 2-3, pp. 46-59. Publicada como libro en Bern, Switzerland, 1877; traducido al inglés por Rudolph Hering y John C. Trautwine, Jr., como "A general formula for the uniform flow of water in rivers and other channels", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1ª ed., 1888; 2ª ed., 1891 y 1901.
11. Captain A. A. Humphreys y Lieut. H. L. Abbot, U.S. Army Corps of Topographical Engineers, "Report upon the physics and hydraulics of the Mississippi river; upon the protection of the alluvial region against overflow; and upon the deepening of the mouths; based upon surveys and

investigations...", J. B. Lippincott Company, Philadelphia, 1861; reimpreso en Washington, D.C. en 1867, y como *Professional Paper Nº 13, U.S. Army Corps of Engineers*, 1876.

12. H. Darcy y H. Bazin, "Recherches hydrauliques", 1ª parte, "Recherches expérimentales sur l'ecoulement de l'eau dans les canaux découverts"; 2ª parte, "Recherches expérimentales relatives aux remous et à la propagation des ondes" (*Hydraulic Researches*, Parte 1, "Experimental research on flow of water in open channels"; Parte 2, "Experimental research on backwater and the propagation of waves"), Académie des Sciences, Paris, 1865.
13. H. Bazin, "Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts" ("A new formula for the calculation of discharge in open channels"), *Mémoire Nº 41, Annales des ponts et chaussées*, Vol. 14, Ser. 7, 4º trimestre, 1897, pp. 20-70.
14. Ralph W. Powell, "Resistance to flow in rough channels", *Transactions*, Vol. 31, Nº 4, *American Geophysical Union*, agosto de 1950, pp. 575-582.
15. Robert Manning, "On the flow of water in open channels and pipes", *Transactions*, Vol. 20, *Institution of Civil Engineers of Ireland*, Dublin, 1891, pp. 161-207; suplemento, Vol. 24, 1895, pp. 179-207.
16. Ven Te Chow, "A note on the Manning formula", *Transactions*, Vol. 36, Nº 4, *American Geophysical Union*, agosto de 1955, p. 688.
17. Allen J. C. Cunningham, "Recent hydraulic experiments", *Proceedings*, Vol. 71, *Institution of Civil Engineers*, London, 1883, pp. 1-36.
18 Ph. Gauckler, "Du mouvement de l'eau dans les conduites" ("The flow of water in conduits"), *Annales des ponts et chaussées*, Vol. 15, Ser. 4, 1868, pp. 229-281.
19. A. Strickler, "Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen" ("Some contributions to the problem of velocity formula and roughness coefficient for rivers, canals, and closed conduits") *Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft*, Nº 16, Bern, Switzerland, 1923.
20. Thomas Blench, "A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity", *Journal*, Vol. 11, Nº 6, *Institution of Civil Engineers*, London, abril, 1939, pp. 611-612.
21. N. N. Pavlovskiĭ, *Gidravlicheskiĭ Spravochnik (Handbook of hydraulics)*. Este libro tiene muchas ediciones: 1) *Gidravlicheskii Spravochnik*, Put, Leningrad, 1924, p. 192; 2) *Uchebnyĭ Gidravlicheskii Spravochnik* (para escuelas de ingeniería), Kubuch, Leningrad, 1929, p. 100; 2ª ed., 1931, p. 168; 3) *Gidravlicheskii Spravochnik*, Onti, Leningrad y Moscow, 1937, p. 890; y 4) *Kratkiĭ Gidravlicheskiĭ Spravochnik* (version compacta), Gosstroiĭzdat, Leningrad y Moscow, 1940, p. 314.
22. George W. Pickels, "Run-off investigations in central Illinois", *University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin* 232, Vol. 29, Nº 3, septiembre de 1931.
23. Frederick C. Scobey, "The flow of water in flumes", *U.S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 393*, diciembre de 1933.
24. Methodology for crop and pasture inundation damage appraisal, "Training manual for hydrologists on watershed protection and flood prevention work plan parties", borrador preliminar, U.S. Soil Conservation Service, Milwaukee, Wis., 1954.
25. E. W. Lane, "Discussion on slope discharge formulae for alluvial streams and rivers", por E. C. Schnackenberg, *Proceedings*, Vol. 37, *New Zealand Institution of Engineers*, Wellington, 1951, pp. 435-438.
26. J. S. Meyers y E. A. Schultz, "Panama canal: the sea-level project", en el simposio Tidal currents, *Transactions*, Vol. 114, *American Society of Civil Engineers*, 1949, pp. 668-671.
27. Thomas R. Camp, "Design of sewers to facilitate flow", *Sewage Works Journal*, Vol. 18, enero-diciembre de 1946, pp. 1-16.
28. Thomas R. Camp, "Discussion on determination of Kutter's *n* for sewers partly filled", por C. Frank Johnson, *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, pp. 240-243, 1944.
29. E. R. Wilcox, "A comparative test of the flow of water in 8-inch concrete and vitrified clay sewer pipes", *University of Washington, Engineering Experiment Station, Bulletin 27*, marzo 1 de 1924.
30. D. L. Yarnell y S. M. Woodward, "The flow of water in drain tile", *U.S. Department of Agriculture, Bulletin Nº 854*, 1920.

31. C. Frank Johnson, "Determination of Kutter's *n* for sewers partly filled", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 223-239.
32. Woody L. Cowan, "Estimating hydraulic roughness coefficients", *Agricultural Engineering*, Vol. 37, Nº 7, julio de 1956, pp. 473-475.
33. Donald Schnepper y Ven Te Chow, "Full scale toe-of-slope gutter model", informe no publicado de una investigación dirigida por el Department of Civil Engineering, University of Illinois, en cooperación con la Division of Highways, State of Illinois, y el Bureau of Public Roads, U.S. Department of Commerce, mayo de 1954 (disponible en la librería de la University of Illinois).
34. Robert E. Horton, "Some better Kutter's formula coefficients", *Engineering News*, Vol. 75, Nº 8, febrero 24 de 1916, pp. 373-374. Análisis por Fred C. Scobey y Robert E. Horton, Vol. 75, Nº 18, mayo 4 de 1916, pp. 862-863.
35. Horace William King, *Handbook of Hydraulics*, 4ª ed., revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954, pp. 7-102 a 7-111.
36. *Engineering Handbook. Hydraulics*, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Sec. 5, 1955.
37. F. C. Scobey, "Flow of water in irrigation and similar canals", *U.S Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 652*, febrero de 1939.
38. C. E. Ramser, "Flow of water in drainage channels", *U.S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 129*, noviembre de 1929.

CAPÍTULO 6

CÁLCULO DE FLUJO UNIFORME

6-1. Conductividad de una sección de canal. El caudal de flujo uniforme en un canal puede expresarse como el producto de la velocidad, representada por la ecuación (5-1), y el área mojada, o

$$Q = VA = CAR^xS^y = KS^y \tag{6-1}$$

donde

$$K = CAR^x \tag{6-2}$$

El término K se conoce como *conductividad* de la sección de canal; es una medida de la capacidad de transporte de la sección de canal, debido a que es directamente proporcional a Q.

Cuando se utiliza la ecuación de Manning o la ecuación de Chézy como ecuación de flujo uniforme, es decir, cuando $y = 1/2$, el caudal de la ecuación (6-1) se convierte en

$$Q = K\sqrt{S} \tag{6-3}$$

y la conductividad es

$$K = \frac{Q}{\sqrt{S}} \tag{6-4}$$

Esta ecuación puede utilizarse para calcular la conductividad cuando tanto el caudal como la pendiente del canal están determinados.

Cuando se utiliza la ecuación de Chézy, la ecuación (6-2) se convierte en

$$K = CAR^{1/2} \tag{6-5}$$

donde C es el factor de resistencia de Chézy. De manera similar, cuando se utiliza la ecuación de Manning,

$$K = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} \tag{6-6}$$

Las anteriores dos ecuaciones se utilizan para calcular la conductividad cuando la geometría del área mojada y el factor de resistencia o coeficiente de rugosidad están determinados. Debido a que la ecuación de Manning se utiliza con bastante amplitud, la mayor parte de los análisis y cálculos siguientes se basarán en la ecuación (6-6).

6-2. El factor de sección para cálculo de flujo uniforme. La expresión $AR^{2/3}$ se conoce como *factor de sección para el cálculo de flujo uniforme*, y es un elemento importante en el cálculo de flujo uniforme. A partir de la ecuación (6-6), este factor puede expresarse como

$$AR^{2/3} = \frac{nK}{1.49} \tag{6-7}$$

y, a partir de la ecuación (6-4),

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{1.49\sqrt{S}} \tag{6-8}$$

En primer lugar, la ecuación (6-8) se aplica a una sección de canal cuando el flujo es uniforme. La parte derecha de la ecuación contiene los valores de n, Q y S; pero su parte izquierda depende sólo de la geometría del área mojada. Por consiguiente, la ecuación muestra que para una determinada condición de n, Q y S, existe *sólo una* profundidad posible para mantener un flujo uniforme, siempre y cuando el valor de $AR^{2/3}$ aumente con incrementos en la profundidad, lo cual es cierto en la mayor parte de los casos. Esta profundidad es la *profundidad normal*. Cuando en una sección de canal se conocen n y S, en la ecuación (6-8) puede verse que puede existir *sólo un* caudal para mantener un flujo uniforme a través de la sección, siempre y cuando $AR^{2/3}$ aumente siempre con un incremento en la profundidad[1]. Este caudal es el *caudal normal*.

La ecuación (6-8) es una herramienta muy útil para el cálculo y el análisis del flujo uniforme. Cuando se conocen el caudal, la pendiente y la rugosidad, esta ecuación da el factor de sección $A_nR_n^{2/3}$ y, por consiguiente, la profundidad normal y_n. Por otra parte, cuando n, S y la profundidad y por consiguiente el factor de sección, se conocen, puede calcularse el caudal normal Q utilizando esta ecuación en la siguiente forma:

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3}\sqrt{S} \tag{6-9}$$

[1] Esto es cierto para canales en los cuales el valor de $AR^{2/3}$ siempre aumenta con el valor de la profundidad, debido a que la ecuación (6-8) dará un valor de $AR^{2/3}$, que a su vez sólo da una profundidad. En el caso de un conducto cerrado que tiene una clave que se cierra gradualmente, el valor de $AR^{2/3}$ primero aumenta con la profundidad y luego empieza a decrecer con ésta cuando se aproxima a la profundidad de tubo lleno, debido a que el máximo valor de $AR^{2/3}$ a menudo ocurre a una profundidad ligeramente inferior que la profundidad de flujo lleno. En consecuencia, es posible tener dos profundidades para el mismo valor de $AR^{2/3}$, una mayor que el máximo valor de $AR^{2/3}$ y otra menor. Para un mayor estudio de este tema, *véase* la sección 6-4.

Ésta es esencialmente el producto del área mojada y la velocidad definida mediante la ecuación de Manning. Algunas veces se utiliza el subíndice para especificar la condición de flujo uniforme.

Para simplificar el cálculo, se han preparado curvas adimensionales que muestran la relación entre la profundidad y el factor de sección $AR^{2/3}$ (figura 6-1) para secciones de canales rectangulares, trapezoidales y circulares. Estas curvas explicativas por sí mismas ayudan a determinar la profundidad para un factor de sección $AR^{2/3}$ determinado, y viceversa. En la tabla del apéndice A también pueden encontrarse los valores de $AR^{2/3}$ para una sección circular.

6-3. El exponente hidráulico para el cálculo del flujo uniforme. Debido a que la conductividad K es una función de la profundidad de flujo y, puede suponerse que

$$K^2 = Cy^N \tag{6-10}$$

donde C es un coeficiente y N es un parámetro conocido como *exponente hidráulico para el cálculo de flujo uniforme.*

A partir de una gráfica logarítmica de la ecuación (6-10), resulta evidente que el exponente hidráulico N correspondiente a la profundidad y es

$$N = 2\,\frac{d(\ln K)}{d(\ln y)} \tag{6-11}$$

Ahora, al tomar logaritmos a ambos lados de la ecuación (6-6), $K = 1.49AR^{2/3}/n$, y al derivar esta ecuación con respecto a $\ln y$, bajo la suposición de que n es independiente de y,

$$\frac{d(\ln K)}{d(\ln y)} = \frac{y}{A}\frac{dA}{dy} + \frac{2}{3}\frac{y}{R}\frac{dR}{dy} \tag{6-12}$$

Como $dA/dy = T$ y $R = A/P$, la anterior ecuación se convierte en

$$\frac{d(\ln K)}{d(\ln y)} = \frac{y}{3A}\left(5T - 2R\frac{dP}{dy}\right) \tag{6-13}$$

Al igualar los lados derechos de las ecuaciones (6-11) y (6-13) y al resolver para N,

$$N = \frac{2y}{3A}\left(5T - 2R\frac{dP}{dy}\right) \tag{6-14}$$

Ésta última es la ecuación general para el exponente hidráulico N. Para una sección de canal trapezoidal que tiene un ancho b en el fondo y pendientes laterales de 1 a z, en la tabla 2-1 pueden obtenerse las expresiones para A, T, P y R. Al sustituir éstos en la ecuación (6-14) y al simplificar, la ecuación resultante[2] es

$$N = \frac{10}{3}\,\frac{1 + 2z(y/b)}{1 + z(y/b)} - \frac{8}{3}\,\frac{\sqrt{1+z^2}\,(y/b)}{1 + 2\sqrt{1+z^2}\,(y/b)} \tag{6-15}$$

[2] Esta ecuación [1] también fue desarrollada independientemente por Chugaev [2] mediante la ecuación de Chézy.

Figura 6-1. Curvas para determinar la profundidad normal

Esta ecuación indica que el valor de N para la sección trapezoidal es función de z y y/b. Para valores de z = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0, respectivamente, puede construirse una familia de curvas de N *versus* y/b (figura 6-2)[3]. Estas curvas indican que el valor de N varía dentro de un rango de 2.0 a 5.3.

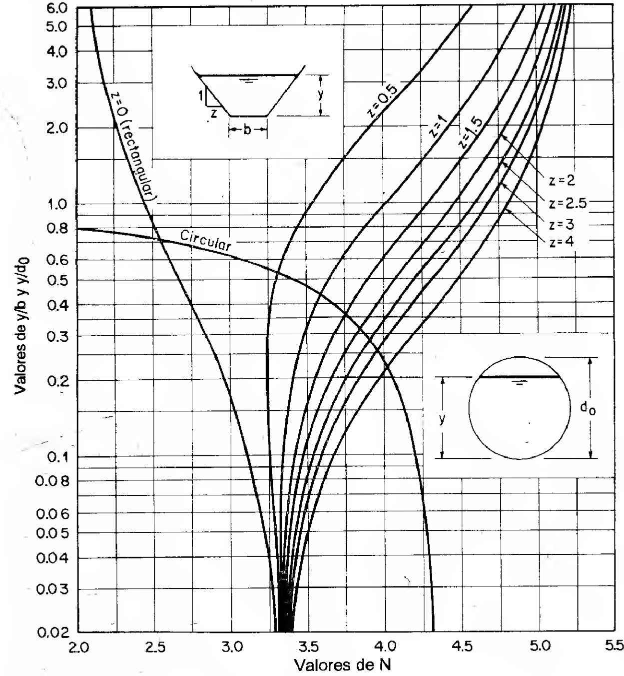


Figura 6-2. Curvas de valores de N.

En la figura 6-2 también se muestra la curva para una sección circular con N graficado contra y/d_0, donde d_0 es el diámetro. Esta curva muestra que el valor de N decrece rápidamente a medida que la profundidad de flujo se aproxima a la parte superior del canal. Análisis matemáticos adicionales han revelado que el valor de N será igual a cero cuando y/d_0 = 0.938, y se volverá negativo para profundidades mayores. El significado de este hecho será estudiado más adelante en esta misma sección y en la siguiente.

Para secciones de canales diferentes de las rectangulares, trapezoidales y circulares, los valores exactos de N pueden calcularse directamente mediante la

[3] Curvas similares a las mostradas en la figura 6-2 para canales trapezoidales fueron construidas por Kirpich [3] y también preparadas independientemente por Pavlovskiĭ [4] y Rakhmanoff [5].

ecuación (6-14), siempre y cuando la derivada dP/dy pueda evaluarse. Para la mayor parte de los canales, excepto para los canales con cambios abruptos en la forma de la sección transversal y conductos cerrados con claves que se cierran gradualmente, una gráfica logarítmica de K como ordenada contra la profundidad como abscisa (figura 6-3) aparecerá casi como una línea recta. Esto también puede verse en las curvas adimensionales de $AR^{2/3}$ en la figura 6-1, la cual se grafica de manera similar excepto que las ordenadas y las abscisas están intercambiadas. Si se supone un valor constante de n, la ecuación (6-6) indica que $K \propto AR^{2/3}$; luego, estas curvas de $AR^{2/3}$ deberían mostrar las mismas características si fueran graficadas para K. A partir de la ecuación (6-10), puede verse que el exponente hidráulico para el rango de línea recta de la gráfica es igual al doble de la pendiente de la línea recta graficada. Luego, si se toman dos puntos de la línea recta con coordenadas (K_1, y_1) y (K_2, y_2), puede calcularse el valor aproximado de N a partir de la siguiente ecuación:

$$N = 2\frac{\log (K_1/K_2)}{\log (y_1/y_2)} \qquad (6\text{-}16)$$

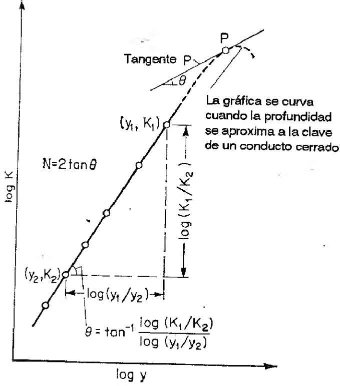


Figura 6-3. Determinación gráfica de N por graficación logarítmica.

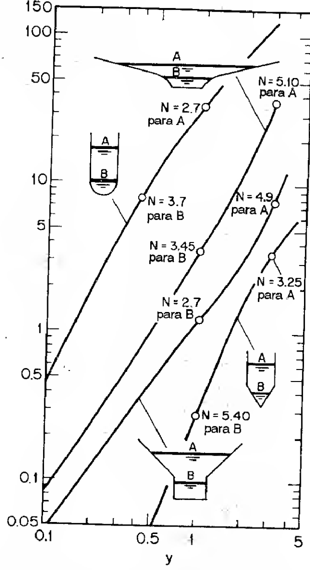


Figura 6-4. Secciones comunes de canal con una variación apreciable en el valor de N con respecto a la profundidad (*según R. R. Chugaev* [2]).

Cuando la sección transversal de un canal cambia abruptamente con respecto a la profundidad, el exponente hidráulico cambiará de la misma manera. En la figura 6-4 se muestran varias secciones comunes. En tales casos la gráfica logarítmica de N contra y puede aparecer como una línea quebrada o como una curva evidente. Para las partes más o menos rectas de la línea quebrada o de la curva, el exponente hidráulico puede suponerse constante.

Cuando la profundidad del flujo se aproxima a la clave que se cierra de manera gradual en un conducto cerrado, la gráfica logarítmica aparecerá como una curva. El exponente hidráulico en el rango de la curva graficada es igual a dos veces la pendiente de la tangente a la curva correspondiente a la profundidad determinada (figura 6-3). Para propósitos prácticos, la curva puede dividirse en cierto número de segmentos cortos, y cada segmento puede considerarse como una línea recta con una pendiente o exponente hidráulico constante.

Ahora tome la sección circular como un ejemplo. La gráfica logarítmica adimensional de $AR^{2/3}$ con respecto a la profundidad se muestra en la figura 6-1. Al suponer un valor de n constante, esta curva mostrará las mismas características que si la profundidad se hubiera graficado contra K. A medida que la profundidad aumenta, la curva se desvía gradualmente desde una línea recta y al final alcanza una curvatura pronunciada en $y/d_0 = 0.938$, cuyo valor de $AR^{2/3}/d_0^{8/3}$ es máximo. Como el valor de n se supone constante, esta relación $y/d_0 = 0.938$ también corresponde al máximo valor de la conductividad K. La pendiente de la tangente a la curva en esta profundidad, de acuerdo con la gráfica en la cual las ordenadas y las abscisas se intercambian, es horizontal y, por consiguiente, el exponente hidráulico N es igual a 0. Para profundidades con una relación mayor que $y/d_0 = 0.938$, la curva muestra una disminución en el valor de $AR^{8/3}/d_0^{8/3}$ y, por consiguiente, un descenso en la conductividad K, si n se supone constante. La pendiente de la tangente a la curva y con ésta el exponente hidráulico se volverán negativos.

6-4. Características del flujo a superficie libre en un conducto cerrado. Tomando como ejemplo la sección circular, en la figura 6-5 se muestran mediante líneas continuas las curvas adimensionales para $AR^{2/3}/A_0R_0^{2/3}$ y $R^{2/3}/R_0^{2/3}$. El subíndice 0 indica la condición de flujo lleno. Si se supone que el valor de n es constante o independiente de la variación de la profundidad, estas dos curvas representarán la variación de las relaciones del caudal y la velocidad con sus valores correspondientes a flujo lleno (es decir, Q/Q_0 y V/V_0). Tanto la curva de caudal como la de velocidad muestran valores máximos, los cuales ocurren alrededor de $0.938d_0$ y $0.81d_0$, de manera respectiva. Matemáticamente puede obtenerse la profundidad correspondiente a caudal máximo, o $0.938d_0$, simplemente igualando a cero la primera derivada de $AR^{2/3}$ con respecto a y, debido a que el caudal calculado mediante la ecuación de Manning es proporcional a $AR^{2/3}$, para n y S constantes. De manera similar, debido a que la velocidad calculada con la ecuación de Manning es proporcional a $R^{2/3}$, puede obtenerse la profundidad correspondiente a máxima velocidad, o $0.81d_0$, al igualar a cero la primera derivada de $R^{2/3}$. Además, la curva adimensional de Q/Q_0 muestra que, cuando la profundidad es mayor que alrededor de $0.82d_0$, es posible tener dos profundidades diferentes para el mismo caudal, una por encima y otra por debajo del valor de $0.938d_0$. Del mismo modo, la curva de V/V_0 muestra que, cuando la profundidad es mayor que la correspondiente a la mitad del diámetro, es posible tener dos profundidades diferentes para la misma velocidad, una por encima y otra por debajo del valor de $0.81d_0$.

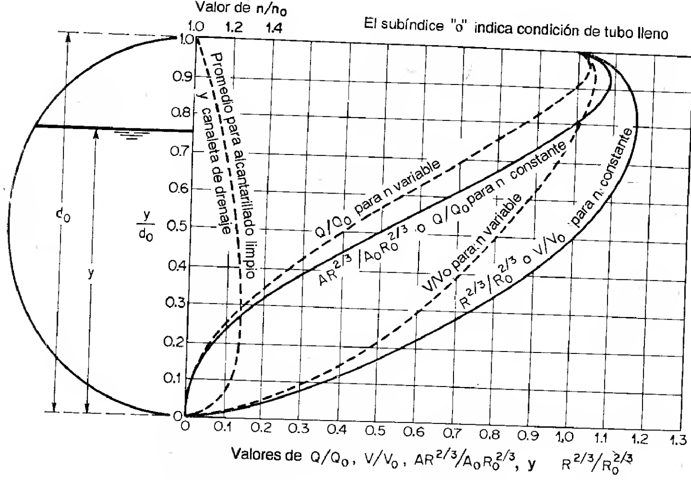


Figura 6-5. Características del flujo en una sección circular (*según T. R. Camp* [27], *capítulo* 5).

El análisis anterior se basa en la suposición de que el coeficiente de rugosidad permanece constante a medida que la profundidad cambia. En realidad, se ha demostrado que el valor de n para tubos de alcantarillado y canaletas de drenaje limpias, tanto en arcilla como en concreto, por ejemplo, se incrementa hasta el 28% de $1.00d_0$ a $0.25d_0$, donde dicho coeficiente aparece como un máximo (*véase* figura 6-5 y el análisis en la sección 5-8 respecto al nivel como un factor que afecta el valor de n). Este efecto tiene como consecuencia que el caudal y la velocidad máximos reales ocurran a profundidades alrededor de $0.97d_0$ y $0.94d_0$, respectivamente. En la figura 6-5 se muestran, mediante líneas punteadas, las curvas correspondientes de Q/Q_0 y V/V_0. De acuerdo con la suposición de un valor constante de n, la velocidad debería ser la misma para un flujo con profundidad igual a la mitad del diámetro que para un flujo o tubo lleno; por otro lado, si se supone que el valor de n varía con la profundidad, tal como se muestra, la velocidad de flujo medio es sólo 0.8 de la velocidad de flujo lleno.

El análisis anterior para conductos circulares también se aplica a cualquier conducto cerrado con techo que se cierra gradualmente. Las profundidades exactas correspondientes a caudal y velocidad máximas, sin embargo, dependerán de la forma y de la variación de la rugosidad de la sección del conducto específico. Como el caudal y la velocidad máximos de un conducto cerrado con clave que se cierra gradualmente no ocurre en la profundidad total, esto significa que el conducto no fluirá lleno con su máxima capacidad, en cuanto mantenga un flujo de canal abierto con una pendiente uniforme libre de obstrucciones. Sin embargo, para propósitos prácticos, algunas veces puede suponerse que el caudal máximo de un conducto circular o un conducto cerrado similar con clave que se cierra gradualmente ocurre

a profundidad total; debido a que la profundidad para caudal máximo es tan cercana al techo de la tubería, siempre existe la posibilidad de que un pequeño remanso incremente esta profundidad a valores cercanos a la profundidad o, eventualmente, igual a ella.

6-5. Flujo en una sección de canal con rugosidad compuesta. En canales simples, la rugosidad a lo largo del perímetro mojado puede ser muy diferente en distintas partes del perímetro, pero la velocidad media aún puede calcularse a partir de una ecuación de flujo uniforme sin subdividir la sección. Por ejemplo, un canal rectangular construido con fondo en madera y paredes en vidrio debe tener diferentes valores de n para el fondo y las paredes. Al aplicar la ecuación de Manning a tales canales, algunas veces se necesita calcular un *valor equivalente* de n para el perímetro completo y utilizar este valor equivalente para el cálculo de flujo en toda la sección.

Para la determinación de la rugosidad equivalente, el área mojada se divide imaginariamente en N partes para cada una de las cuales se conocen los perímetros mojados $P_1, P_2, \ldots, P_N$ y los coeficientes de rugosidad $n_1, n_2, \ldots, n_N$. Horton [6] y Einstein [7, 8] supusieron que cada parte del área tiene la misma velocidad media, las cuales a su vez son iguales a la velocidad media de la sección completa, es decir, $V_1 = V_2 = \ldots = V_N = V$. Con base en esta suposición, el coeficiente de rugosidad equivalente puede obtenerse mediante la siguiente ecuación:

$$n = \left[\frac{\sum_1^N (P_N n_N^{1.5})}{P}\right]^{2/3} = \frac{(P_1 n_1^{1.5} + P_2 n_2^{1.5} + \cdots + P_N n_N^{1.5})^{2/3}}{P^{2/3}} \tag{6-17}$$

Existen muchas otras suposiciones para el cálculo de una rugosidad equivalente. Pavlovskiĭ [9] y también Mühlhofer [10] y Einstein y Banks [11] supusieron que la fuerza total resistente al flujo (es decir, KV^2PL; *véase* sección 5-4) es igual a la suma de las fuerzas de resistencia al flujo desarrolladas en las áreas subdivididas. De acuerdo con esta suposición, el coeficiente de rugosidad equivalente es

$$n = \frac{\left[\sum_1^N (P_N n_N^2)\right]^{1/2}}{P^{1/2}} = \frac{(P_1 n_1^2 + P_2 n_2^2 + \cdots + P_N n_N^2)^{1/2}}{P^{1/2}} \tag{6-18}$$

Lotter [12] supuso que el caudal total del flujo es igual a la suma de los caudales de las áreas subdivididas. Luego, el coeficiente de rugosidad equivalente es

$$n = \frac{PR^{5/3}}{\sum_1^N \left(\frac{P_N R_N^{5/3}}{n_N}\right)} = \frac{PR^{5/3}}{\frac{P_1 R_1^{5/3}}{n_1} + \frac{P_2 R_2^{5/3}}{n_2} + \cdots + \frac{P_N R_N^{5/3}}{n_N}} \tag{6-19}$$

donde $R_1, R_2, \ldots, R_N$ son los radios hidráulicos de las áreas subdivididas. Para secciones de canal simples, puede suponerse que

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_N = R$$

Rugosidad de canales cubiertos de hielo. Cuando un canal se encuentra cubierto de hielo, el perímetro mojado de flujo se aumenta de manera apreciable. La superficie interior de la cubierta de hielo puede ser tan lisa como una superficie de concreto bien terminada, o tan rugosa como el lecho natural del canal cuando existen bloques de hielo flotantes. La tabla 6-1 da los valores de n para canales dragados cubiertos de hielo, tal como lo propuso Lotter [13].

Tabla 6-1. Valores de n para canales dragados cubiertos de hielo.

Condición del hielo	Velocidad de flujo, pies/s	Valor n
Hielo liso:		
Sin bloques flotantes de hielo	1.3-2.0	0.010-0.012
	> 2.0	0.014-0.017
Con bloques flotantes de hielo	1.3-2.0	0.016-0.018
	> 2.0	0.017-0.020
Hielo rugoso con bloques flotantes	....	0.023-0.025

Sean n y n_1 los coeficientes de rugosidad para canales con cubierta de hielo y sin ella, respectivamente. A partir de las ecuaciones (6-17) a (6-19) es posible calcular el coefieiente de rugosidad n_2 de la cubierta de hielo. Sin embargo, el coeficiente calculado de este modo algunas veces puede tener un valor negativo, lo cual por supuesto no es real.

Para desarrollar una aproximación más real al problema, Pavlovskiĭ [14] supuso que la fuerza total de resistencia al flujo es igual a la suma de las fuerzas de resistencia debidas al lecho del canal y a la cubierta de hielo. Por tanto, de acuerdo con lo indicado en la sección 5-4,

$$KV^2LP = K_1V^2LP_1 + K_2V^2LP_2 \qquad (6\text{-}20)$$

donde el subíndice 1 se refiere al lecho del canal y el subíndice 2 a la cubierta de hielo. Como el C de Chézy es igual a $\sqrt{w/K}$ o $K = w/C^2$, la anterior ecuación se convierte en

$$\frac{P}{C^2} = \frac{P_1}{C_1^2} + \frac{P_2}{C_2^2} \qquad (6\text{-}21)$$

Si el perímetro mojado correspondiente a la cubierta de hielo es $P_2 = aP_1$ o $P = P_1 + P_2 = (1 + a)P_1$; entonces

$$\frac{1 + a}{C^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{a}{C_2^2} \qquad (6\text{-}22)$$

Como, a partir de la ecuación (5-7), $C = 1.49R^{1/6}/n$,

$$\frac{(1 + a)n^2}{R^{1/3}} = \frac{n_1^2}{R_1^{1/3}} + \frac{an_2^2}{R_2^{1/3}} \qquad (6\text{-}23)$$

Además, se supone que el radio hidráulico total R consta de dos partes: el radio hidráulico R_1 debido al lecho del canal, y el radio hidráulico R_2 debido a la cubierta de hielo; es decir, $R = R_1 + R_2$. Ahora, sea $\epsilon_1 = R_1/R_2$ y $\epsilon_2 = n_1/n_2$. Entonces la ecuación (6-23) se reduce a

$$(1 + a)n^2 = n_2^2\left(1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right)^{1/3}(\epsilon_2^2 + a\epsilon_1^{1/3}) \qquad (6\text{-}24)$$

Para la condición de caudal máximo, Pavlovskiĭ postuló que la relación entre R_1, R_2 y n es tal que $dn/d\epsilon_1 = 0$. Luego, en la ecuación (6-24), $\epsilon_2^2 = a\ \epsilon_1^{4/3}$, y

$$n = \frac{n_2}{\sqrt{1 + a}}(a^{3/4} + \epsilon_2^{3/2})^{2/3} \qquad (6\text{-}25)[4]$$

Para canales anchos puede suponerse que $P_1 = P_2$, es decir, $a = 1$. Luego, $\epsilon_2^2 = \epsilon_1^{4/3}$, y

$$n = \frac{n_2}{\sqrt{2}}(1 + \epsilon_2^{3/2})^{2/3} \qquad (6\text{-}27)$$

Por consiguiente, el coeficiente de rugosidad para la cubierta de hielo es

$$n_2 = (1.68n^{3/2} - n_1^{3/2})^{2/3} \qquad (6\text{-}28)$$

Ahora, sean Q y Q_1 los caudales con cubierta de hielo y sin ella, respectivamente. Luego, a partir de la ecuación de Manning y suponiendo que $R = R_1/2$, donde R y R_1 son los radios hidráulicos con cubierta de hielo y sin ella, respectivamente, el caudal en un canal cubierto de hielo es

$$Q = 0.63\frac{n_1}{n}Q_1 \qquad (6\text{-}29)$$

Canales de sección compuesta. La sección transversal de un canal puede componerse de distintas subsecciones, cada una de ellas con diferente rugosidad que las demás. Por ejemplo, un canal aluvial sujeto a crecientes estacionales por lo general consta de un canal principal y dos canales laterales (figura 6-6). A menudo se encuentra que los canales laterales son más rugosos que el canal principal, luego la velocidad media en el canal principal es mayor que las velocidades medias en los canales laterales. En tal caso, la ecuación de Manning puede aplicarse por separado a cada subsección para determinar la velocidad media de la subsección. Luego, pueden calcularse los caudales en las subsecciones. Por consiguiente, el caudal total es igual a la suma de estos canales parciales. La velocidad media para la sección transversal completa del canal es igual al caudal total dividido por el área mojada total.

[4] Pavlovskiĭ [14] utilizó la relación $C = R^{1/4}/n$ en lugar de la ecuación (5-7), obteniendo

$$n = \frac{n_2}{\sqrt{1 + a}}(a^{2/3} + \epsilon_2^{4/3})^{3/4} \qquad (6\text{-}26)$$

Fue Belokon [15] quien utilizó la ecuación (5-7).

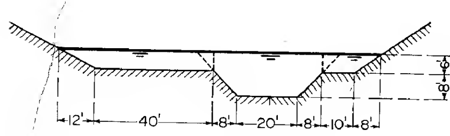


Figura 6-6. Un canal compuesto por una sección principal y dos secciones laterales.

Debido a las diferencias que existen entre las velocidades de las subsecciones, los coeficientes de distribución de velocidades de la sección completa son diferentes de aquéllos de las subsecciones. Los valores de estos coeficientes pueden calcularse como sigue:

Sean $v_1, v_2 \ldots, v_N$ las velocidades medias en las subsecciones; sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ los coeficientes de distribución de velocidad para las subsecciones correspondientes; sean $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_N$ las áreas mojadas para las correspondientes subsecciones; sean $K_1, K_2, \ldots, K_N$ las conductividades correspondientes a las subsecciones; sea V la velocidad media de la sección total; y sea A el área mojada total. A partir de la ecuación de continuidad y de la ecuación (6-3), puede escribirse lo siguiente:

$$v_1 = \frac{K_1}{\Delta A_1} S^{1/2} \qquad v_2 = \frac{K_2}{\Delta A_2} S^{1/2} \qquad \cdots \qquad v_N = \frac{K_N}{\Delta A_N} S^{1/2}$$

$$Q = VA = v_1 \Delta A_1 + v_2 \Delta A_2 + \cdots + v_N \Delta A_N$$

$$= (K_1 + K_2 + \cdots + K_N) S^{1/2} = \left(\sum_1^N K_N\right) S^{1/2}$$

y

$$V = \frac{\left(\sum_1^N K_N\right) S^{1/2}}{A}$$

Al incorporar las anteriores expresiones en las ecuaciones (2-4) y (2-5) y al simplificar, los coeficientes de distribución de velocidades para la sección completa son:

$$\alpha = \frac{\sum_1^N (\alpha_N K_N^3 / \Delta A_N^2)}{\left(\sum_1^N K_N\right)^3 / A^2} \qquad (6\text{-}30)$$

y

$$\beta = \frac{\sum_1^N (\beta_N K_N^2 / \Delta A_N)}{\left(\sum_1^N K_N\right)^2 / A} \qquad (6\text{-}31)$$

Ejemplo 6-1. Calcule los coeficientes de distribución de velocidades correspondientes al flujo pico en un canal de una corriente natural compuesto por una sección principal y una sección lateral de flujo de desborde. Los datos obtenidos en el nivel de flujo pico son:

Subsección	A, pies²	P, pies	Valor n	α	β
Sección principal.	5,360	225	0.035	1.10	1.04
Sección lateral.	5,710	405	0.040	1.11	1.04

Solución. Los cálculos son los siguientes:

Subsección	ΔA	P	R	$R^{2/3}$	n	K	$\beta K^2/\Delta A$	$\alpha K^3/\Delta A^2$
Sección principal	5,360	225	23.8	8.29	0.035	1.892×10^6	6.94×10^8	25.93×10^{10}
Sección lateral	5,710	405	14.1	5.85	0.040	1.244×10^6	2.82×10^8	6.56×10^{10}
Total	11,070	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	3.136×10^6	9.76×10^8	32.49×10^{10}

A partir de las ecuaciones (6-30) y (6-31), los coeficientes son

$$\alpha = \frac{32.49 \times 10^{10}}{(3.136 \times 10^6)^3/11{,}070^2} = 1.29$$

y

$$\beta = \frac{9.76 \times 10^8}{(3.136 \times 10^6)^2/11{,}070} = 1.10$$

6-6. Cálculo de la profundidad normal y de la velocidad normal. A partir de la ecuación de flujo uniforme pueden calcularse la profundidad normal y la velocidad normal. En los siguientes cálculos se utiliza la ecuación de Manning con tres métodos diferentes de solución[5].

A. Método algebraico. Para secciones de canal geométricamente simples, la condición de flujo uniforme puede determinarse mediante una solución algebraica, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6-2. Un canal trapezoidal (figura 2-2), con $b = 20$ pies, $z = 2$, $S_o = 0.0016$ y $n = 0.025$, transporta un caudal de 400 pies³/s. Calcule la profundidad y la velocidad normales.

Solución 1. *La aproximación analítica.* El radio hidráulico y el área mojada de la sección determinada se expresan en términos de la profundidad y como

$$R = \frac{y(10 + y)}{10 + y\sqrt{5}} \qquad \text{y} \qquad A = y(20 + 2y)$$

La velocidad es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{400}{y(20 + 2y)}$$

[5] Aparte de los métodos aquí descritos, existen otros métodos para el cálculo de flujo uniforme, tales como el uso de tablas hidráulicas. En [16] a [20] se pueden encontrar tablas muy conocidas para este propósito.

Al sustituir las cantidades dadas y las expresiones anteriores en la ecuación de Manning, y al simplificar,

$$\frac{200}{y(10+y)} = \frac{1.49}{0.025}\left[\frac{y(10+y)}{10+y\sqrt{5}}\right]^{2/3} 0.0016^{1/2}$$

o

$$7{,}680 + 1{,}720y = [y(10+y)]^{2.5}$$

Al resolver esta ecuación para y mediante el método del ensayo y error, $y_n = 3.36$ pies. Ésta es la profundidad normal. El área correspondiente es $A_n = 89.8$ pies^2 y la velocidad normal es $V_n = 400/89.8 = 4.46$ pies/s. A partir del ejemplo 4-2, se sabe que la profundidad crítica para el mismo caudal en el canal es 2.15 pies. Como la profundidad normal es mayor que la profundidad crítica, el flujo es subcrítico.

Solución 2. La aproximación mediante ensayo y error. Algunos ingenieros prefieren resolver este tipo de problema mediante ensayo y error. A partir de los datos determinados, la parte derecha de la ecuación (6-8) es $nQ/1.49\sqrt{S} = 167.7$. Luego, se asume un valor de y y se calcula el factor de sección $AR^{2/3}$. Se hacen varios tanteos hasta que el valor calculado de $AR^{2/3}$ sea casi igual a 167.7; luego el valor de y supuesto para el tanteo más cercano es la profundidad normal. Este cálculo mediante ensayo y error se muestra como sigue:

y	A	R	$R^{2/3}$	$AR^{2/3}$	Anotaciones
3.00	78.0	2.34	1.762	137.4	y muy pequeña
3.50	94.5	2.65	1.915	181.0	y muy grande
3.30	87.7	2.53	1.852	162.6	
3.35	89.5	2.56	1.870	167.2	
3.36	89.8	2.56	1.870	168.0	La más cercana

La profundidad normal es, por consiguiente, $y_n = 3.36$ pies.

B. Método gráfico. Para canales con secciones transversales complicadas y con condiciones de flujo variables, se encuentra conveniente una solución gráfica al problema. Mediante este procedimiento, primero se construye una curva de y contra el factor de sección $AR^{2/3}$ y se calcula el valor de $nQ/1.49\sqrt{S}$. De acuerdo con la ecuación (6-8), es evidente que la profundidad normal puede encontrarse en la curva de y-$AR^{2/3}$, donde la coordenada de $AR^{2/3}$ es igual al valor calculado de $nQ/1.49\sqrt{S}$. Cuando cambia el caudal, se calculan los nuevos valores de $nQ/1.49\sqrt{S}$ y la nueva profundidad normal correspondiente se encuentra en la misma curva.

Ejemplo 6-3. Determine la profundidad normal de flujo de una alcantarilla de 36 pulg de diámetro (ejemplo 4-3) colocada en una pendiente de 0.0016, con $n = 0.015$, que transporta un caudal de 20 pies3/s.

Solución. Se construye una curva de y *versus* $AR^{2/3}$ para la alcantarilla dada (figura 6-7). Se calcula $nQ/1.49\sqrt{S} = 0.015 \times 20/1.49\sqrt{0.0016} = 5.04$. A partir de la curva y-$AR^{2/3}$, se encuentra la profundidad correspondiente al valor de 5.04 para $AR^{2/3}$. Ésta es la profundidad normal requerida, o $y_n = 2.16$ pies. Como esta profundidad es mayor que la profundidad crítica encontrada en el ejemplo 4-3, bajo la misma condición, entonces el flujo es subcrítico.

La tabla del apéndice A para los elementos geométricos de una sección circular también puede utilizarse para solucionar este problema. Como $d_o = 3.0$ pies y $d_o^{8/3} = 18.75$, $AR^{2/3}/d_o^{8/3} = 5.04/18.75 = 0.269$. En la tabla, $y/d_o = 0.72$ o $y = 0.72 \times 3 = 2.16$ pies.

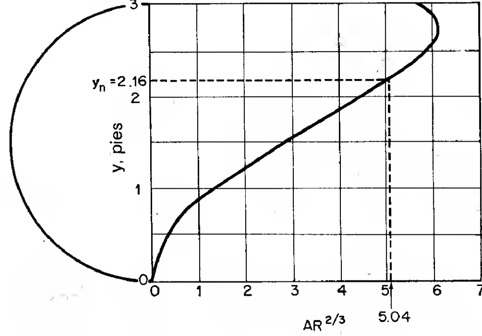


Figura 6-7. Curva de y *versus* $AR^{2/3}$ para una sección circular.

C. Método de las tablas de diseño. Las tablas de diseño para determinar la profundidad normal (figura 6-1) pueden utilizarse con gran rapidez.

En el ejemplo 6-2, $AR^{2/3} = 167.7$. El valor de $AR^{2/3}/b^{8/3}$ es 0.0569. Para este valor, la tabla da $y/b = 0.168$ o $y_n = 3.36$ pies.

En el ejemplo 6-3, $AR^{2/3}/d_o^{8/3} = 0.269$. Para este valor, la tabla da $y/d_o = 0.72$ o $y = 0.72 \times 3 = 2.16$ pies.

6-7. Cálculo de las pendientes normal y crítica. Cuando se conocen el caudal y la rugosidad, la ecuación de Manning puede utilizarse para determinar la pendiente en un canal prismático en el cual el flujo es uniforme a determinada profundidad normal de flujo y_n. La pendiente determinada de esta manera algunas veces se llama específicamente *pendiente normal* S_n.

Al variar la pendiente del canal hasta cierto valor, es posible cambiar la profundidad normal y hacer que el flujo uniforme ocurra en un estado crítico para el caudal y la rugosidad deterrminados. La pendiente así obtenida es la *pendiente crítica* S_c, y la profundidad normal correspondiente es igual a la profundidad crítica. La pendiente crítica mínima para un canal de forma y rugosidad determinadas se conoce como *pendiente límite* S_L.

Además, al ajustar la pendiente y el caudal puede obtenerse un flujo uniforme crítico a determinada profundidad normal. La pendiente así obtenida se conoce como *pendiente crítica a determinada profundidad normal,* S_{cn}.

Los siguientes ejemplos ilustrarán el análisis anterior.

Ejemplo 6-4. Un canal trapezoidal tiene un ancho de 20 pies en la base, pendientes laterales de 2:1 y $n = 0.025$.

a. Determine la pendiente normal correspondiente a una profundidad normal de 3.36 pies cuando el caudal es 400 pies^3/s.

b. Determine la pendiente crítica y la correspondiente profundidad normal cuando el caudal es 400 pie^3/s.

c. Determine la pendiente crítica correspondiente a la profundidad normal de 3.36 pies y calcule el caudal correspondiente.

Solución. *a*) A partir de los datos conocidos, se encuentra que $R = 2.56$ pies y que $V = 4.46$ pies/s. Al sustituir estos valores en la ecuación de Manning y al resolver para S_n,

$$4.46 = \frac{1.49}{0.025} 2.56^{2/3} S_n^{1/2}$$

o

$$S_n = 0.0016$$

Ésta es la pendiente que mantendrá el flujo uniforme en el canal dado a una profundidad de 3.36 pies y un caudal de 400 pies³/s (*véase* el ejemplo 6-2).

b. A partir de los datos conocidos se encuentra que la profundidad crítica es 2.15 pies (*véase* el ejemplo 4-2). Los valores correspondientes de R y V son $R = 1.97$ pies y $V = 7.66$ pies/s. Al sustituir los valores conocidos en la ecuación de Manning y al resolver para S_c,

$$7.66 = \frac{1.49}{0.025} 1.97^{2/3} S_c^{1/2}$$

o

$$S_c = 0.0067$$

Ésta es la pendiente que mantendrá un flujo uniforme y crítico en el canal determinado para un caudal de 400 pies³/s. La profundidad de flujo es 2.15 pies.

c. A partir de la profundidad normal de 3.36 pies, se encuentra que $R = 2.56$ pies, $A = 89.8$ pies², $D = 2.68$, y, a partir de la ecuación (1-11), la velocidad crítica es $V_c = \sqrt{2.68g} = 9.3$ pies/s. Al sustituir los valores conocidos en la ecuación de Manning y resolver para S_{cn},

$$9.3 = \frac{1.49}{0.025} 2.56^{2/3} S_{cn}^{1/2}$$

o

$$S_{cn} = 0.0070$$

Ésta es la pendiente que mantendrá un flujo uniforme y crítico en el canal determinado a la profundidad normal de 3.36 pies. El caudal correspondiente es igual a $9.3 \times 89.8 = 835$ pies³/s.

Ejemplo 6-5. Determine la pendiente límite para un canal rectangular (figura 6-8) con $b = 10$ pies y $n = 0.015$.

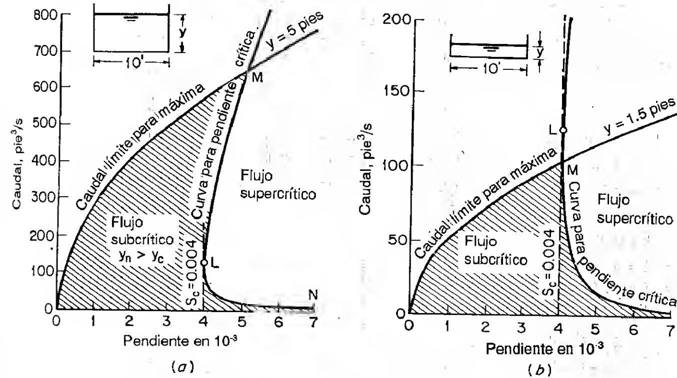


Figura 6-8. Caudal versus pendiente crítica.

Solución. Como la pendiente límite es la pendiente críiea mínima, su valor puede determinarse gráficamente a partir de una curva de la pendiente crítica graficada contra el caudal.

Para determinar la pendiente crítica deben satisfacerse las siguientes dos condiciones:

1. A partir de la ecuación (6-3), la primera condición, es

$$Q = K\sqrt{S_c} \tag{6-32}$$

o, cuando se utiliza la ecuación de Manning,

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3}\sqrt{S_c} \tag{6-33}$$

o, para el canal rectangular,

$$Q = \frac{1.49}{n} 10y\left(\frac{10y}{10+2y}\right)^{2/3}\sqrt{S_c} \tag{6-34}$$

2. A partir de la ecuación (4-3), la segunda condición, es

$$Q = Z_c\sqrt{g} \tag{6-35}$$

o, para el canal rectangular,

$$Q = 10\sqrt{g}\, y^{1.5} \tag{6-36}$$

A partir de las ecuaciones (6-34) y (6-36) y al eliminar y, puede establecerse la relación entre Q y S_c. Sin embargo, esta relación se expresa como una función implícita, y una solución directa es matemáticamente complicada. Una solución práctica al problema es suponer diferentes valores de y, sustituir y en la ecuación (6-36) y resolver para Q, y luego sustituir y y Q en la ecuación (6-34) y resolver para S_c. Siguiendo este procedimiento, se calculó y se graficó la relación entre Q y S_c, como se muestra en la figura 6-8. La curva graficada *MLN* indica un valor mínimo de $S_c = 0.004$ en L, que es la pendiente límite requerida.

Al suponer que la máxima profundidad de flujo esperada en el canal es 5 pies, puede construirse una curva *OM* de caudal (figura 6-8*a*) de acuerdo con la ecuación (6-9). Resulta evidente que, dentro del área sombreada entre las curvas *OM* y *MLN*, todos los flujos esperados serán subcríticos. En la parte derecha de las curvas, los flujos serán supercríticos. Como el punto L se encuentra por debajo de la curva *OM*, la pendiente límite es posible en el rango de flujo esperado.

De igual modo, si se supone que la profundidad de flujo máxima esperada es 1.5 pies, las curvas se muestran en la figura 6-8*b*. En este caso, el punto L se encuentra por encima de la curva *OM*; por consiguiente, no puede esperarse que la pendiente límite ocurra en el rango bajo consideración.

6-8. Problemas de cálculo de flujo uniforme. El cálculo de flujo uniforme puede llevarse a cabo a partir de dos ecuaciones: la ecuación de continuidad y una ecuación de flujo uniforme. Cuando se utiliza la ecuación de Manning como ecuación de flujo uniforme, el cálculo involucrará las siguientes seis variables:

1. El caudal normal Q
2. La velocidad media de flujo V
3. La profundidad normal y
4. El coeficiente de rugosidad n
5. La pendiente de canal S
6. Los elementos geométricos que dependen de la forma de la sección de canal, como A, R, etc.

Cuando se conocen cuatro de las anteriores seis variables, las dos restantes pueden determinarse a partir de las dos ecuaciones. Los siguientes son algunos de los tipos de problemas de cálculo de flujo uniforme:

A. Calcular el caudal normal. En aplicaciones prácticas, este cálculo se requiere para la determinación de la capacidad de un canal determinado o para la construcción de una curva de calibración sintética para el canal.

B. Determinar la velocidad de flujo. Este cálculo tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, a menudo se requiere para el estudio de efectos de socavación y sedimentación de un canal determinado.

C. Calcular la profundidad normal. Este cálculo se requiere para la determinación del nivel de flujo en un canal determinado.

D. Determinar la rugosidad del canal. Este cálculo se utiliza para averiguar el coeficiente de rugosidad en un canal determinado. El coeficiente determinado de esta manera puede utilizarse en otros canales similares.

E. Calcular la pendiente del canal. Este cálculo se requiere para ajustar la pendiente de un canal determinado.

F. Determinar las dimensiones de la sección de canal. Este cálculo se requiere principalmente para propósitos de diseño.

La tabla 6-2 relaciona las variables, conocidas y desconocidas involucradas en cada uno de los seis tipos de problemas antes mencionados. Las variables conocidas se indican mediante una marca de verificación (√) y las incógnitas requeridas en el problema mediante un símbolo de interrogación (?). Las variables desconocidas que pueden determinarse con las variables conocidas se indican mediante un guión (—). La última columna de la tabla muestra el ejemplo dado en este libro para cada tipo de problema. Los ejemplos mostrados entre parentesis se resuelven a partir de la ecuación de Chézy. Sin embargo, nótese que la tabla 6-2 no incluye todos los tipos de problemas. Al variar combinaciones de diferentes variables, conocidas y desconocidas, pueden formarse más tipos de problemas. En problemas de diseño, se introduce el uso de la sección hidráulicamente óptima y de reglas empíricas (sección 7-7) y por consiguiente se crean nuevos tipos de problemas.

Tabla 6-2. Algunos tipos de problemas de cálculo de flujo uniforme.

Tipo de problema	Caudal Q	Velocidad V	Profundidad y	Rugosidad n	Pendiente S	Elementos geométricos	Ejemplo
A	?	—	√	√	√	√	Prob. 5-5, (ej. 5-1)
B	—	?	√	√	√	√	Prob. 5-5, (ej. 5-1)
C	√	—	?	√	√	√	Ejemplo 6-2
D	√	—	√	?	√	√	Prob. 5-6
E	√	—	√	√	?	√	Ejemplo 6-4*a*
F	√	—	√	√	√	?	Ejemplo 7-2

6-9. Cálculo de caudal de crecientes. En el cálculo del flujo uniforme se entiende, en teoría, que la pendiente de energía, S_f, en la ecuación de flujo uniforme es igual a la pendiente longitudinal del perfil de la superficie de agua y también a la pendiente del fondo del canal (sección 5-1). Sin embargo, en corrientes naturales estas tres pendientes sólo son aproximadamente iguales. Debido a las condiciones irregulares del canal, la línea de energía, la superficie del agua y el fondo del canal, en rigor, no pueden ser paralelos el uno con respecto a los otros. Si el cambio en la velocidad dentro del tramo del canal no es apreciable, puede suponerse que la pendiente de energía es casi igual a las pendientes de fondo o de superficie. Por otra parte, si la velocidad varía de manera apreciable desde un extremo del tramo hasta el otro, debe tomarse la pendiente de energía como la diferencia entre las alturas totales en los extremos del tramo dividida por la longitud de éste. Como la altura total incluye la altura de velocidad, la cual es desconocida, se necesita una solución por aproximaciones sucesivas para el cálculo del caudal.

Durante los niveles de crecientes, la velocidad varía ampliamente y la altura de velocidad debería incluirse en la altura total para determinar la pendiente de energía. Además, el flujo de crecientes es, de hecho, variado y no permanente, y el uso de una ecuación de flujo uniforme para el cálculo de caudal es aceptable sólo cuando los cambios en el nivel de creciente y de caudal son relativamente graduales.

El uso directo de una ecuación de flujo uniforme para la determinación de los caudales de crecientes se conoce como *método de área-pendiente*. También, el caudal de creciente puede determinarse utilizando otro método bien conocido, llamado *método de la apertura contraída*, en el que se aplica el principio de energía directamente a una apertura contraída en la corriente. Ambos métodos[6] requieren información acerca de las marcas de aguas altas que son detectables en el tramo inundado. Lugares buenos para recolectar tal información pueden encontrarse no sólo en las corrientes principales, sino también en tributarios pequeños, pero éstos deben ser canales de valle comparativamente regulares libres de curvas y por consiguiente bien apropiados para el método de área-pendiente o aperturas contraídas con constricciones suficientes para producir un incremento definitivo en la altura y la velocidad y por consiguiente apropiados para el método de la apertura contraída.

La siguiente es una descripción del método de área-pendiente[7]. El método de la apertura contraída se relaciona con el flujo rápidamente variado y, por consiguiente, será descrito más adelante en la sección 17-6.

El método de área-pendiente. La siguiente información es necesaria para el método de área-pendiente: la determinación de la pendiente de energía en el tramo del canal, la medición del área de la sección transversal promedio y la longitud del tramo, y la estimación del coeficiente de rugosidad aplicable al tramo del canal, de tal modo que puedan calcularse las pérdidas por fricción. Cuando se obtiene esta

[6] Para una descripción completa de los métodos *véase* [21].

[7] Nótese que en realidad el método de área-pendiente está relacionado con flujo gradualmente variado, pero se considera que a este nivel de lectura el lector debe ser capaz de seguir el procedimiento aquí descrito. Este método muestra cómo puede aplicarse la ecuación de flujo uniforme a flujo gradualmente variado y abre el camino para un tratamiento más concreto sobre el tema de flujo gradualmente variado en la parte III.

información, el caudal puede calcularse mediante una ecuación de flujo uniforme, como la de Manning. El procedimiento de cálculo es como sigue:

1. A partir de los valores conocidos de A, R y n se calculan las conductividades K_u y K_d, respectivamente, de las secciones del tramo, aguas arriba y aguas abajo.

2. Se calcula la conductividad promedio K del tramo como la media geométrica de K_u y K_d, o

$$K = \sqrt{K_u K_d} \qquad (6\text{-}37)$$

3. Al suponer una altura de velocidad igual a cero, la pendiente de energía es igual a la caída F de la superficie de agua en el tramo dividida por la longitud L del tramo, o

$$S = \frac{F}{L} \qquad (6\text{-}38)$$

El caudal correspondiente, por consiguiente, puede calcularse a partir de la ecuación (6-3), o

$$Q = K\sqrt{S} \qquad (6\text{-}3)$$

la cual da una primera aproximación para el caudal.

4. Al suponer que el caudal es igual a la primera aproximación, se calculan las alturas de velocidad en las secciones de aguas arriba o aguas abajo, o $\alpha_u V_u^2/2g$ y $\alpha_d V_d^2/2g$; por consiguiente, la pendiente de energía es igual a

$$S = \frac{h_f}{L} \qquad (6\text{-}39)$$

donde

$$h_f = F + k(\alpha_u V_u^2/2g - \alpha_d V_d^2/2g) \qquad (6\text{-}40)$$

y k es un factor. Cuando el tramo se está contrayendo ($V_u < V_d$), $k = 1.0$. Cuando el tramo se está expandiendo ($V_u < V_d$), $k = 0.5$. Para un tramo que se expande a menudo se supone el 50% de disminución en el valor de k para la recuperación de altura de velocidad debido a la expansión del flujo. El caudal correspondiente se calcula mediante la ecuación (6-3) utilizando la pendiente revisada obtenida mediante la ecuación (6-39). Esto arroja la segunda aproximación del caudal.

5. Se repite el paso 4 para las aproximaciones 3 y 4, y así sucesivamente hasta que los caudales supuestos y calculados sean iguales.

6. Se promedian los caudales calculados para diferentes tramos, ponderándolos de igual manera o como las circunstancias lo indiquen.

Ejemplo 6-6. Calcule el caudal de creciente a través de un tramo de río de 500 pies que tiene valores conocidos de áreas mojadas, conductividades y coeficientes de energía en las secciones extremas de aguas arriba y aguas abajo. La caída en la superficie del agua dentro del tramo es igual a 0.50 pies.

Solución. Las áreas mojadas, las conductividades y los coeficientes de energía para las dos secciones extremas del tramo son:

$$A_u = 11{,}070 \quad K_u = 3.034 \times 10^6 \quad \alpha_u = 1.134$$
$$A_d = 10{,}990 \quad K_d = 3.103 \times 10^6 \quad \alpha_d = 1.177$$

El promedio $K = \sqrt{3.034 \times 10^6 \times 3.103 \times 10^6} = 3.070 \times 10^6$.

Para la primera aproximación, suponga $h_f = 0.50$ pies. Luego $S = 0.50/500 = 0.0010$, $\sqrt{S} = 0.0316$ y $Q = K\sqrt{S} = 3.070 \times 10^6 \times 0.0316 = 97{,}000$ pies³/s.

Para la segunda aproximación, suponga $Q = 97{,}000$ pies³/s. Luego las alturas de velocidad en las dos secciones extremas son:

$$\alpha_u \frac{V_u^2}{2g} = 1.134 \frac{(97{,}000/11{,}070)^2}{2g} = 1.354$$

$$\alpha_d \frac{V_d^2}{2g} = 1.177 \frac{(97{,}000/10{,}990)^2}{2g} = \frac{1.424}{-0.070}$$

Como V_u es menor que V_d, el flujo se está contrayendo, y $k = 1.0$. Luego $h_f = 0.500 - 0.070 = 0.430$, $S = 0.430/500 = 0.00086$, $\sqrt{S} = 0.0293$ y $Q = 3.070 \times 10^6 \times 0.0293 = 90{,}000$ pies³/s.

De igual modo, se hacen otras aproximaciones, como se muestran en la tabla 6-3. Se encuentra que el caudal estimado es 91,000 pies³/s.

Tabla 6-3. Cálculo del caudal de creciente mediante el método de área-pendiente para el ejemplo 6-6

Aproximación	Supuesto Q	F	$\alpha_u \frac{V_u^2}{2g}$	$\alpha_d \frac{V_d^2}{2g}$	h_f	S	$\sqrt{S}$	Calculado Q
1st	......	0.500	.....	.....	0.500	0.001000	0.0316	97,000
2d	97,000	0.500	1.354	1.424	0.430	0.000860	0.0293	90,000
3d	90,000	0.500	1.165	1.225	0.440	0.000880	0.0297	91,200
4th	91,200	0.500	1.195	1.258	0.437	0.000874	0.0296	91,000
5th	91,000	0.500	1.190	1.253	0.437	0.000874	0.0296	91,000

6-10. Flujo superficial uniforme. Cuando el agua fluye a través de una superficie muy ancha, se produce un flujo llamado *flujo superficial.* La profundidad de flujo puede ser muy pequeña en comparación con el ancho del flujo, de tal manera que éste se convierte en un flujo en canal abierto ancho, conocido específicamente como *flujo en láminas*. En una cuenca de drenaje el flujo superficial ocurre principalmente como resultado de la escorrentía natural, y se conoce como *flujo sobre el terreno*.

El flujo uniforme puede ser turbulento o laminar, dependiendo de factores como el caudal, la pendiente, la viscosidad y el grado de rugosidad superficial. Si las velocidades y profundidades de flujo son relativamente pequeñas, la viscosidad se convierte en un factor dominante y el flujo es laminar. En este caso se aplica la ley de viscosidad, de Newton. Esta ley expresa la relación entre la viscosidad dinámica μ y el esfuerzo cortante τ a una distancia y desde la superficie límite (figura 6-9), como sigue:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \qquad (6\text{-}41)$$

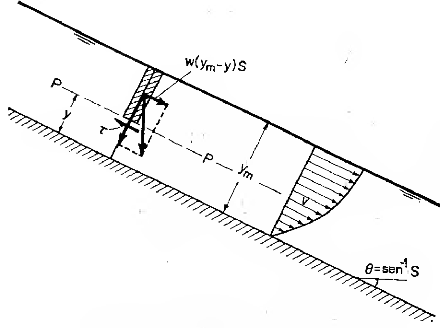


Figura 6-9. Flujo laminar uniforme en canal abierto.

Para flujo laminar uniforme, la componente de la fuerza gravitacional paralela al flujo en cualquier capa laminar es balanceada por la fuerza de fricción. En otras palabras, el esfuerzo cortante τ por unidad de área de flujo a lo largo de la capa laminar *PP* (figura 6-9) es igual a la componente efectiva de la fuerza gravitacional, es decir, $\tau = w(y_m - y)S$. Como $w = \rho g y$ $\mu/\rho = \nu$ (sección 1-3), entonces $\tau = g\mu(y_m - y)S/\nu$. Luego, a partir de la ecuación (6-41),

$$dv = \frac{gS}{\nu}(y_m - y)\,dy$$

Al integrar para $v = 0$ cuando $y = 0$,

$$v = \frac{gS}{\nu}\left(yy_m - \frac{y^2}{2}\right) \qquad (6\text{-}42)$$

Ésta es una ecuación cuadrática que indica que la velocidad de flujo laminar uniforme en un canal abierto ancho tiene una distribución parabólica. Al integrar la ecuación (6-42) desde $y = 0$ hasta $y = y_m$ y al dividir el resultado por y_m, se obtiene la siguiente velocidad promedio

$$V = \frac{1}{y_m}\int_0^{y_m} v\,dy = \frac{gSy_m^2}{3\nu} \qquad (6\text{-}43)$$

y el caudal por unidad de ancho es

$$q = C_L y_m^3 \qquad (6\text{-}44)$$

donde $C_L = gS/3\nu$, un coeficiente que involucra la pendiente y la viscosidad.

El flujo superficial uniforme se vuelve turbulento si la superficie es rugosa y si la profundidad de flujo es lo suficientemente larga para producir remolinos

persistentes. En este caso la rugosidad superficial es el factor dominante, y la velocidad puede expresarse mediante la ecuación de Manning. Luego, el caudal por unidad de ancho es

$$q = C_T y_m^{5/3} \qquad (6\text{-}45)$$

donde y_m es la profundidad de flujo promedio, y donde $C_T = 1.49S^{0.5}/n$ es un coeficiente que involucra la pendiente y la rugosidad.

El cambio de estado de flujo en láminas de laminar a turbulento ha sido estudiado por muchos ingenieros hidráulicos. Se ha encontrado que la región de transición ocurre indistintamente a **R** = 310 (Jeffreys [22]), de **R** = 300 a **R** = 330 (Hopf [23]), y de **R** = 548 a **R** = 773 (Horton [24]). Sin embargo, Horton creyó que el criterio de Reynolds no era satisfactorio para el flujo en láminas sobre superficies relativamente rugosas. Razonó que, en el punto de transición, las velocidades para flujo laminar y turbulento son casi iguales, debido a que esta condición de velocidades iguales representa la mínima cantidad de energía capaz de mantener el flujo turbulento. Luego, el flujo no puede ser turbulento si la velocidad es menor que

$$V = \frac{\nu}{4.83n^2 y_m^{2/3}} \qquad (6\text{-}46)$$

donde y_m es la profundidad de flujo promedio.

Como la superficie del terreno natural rara vez tiene una pendiente igual y uniforme, el flujo superficial es apto para cambiar de laminar a turbulento, y viceversa, dentro de distancias cortas. En consecuencia, el flujo es una mezcla entre laminar y turbulento. Para superficies muy rugosas o áreas densamente cubiertas por vegetación, en general el flujo es bastante turbulento. Experimentos han indicado que el caudal de flujo superficial por unidad de ancho de flujo varía con la profundidad promedio de flujo, como sigue:

$$q = Cy_m^x \qquad (6\text{-}47)$$

donde C es un coeficiente y el exponente x varía entre 1.0 para flujo muy turbulento y 3.0 para flujo mixto.

PROBLEMAS

6-1. Determine los caudales normales en canales que tienen las siguientes secciones para $y = 6$ pies, $n = 0.015$ y $S = 0.0020$:

a. Una sección rectangular de 20 pies de ancho.
b. Una sección triangular con un ángulo de fondo igual a 60°.
c. Una sección trapezoidal con un ancho de base de 20 pies y pendientes laterales de 1 a 2.
d. Una sección circular de 15 pies de diámetro.
e. Una sección parabólica con un ancho de 16 pies a una profundidad de 4 pies.

6-2. Compruebe la siguiente ecuación para el caudal a través de una cuneta tiangular de carretera (figura 6-10), la cual tiene un lado vertical, un lado en una pendiente de 1 en z, un n de Manning, una profundidad de flujo y y una pendiente longitudinal S:

$$Q = \frac{0.47}{n} f(z) y^{8/3} S^{1/2} \qquad (6\text{-}48)$$

donde

$$f(z) = \frac{z^{5/3}}{[1 + \sqrt{1 + z^2}]^{2/3}}$$

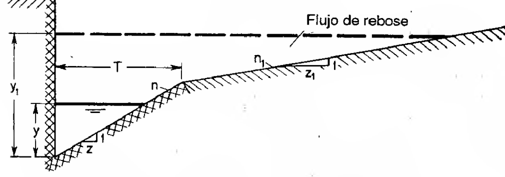


Figura 6-10. Sección de cuneta de carretera.

6-3. Calcule el caudal en la cuneta triangular de carretera descrita en el problema anterior cuando $z = 24$, $n = 0.017$, $y = 0.22$ pies y $S = 0.03$.

6-4. A partir de la ecuación de Manning, determine el exponente hidráulico N para las siguientes secciones de canales: *a*) un rectángulo muy angosto, *b*) un rectángulo muy ancho, *c*) una parábola muy ancha para la cual el perímetro mojado es prácticamente igual al ancho en la superficie, y *d*) un triángulo equilátero con un vértice en el fondo.

6-5. A partir de la ecuación de Chézy[8], demuestre que la ecuación general para el exponente hidráulico N es

$$N = \frac{y}{A}\left(3T - R\frac{dP}{dy}\right) \qquad (6\text{-}49)$$

6-6. Resuelva el problema 6-4 si el cálculo del exponente hidráulico se basa en la ecuación de Chézy. Compare los resultados con los obtenidos en el problema 6-4.

6-7. Calcule el exponente hidráulico N de la sección de canal trapezoidal (figura 2-2) que tiene una profundidad normal de 6 pies, a partir de: *a*) la ecuación (6-15), *b*) la figura 6-2, y *c*) el método gráfico basado en la ecuación (6-16).

6-8. Calcule el exponente hidráulico N de un conducto circular de 36 pulg con una profundidad normal de 24 pulg por encima de la batea, a partir de: *a*) la figura 6-2 y *b*) el método gráfico basado en la ecuación (6-16).

6-9. A partir de la ecuación de Manning, demuestre que las profundidades para caudal y velocidad máximos en un conducto circular son respectivamente $0.938d_0$ y $0.81d_0$.

6-10. Con base en la ecuación de Chézy, determine las profundidades respectivas para caudal máximo y velocidad máxima en un conducto circular.

6-11. ¿A qué profundidades ocurrirán el caudal y la velocidad máximos en un conducto cuadrado acostado en uno de sus lados?

6-12. Prepare las curvas de variaciones en el caudal y la velocidad con respecto a la profundidad para un conducto cuadrado acostado sobre uno de sus lados.

6-13. Se supone que un canal tiene un radio hidráulico constante R para cualquier profundidad de flujo. Demuestre que la sección transversal de este canal puede definirse mediante

$$y = R[\ln (x + \sqrt{x^2 - R^2}) - \ln R] \qquad (6\text{-}50)$$

[8] La ecuación de G. K. muestra que el C de Chézy es una función del radio hidráulico y por consiguiente de la profundidad y. Luego, se ha encontrado que la ecuación de Chézy no es muy conveniente para la determinación del valor N. Para canales en tierra y en terrenos de grava, el valor N por lo general tiene un incremento de 0.30 a 0.50 debido a la variación en el C de Chézy con respecto a la profundidad. Este incremento, sin embargo, hace que el valor N sea más parecido al basado en la ecuación de Manning.

donde $x = R$ cuando $y = 0$. Dibuje un esquema de esta sección y discuta sus propiedades. (*Sugerencia.* A partir de las condiciones conocidas, $R = A/P = dA/dP = x\,dy/\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Resuelva esta ecuación diferencial y evalúe la constante de integración para la condición $x = R$, cuando $y = 0$. Matemáticamente, la sección está formada por dos catenarias como lados. Para propósitos prácticos, debe proveerse un fondo artificial debido a que la sección teórica no tiene fondo. Una ecuación de flujo uniforme, como la ecuación de Manning, implica que el radio hidráulico es el único parámetro de forma para la velocidad. La suficiencia de esta indicación puede verificarse de manera experimental ensayando un canal construido con la sección de radio hidráulico constante. Si la indicación es cierta, entonces, una vez que este canal se ha diseñado para una velocidad segura, debería ser no socavable y no sedimentable para un amplio rango de niveles. En canales en tierra, sin embargo, la amplia variación de la superficie de agua durante el cambio de nivel erosionaría los lados con mucha facilidad).

6-14. Verifique las ecuaciones (6-17) a (6-19).

6-15. Un canal rectangular de prueba tiene 2 pies de ancho y una pendiente de 0.1035%. Cuando el lecho y las paredes del canal están hechas de cemento liso, la profundidad normal de flujo es de 1.36 pies para un caudal de 8.9 pies³/s. El mismo canal se hace más rugoso utilizando granos de arena cementados, y la profundidad normal medida cambia a 1.31 pies para un caudal de 5.2 pies³/s.

a. Determine el caudal normal para una profundidad de 1.31 pies si el lecho se mantiene rugoso y las paredes se mantienen lisas.

b. Determine el caudal para una profundidad normal de 1.31 pies si las paredes se mantienen rugosas y el lecho permanece liso.

c. Los caudales para las condiciones descritas en *a* y *b* se midieron realmente y se encontró que son 6.60 y 6.20 pies³/s, respectivamente. Determine los valores de n correspondientes, y compare estos valores con los calculados mediante las ecuaciones (6-17) a (6-19).

6-16. Un canal consta de una sección principal y dos secciones laterales (figura 6-6). Calcule el caudal total, suponiendo que la sección principal y las dos secciones laterales están separadas: *a*) por unas líneas de división vertical, y *b*) por una extensión de los lados del canal principal. Dado $n = 0.025$ para el canal principal, $n = 0.030$ para los canales laterales y $S = 0.001$.

6-17. El estudio topográfico de una corriente indica que las propiedades hidráulicas de ésta son relativamente uniformes a lo largo de una longitud de dos millas. Los datos obtenidos en el estudio son:

a. La sección transversal de la corriente en una estación particular aguas arriba en el tramo uniforme está dada por las siguientes coordenadas:

Estación	*Elev. m.s.n.m.*	*Estación*	*Elev. m.s.n.m.*
Banca izquierda 0 + 00	590.0	6 + 00	543.7
1 + 00	580.7	8 + 00	540.0
1 + 50	578.2	10 + 00	572.2
3 + 00	582.0	11 + 00	573.2
4 + 00	581.0	12 + 00	568.5
5 + 00	580.0	14 + 00	590.0

b. El valor de n para el canal principal se estima en 0.035 y para los canales laterales en 0.050.

c. La pendiente natural de la corriente es de alrededor de 1 pic/milla.

Elabore una curva de calibración sintética. Se sugiere que las áreas mojadas del canal principal y de los laterales sean separadas mediante una extensión de los lados del canal principal.

6-18. Calcule el caudal en una cuneta de rebose en carretera (figura 6-10) que tiene una profundidad de flujo de 3 pulg y una pendiente longitudinal de 0.03. La cuneta está hecha de

concreto con $n = 0.017$ y tiene una sección transversal con su lado interno vertical, una pendiente lateral de $z = 12$ y un ancho superficial de $T = 2$ pies. El agregado que conforma el pavimento en la zona de rebose tiene una pendiente transversal de $z_1 = 24$ y $n_1 = 0.020$.

6-19. Para un caudal igual, un canal cubierto de hielo debería tener una profundidad de flujo mayor que un canal descubierto, por dos razones: 1) el perímetro mojado es mayor en un canal cubierto de hielo y, por consiguiente, esto da como resultado una mayor resistencia o menor velocidad, y 2) el espesor de la cubierta de hielo es mayor que la profundidad de agua de igual altura, debido a que la gravedad específica del hielo es de alrededor de 0.917. Demuestre que el incremento en la profundidad debido a la resistencia en un canal ancho cubierto de hielo puede expresarse mediante

$$\Delta y = \left[1.32\left(\frac{n_1}{n}\right)^{3/5} - 1\right] y \qquad (6\text{-}51)$$

donde n_1 es el coeficiente de rugosidad para el canal con la cubierta de hielo, n es el coeficiente de rugosidad para el canal sin la cubierta de hielo y y es la profundidad de flujo en el canal que conduce el mismo caudal pero sin la cubierta de hielo.

6-20. Calcule la conductividad y los coeficientes de distribución de velocidades para una sección de canal localizada 500 pies aguas abajo de la sección descrita en el ejemplo 6-1. Los datos topográficos en la sección para la misma creciente son:

Subsección	A, pies^2	P, pies	n	α	β
Sección principal.	5,320	205	0.035	1.12	1.05
Sección lateral.	5,670	408	0.040	1.10	1.04

6-21. Resuelva el ejemplo 6-2 mediante la ecuación G. K.

6-22. Un canal rectangular con 20 pies de ancho, $S = 0.006$ y $n = 0.015$ conduce un caudal de 200 pies^3/s. Calcule la profundidad y la velocidad normales.

6-23. A partir de la ecuación de Manning, determine las profundidades normales en canales que tienen las siguientes secciones cuando $Q = 100$ pies^3/s, $n = 0.015$ y $S = 0.0020$:

a. Una sección rectangular de 20 pies de ancho.

b. Una sección triangular con un ángulo de fondo igual a 60°.

c. Una sección trapezoidal con un ancho de base de 20 pies y pendientes laterales de 1 a 2.

d. Una sección circular de diámetro de 15 pies.

e. Una sección parabólica con un ancho de 16 pies a una profundidad de 4 pies.

6-24. Resuelva el ejemplo 6-2 por el método gráfico.

6-25. Un canal rectangular de 20 pies de ancho tiene un coeficiente de rugosidad de $n = 0.015$.

a. Determine la pendiente normal correspondiente a una profundidad de 1.23 pies cuando el caudal es 200 pies^3/s.

b. Determine la pendiente crítica y la profundidad normal correspondiente cuando el caudal es 200 pies^3/s.

c. Determine la pendiente crítica a una profundidad normal de 1.23 pies y calcule el caudal correspondiente.

6-26. Demuestre que la pendiente crítica para una profundidad normal y_n dada puede expresarse mediante

$$S_{cn} = \frac{14.5 n^2 D_n}{R_n^{4/3}} \qquad (6\text{-}52)$$

y que esa pendiente para un canal ancho es

$$S_{cn} = \frac{14.5 n^2}{y^{1/3}} \qquad (6\text{-}53)$$

6-27. Determine la pendiente límite para el canal descrito en el ejemplo 6-4.

6-28. Construya curvas de pendiente crítica para el canal descrito en el ejemplo 6-5 con anchos de base de $b = 1$ pie, 4 pies, 20 pies, e ∞, respectivamente.

6-29. Determine la curva de pendiente crítica para el canal descrito en el ejemplo 6-4 con pendientes laterales de $z = 0$, 0.2, 0.5, 1, 2, 5 e ∞, respectivamente.

6-30. Un tramo de canal de 1,000 pies de largo tiene una caída de 0.35 pies en la superficie del agua durante el tránsito de una creciente. Calcule el caudal de la creciente a través del tramo utilizando los siguientes datos:

Subsección	A, pies^2	P, pies	n	α	β
Aguas arriba:					
Canal principal.	4,250	210	0.038	1.10	1.04
Canal lateral.	25,620	2,050	0.038	1.20	1.08
Aguas abajo:					
Canal principal.	5,760	320	0.042	1.10	1.04
Canal lateral.	25,610	1,905	0.038	1.18	1.06

6-31. Demuestre la ecuación (6-46).

6-32. A partir de las ecuaciones (1-5) y (6-43), determine el valor de K en la ecuación (1-8).

6-33. Calcule los caudales por unidad de ancho para un flujo en láminas sobre una superficie con $n = 0.001$ y $S = 0.036$ cuando la profundidad de flujo es: *a*) 0.01 pies y *b*) 0.004 pies. La temperatura del agua es 68°F.

6-34. Compare el criterio de Horton para el flujo de láminas en el problema 6-33 con aquéllos mostrados en el cuadro de la figura 1-3.

6-35. Demuestre que los coeficientes de distribución de velocidades para flujo laminar uniforme en canales abiertos anchos son $\alpha = 1.54$ y $\beta = 1.20$.

6-36. A partir de la ecuación (1-6), de Blasius, para flujos turbulentos en canales abiertos, demuestre que el exponente correspondiente en la ecuación (6-47) es $x = 12/7$.

REFERENCIAS

1. Ven Te Chow, "Integrating the equation of gradually varied flow", artículo 838, *Proceedings*, Vol. 81, *American Society of Civil Engineers*, noviembre de 1955, pp. 1-32.
2. R. R. Chugaev, "Nekotorye voprosy neravnomernogo dvizheniia vody v otkrytykh prizmaticheskikh ruslakh" ("About some questions concerning nonuniform flow of water in open channels"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 1, Leningrad, 1931, pp. 157-227.
3. Phillip Z. Kirpich, "Dimensionless constants for hydraulic elements of openchannel cross-sections", *Civil Engineering*, Vol. 18, Nº 10, octubre de 1948, p. 47.
4. N. N. Pavlovskiĭ, *Gidravlicheskiĭ Spravochnik* (*Handbook of hydraulics*), Onti, Leningrad y Moscow, 1937, p. 515.
5. A. N. Rakhmanoff, "O postroenii krivykh svobodnoĭ poverkhnosti v prizmaticheskikh i tsilindricheskikh ruslakh pri ustanovivshemsia dvizhenii" ("On the construction of curves of free surfaces in prismatic and cylindrical channels with established flow"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 3, Leningrad, 1931, pp. 75-114.

6. Robert E. Horton, "Separate roughness coefficients for channel bottom and sides", *Engineering News-Record*, Vol. 111, Nº 22, noviembre 30 de 1933, pp. 652-653.
7. H. A. Einstein, "Der hydraulische oder Profil-Radius" ("The hydraulic or cross section radius"), *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 103, Nº 8, Zürich, febrero 24 de 1934, pp. 89-91.
8. Ahmed M. Yassin, "Mean roughness coefficient in open channels with different roughness of bed and side walls", *Mitteilungen aus der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau*, Nº 27, *Eidgenössische technische Hochschule Zürich*, Verlag Leemann, Zürich, 1954.
9. N. N. Pavlovskiĭ, "K voprosu o raschetnoĭ formule dlia ravnomernogo dvizheniia v vodotokahk s neodnorodnymi stenkami" ("On a design formula for uniform movement in channels with nonhomogeneous walls"), *Izvestiia Vsesoiuznogo NauchnoIssledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 3, Leningrad, 1931, pp. 157-164.
10. L. Mühlhofer, "Rauhigkeitsuntersuchungen in einem Stollen mit betonierter Sohle und unverkleideten Wänden" ("Roughness investigations in a shaft with concrete bottom and unlined walls"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 28, Nº 8, Munich, 1933, pp. 85-88.
11. H. A. Einstein y R. B. Banks, "Fluid resistance of composite roughness", *Transactions*, Vol. 31, Nº 4, *American Geophysical Union*, agosto de 1950, pp. 603-610.
12. G. K. Lotter, "Soobrazheniia k gidravlicheskomu raschetu rusel s razlichnoĭ sherokhovatostiiu stenok" ("Considerations on hydraulic design of channels with different roughness of walls"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 9, Leningrad, 1933, pp. 238-241.
13. G. K. Lotter, "Vliianie usloviĭ ledoobrazovaniia i tolshchiny l'da na raschet derivatsionnykh kanalov" ("Influence of conditions of ice formation and thickness on the design of derivation canals"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Vol. 7, Leningrad, 1932, pp. 55-80.
14. G. K. Lotter, "Metod akademika N. N. Pavlovskogo dlia opredeleniia koeffitsienta sherokhovatosti rusel, pokrytykh l'dom" ("Method by Academy Member N. N. Pavlovskiĭ for determination of roughness coefficients of ice-covered channels"), *Izvestiia Vsesoiuznogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* (*Transactions, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering*), Nº 29, Leningrad, 1941.
15. P. N. Belokon, *Inzhenernaia gidravlika potoka pod ledianym pokrovom* (*Engineering hydraulics of a current under ice cover*), Gosenergoizdat, Moscow y Leningrad, 1940.
16. Horace William King, "Manning Formula Tables", *Flow in open channels*, Vol. II, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1939.
17. *Hydraulic and excavation tables*, U.S. Bureau of Reclamation, 10ª ed., 1950.
18. *Hydraulic tables*, 2ª ed., U.S. Corps of Engineers, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1944.
19. Horace William King, *Handbook of hydraulics*, 4ª ed., Sec. 7, Tabla 90, revisado por Ernest F. Brater, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
20. P. A. Arghyropoulos, "Calcul de l'écoulement en conduites sous pression ou à surface libre, d'après la formule de Manning-Strickler" ("Computation of Flow in Conduits under Pressure or with Free Surface, Using Manning-Strickler Formula"), Dunod, Paris, 1958.
21. Ivan E. Houk, "Calculation of flow in open channels", *Miami Conservancy District, Technical Report, Parte IV*, Dayton, Ohio, 1918.
22. H. Jeffreys, "Flow of water in an inclined channel of rectangular section", *Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 49, Nº 293, London, mayo de 1925, pp. 793-807.
23. L. Hopf, "Turbulenz bei einem Flusse" ("Turbulence in a flow"), *Annalen der Physik*, Vol. 32, Sec. 4, Halle y Leipzig, abril-julio de 1925, pp. 777-808.
24. Robert E. Horton, H. R. Leach, y R. Van Vliet, "Laminar sheet flow", *Transactions*, Vol. 15, Parte 2, *American Geophysical Union*, 1934, pp. 393-404.

CAPÍTULO 7

DISEÑO DE CANALES CON FLUJO UNIFORME

Los canales estudiados en este capítulo incluyen canales no erosionables, canales erosionables y canales en pastos. Para canales erosionables, el estudio se limitará principalmente a aquéllos que se socavan pero que no se sedimentan (*véase* el prefacio).

A. CANALES NO EROSIONABLES

7-1. Canal no erosionable. La mayor parte de los canales artificiales revestidos y construidos pueden resistir la erosión de manera satisfactoria y, por consiguiente, se consideran *no erosionables*. Los canales artificiales no revestidos por lo general son erosionables, excepto aquéllos excavados en cimentaciones firmes, como un lecho en roca. En el diseño de canales artificiales no erosionables, factores como la velocidad permisible máxima (sección 7-9) y la fuerza tractiva permisible (sección 7-13) no hacen parte del criterio que debe ser considerado. El diseñador simplemente calcula las dimensiones del canal artificial mediante una ecuación de flujo uniforme y luego decide acerca de las dimensiones finales con base en la eficiencia hidráulica o reglas empíricas de sección óptima, aspectos prácticos constructivos y economía [1, 2]. Los factores que se consideran en el diseño son: la clase del material que conforma el cuerpo del canal, la cual determina el coeficiente de rugosidad; la velocidad mínima permisible, para evitar la depositación si el agua mueve limos o basuras; la pendiente del fondo del canal y las pendientes laterales; el borde libre; y la sección más eficiente, ya sea determinada hidráulica o empíricamente.

7-2. Material y revestimiento no erosionable[1]. Los materiales no erosionables utilizados para formar el revestimiento de un canal o el cuerpo de un canal desarmable, incluyen concreto, mampostería, acero, hierro fundido, madera, vidrio, plástico, etc. La selección del material depende sobre todo de la disponibilidad y el costo de éste, el método de construcción y el propósito para el cual se utilizará el canal.

El propósito del revestimiento de un canal artificial, en la mayor parte de los casos, es prevenir la erosión, pero ocasionalmente puede ser el de evitar las pérdidas de agua por infiltración. En canales artificiales revestidos, la *velocidad máxima permisible*, es decir, la velocidad máxima que no causará erosión, puede no considerarse siempre y cuando el agua no transporte arena, grava o piedras. Si van a existir velocidades muy altas sobre el revestimiento, sin embargo, debe recordarse que existe una tendencia en el agua que se mueve muy rápidamente de mover los bloques del revestimiento y empujarlos por fuera de su posición. Por consiguiente, el revestimiento debe diseñarse contra estas posibilidades.

7-3. Velocidad mínima permisible. La *velocidad mínima permisible* o *velocidad no sedimentante* es la menor velocidad que no permite el inicio de la sedimentación y no induce el crecimiento de plantas acuáticas y de musgo. Esta velocidad es muy incierta y su valor exacto no puede determinarse con facilidad. Para aguas que no tengan carga de limos o para flujos previamente decantados, este factor tiene una pequeña importancia excepto por su efecto en el crecimiento de plantas. En general puede adoptarse una velocidad media de 2 a 3 pies/s cuando el porcentaje de limos presente en el canal es pequeño, y una velocidad media no inferior a 2.5 pies/s prevendrá el crecimiento de vegetación que disminuiría seriamente la capacidad de transporte del canal.

7-4. Pendientes de canal. La pendiente longitudinal del fondo de un canal por lo general está dada por la topografía y por la altura de energía requerida para el flujo de agua. En muchos casos, la pendiente también depende del propósito del canal; por ejemplo, los canales utilizados para propósitos de distribución de agua, como los utilizados en irrigación, abastecimientos de agua, minería hidráulica y proyectos hidroeléctricos requieren un alto nivel en el punto de entrega. Por consiguiente, es conveniente una pendiente pequeña para mantener en el mínimo posible las pérdidas en elevación.

Las pendientes laterales de un canal dependen principalmente de la clase de material. La tabla 7-1 da una idea general de las pendientes apropiadas para ser utilizadas con diferentes clases de material. Sin embargo, para un material erosionable una determinación más exacta de las pendientes laterales debe verificarse con el criterio de la máxima velocidad permisible (sección 7-10) o mediante el principio de la fuerza tractiva (sección 7-14). Otros factores que deben considerarse para determinar las pendientes laterales son el método de construcción, la condición de pérdidas por infiltración, los cambios climáticos, el tamaño del canal, etc. En general, las pendientes laterales deben hacerse tan empinadas como sea factible y deben diseñarse de acuerdo con una alta eficiencia y estabilidad hidráulica. Para canales revestidos, el U. S. Bureau of Reclamation [4] ha considerado la normalización de una pendiente de 1.5:1 para los tamaños usuales de canales. Una ventaja de esta pendiente es que es lo suficientemente plana para permitir un uso factible de casi cualquier tipo de revestimiento o tratamiento de revestimiento en el presente o en el futuro anticipado por el Bureau.

[1] Para información detallada sobre revestimiento de canales, *véase* [3].

Tabla 7-1. Pendientes laterales apropiadas para canales construidos en diferentes clases de materiales

Material	*Pendiente lateral*
Roca	Aproximadamente vertical
Estiércol y suelos de turba	$^1/_4$: 1
Arcilla rígida o tierra con recubrimiento de concreto	$^1/_2$: 1 a 1:1
Tierra con recubrimiento de piedras o tierra en canales grandes	1:1
Arcilla firme o tierra en canales pequeños	$1^1/_2$:1
Tierra arenosa suelta	2:1
Marga arenosa o arcilla porosa	3:1

7-5. Borde libre. El *borde libre* de un canal es la distancia vertical desde la parte superior del canal hasta la superficie del agua en la condición de diseño. Esta distancia debe ser lo suficientemente grande para prevenir que ondas o fluctuaciones en la superficie del agua causen reboses por encima de los lados. Este factor se vuelve muy importante en especial en el diseño de canaletas elevadas, debido a que la subestructura de éstos puede ponerse en peligro por cualquier rebose.

No existe una regla universalmente aceptada para el cálculo del borde libre, debido a que la acción de las ondas o las fluctuaciones en la superficie del agua en un canal puede crearse por muchas causas incontrolables. Ondas pronunciadas y fluctuaciones en la superficie del agua por lo general se esperan en canales donde la velocidad es muy alta y la pendiente muy empinada, de tal manera que el flujo se vuelve muy inestable, o en curvas donde la alta velocidad y el ángulo de deflexión pueden causar superficies de agua con superelevaciones apreciables en el lado convexo de la curva, o en canales donde la velocidad de flujo se aproxima al estado crítico para el cual el agua puede fluir con sus dos profundidades alternas y saltar desde el nivel bajo al nivel alto con cualquier pequeña obstrucción. Otras causas naturales, como el movimiento del viento y la acción de mareas, también pueden inducir ondas altas que requieren una consideración especial en el diseño.

En el diseño es común el uso de bordes libres que varían desde menos del 5% a más del 30% de la profundidad de flujo. Para canaletas metálicas con interiores suaves y semicirculares, colocadas en tangentes que conducen el agua a velocidades no mayores que el 80% de la velocidad crítica con un máximo de 8 pies/s, la experiencia indica que un borde libre del 6% del diámetro de la canaleta debería ser utilizado. Para canaletas en curvas de alta velocidad o deflexiones, se producirá acción de ondas; luego, el borde libre debe incrementarse para prevenir que el agua se desborde.

El borde libre en un canal no revestido o lateral por lo general estará gobernado por consideraciones de tamaño y localización del canal, caudal de aguas lluvias entrante, fluctuaciones del nivel freático causadas por estructuras de control de flujo, acción del viento, características del suelo, requerimientos para la operación de carreteras y disponibilidad de material excavado. De acuerdo con el U. S. Bureau of Reclamation [4], el rango aproximado de borde libre a menudo utilizado se extiende desde un pie para pequeños laterales de riego con profundidades bajas hasta 4 en canales de 3,000 pies³/s o capacidades mayores con profundidades de agua relativamente grandes. El Bureau recomienda que los estimativos preliminares del borde libre requerido bajo condiciones ordinarias se hagan de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$F = \sqrt{Cy} \tag{7-1}$$

donde F es el borde libre en pies, y es la profundidad en pies del agua en el canal y C es un coeficiente que varía desde 1.5 para canales con capacidad de 20 pies³/s hasta 2.5 para canales con capacidades de 3,000 pies³/s o mayores. Esta aproximación está basada en la práctica promedio del Bureau: sin embargo, no sirve para todas las condiciones.

Para canales o laterales de riego revestidos, la altura del revestimiento por encima de la superficie del agua dependerá de cierto número de factores: tamaño del canal, velocidad del agua, curvatura del alineamiento, condiciones del caudal de entrada de aguas lluvias o aguas de drenaje, fluctuaciones en el nivel del agua debido a la operación de estructuras reguladoras del flujo y acción del viento. De una manera más o menos similar, la altura de la banca por encima de la superficie del agua variará con el tamaño y la localización del canal, el tipo de suelo, la cantidad de agua lluvia o agua de drenaje interceptada, etc. Como una guía para el diseño de canales revestidos, el U. S. Bureau of Reclamation [3] preparó curvas (figura 7-1) para el borde libre promedio y la altura de las bancas con relación a la capacidad.

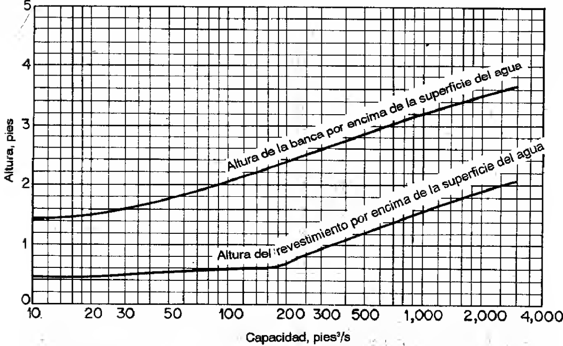


Figura 7-1. Borde libre y altura de las bancas recomendados para canales revestidos (*U. S. Bureau or Reclamation*).

7-6. Sección hidráulica óptima. Se sabe que la conductividad de una sección de canal se incrementa con el aumento en el radio hidráulico o la disminución en el perímetro mojado. Desde un punto de vista hidráulico, por consiguiente, la sección de canal que tenga el menor perímetro mojado para un área determinada tiene la máxima conductividad; tal sección se conoce como *sección hidráulica óptima.* Dentro de todas las secciones el semicírculo tiene el menor perímetro mojado para un área determinada; por consiguiente es la sección hidráulicamente más eficiente de todas las secciones.

Los elementos geométricos para seis secciones hidráulicas óptimas se muestran en la tabla 7-2, pero no siempre estas secciones son prácticas, debido a dificultades en la construcción y en el uso de material. En general, una sección de canal debe diseñarse para cumplir con una eficiencia hidráulica óptima pero debe modificarse para tener en cuenta aspectos constructivos. Desde un punto de vista práctico, nótese que la sección hidráulica óptima es la sección que da el área mínima para un caudal determinado pero no necesariamente la mínima excavación. La sección con mínima excavación ocurre sólo si el nivel del agua llega hasta el tope de las bancas. En los casos en que la superficie del agua se encuentra por debajo del tope de las bancas, como ocurre a menudo, los canales más angostos que aquéllos con la sección hidráulica óptima darán una excavación mínima. Si la superficie del agua fluye por encima de las bancas y éstas coinciden con el nivel del terreno, canales más anchos darán una excavación mínima.

Tabla 7-2. Secciones hidráulicas óptimas.

Sección transversal	Área A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superficial T	Profundidad hidráulica D	Factor de sección Z
Trapecio, medio hexágono	$\sqrt{3}\,y^2$	$2\sqrt{3}\,y$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}\,y$	$\frac{3}{4}y$	$\frac{3}{2}y^{2.5}$
Rectángulo, medio cuadrado	$2y^2$	$4y$	$\frac{1}{2}y$	$2y$	y	$2y^{2.5}$
Triángulo, medio cuadrado	y^2	$2\sqrt{2}\,y$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}\,y$	$2y$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,y^{2.5}$
Semicírculo	$\frac{\pi}{2}\,y^2$	πy	$\frac{1}{2}y$	$2y$	$\frac{\pi}{4}\,y$	$\frac{\pi}{4}\,y^{2.5}$
Parábola $T = 2\sqrt{2}\,y$	$\frac{4}{3}\sqrt{2}\,y^2$	$\frac{8}{3}\sqrt{2}\,y$	$\frac{1}{2}y$	$2\sqrt{2}\,y$	$\frac{2}{3}y$	$\frac{8}{9}\sqrt{3}\,y^{2.5}$
Catenaria hidrostática	$1.39586y^2$	$2.9836y$	$0.46784y$	$1.917532y$	$0.72795y$	$1.19093y^{2.5}$

El principio de la sección hidráulica óptima se aplica sólo al diseño de canales no erosionables. Para canales erosionables, debe utilizarse el principio de la fuerza tractiva para determinar una sección eficiente (sección 7-15).

Ejemplo 7-1. Demuestre que la sección trapezoidal hidráulica óptima es medio hexágono.

Solución. La tabla 2-1 da el área mojada y el perímetro mojado de un trapecio como

$$A = (b + zy)y \quad \text{y} \quad P = b + 2\sqrt{1 + z^2}\, y$$

donde y es la profundidad, b es el ancho en la base, y z:1 es la pendiente lateral.

Primero, considere que A y z son constantes. Al derivar las dos ecuaciones anteriores con respecto a y y al resolver simultáneamente para dP/dy,

$$\frac{dP}{dy} = 2(\sqrt{1 + z^2} - z) - \frac{b}{y}$$

Para un perímetro mojado mínimo, $dP/dy = 0$, o

$$b = 2y(\sqrt{1 + z^2} - z)$$

Al sustituir esta ecuación para b en las dos anteriores ecuaciones para A y B y al resolver simultáneamente para P,

$$P = 2\sqrt{A(2\sqrt{1 + z^2} - z)}$$

Ahora, encuentre el valor de z que hace que P sea mínimo. Al derivar P con respecto a z, al igualar dP/dz a cero, y al resolver para z,

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30°$$

Esto significa que la sección es medio hexágono.

7-7. Cálculo de las dimensiones de la sección. El cálculo de las dimensiones de la sección para canales no erosionables incluye los siguientes pasos:

1. Recolectar toda la información necesaria, estimar n y seleccionar S.
2. Calcular el factor de sección $AR^{2/3}$ mediante la ecuación (6-8), o

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{1.49\sqrt{S}} \tag{6-8}$$

3. Sustituir en la ecuación (6-8) las expresiones para A y R obtenidas en la tabla 2-1, y resolver para la profundidad. Si existen otras incógnitas, como b y z para una sección trapezoidal, entonces suponga los valores de estas incógnitas y resuelva la ecuación (6-8) para la profundidad. Al suponer varios valores de las incógnitas, puede obtenerse cierto número de combinaciones de dimensiones de la sección. Las dimensiones finales se escogen con base en la eficiencia hidráulica y los aspectos constructivos. Para canales revestidos, la sección trapezoidal se adopta comúnmente y el U. S. Bureau of Reclamation [3] desarrolló una serie de curvas basadas en la experiencia (figura 7-2), que muestran la relación promedio entre los anchos en la base y las profundidades del agua con respecto a las capacidades del canal. Estas curvas pueden utilizarse como una guía al establecer las dimensiones apropiadas de la sección.

La determinación de la profundidad para el valor calculado de $AR^{2/3}$ puede simplificarse a partir de la tabla de diseño (figura 6-1). Algunos ingenieros prefieren una solución por ensayo y error, similar a la solución 2 para el ejemplo 6-2 de la sección 6-6.

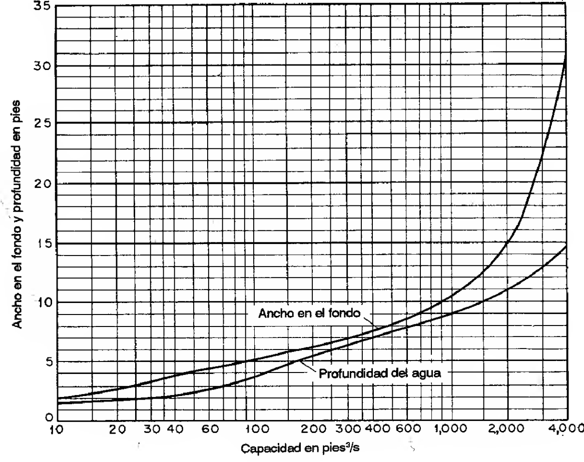


Figura 7-2. Curvas empíricas que muestran el ancho en el fondo y la profundidad en canales revestidos (*U. S. Bureau of Reclamation*).

4. Si directamente se requiere la sección hidráulica óptima, sustituya en la ecuación (6-8) las expresiones para A y R obtenidas en la tabla 7-2 y resuelva para la profundidad. Esta sección hidráulica óptima puede modificarse por aspectos de factibilidad constructiva.

5. Para el diseño de canales de irrigación, algunas veces la sección de canal se proporciona a partir de reglas empíricas, como la regla simple dada por el antiguo U. S. Reclamation Service [5] para la profundidad en pies de suministro completo de agua.

$$y = 0.5\sqrt{A} \tag{7-2}$$

donde A es el área mojada en pies². Para una sección trapezoidal puede demostrarse que esta regla también puede expresarse mediante una ecuación simple

$$x = 4 - z \tag{7-3}$$

donde x es la relación ancho-profundidad b/y y z es la proyección horizontal de la pendiente lateral correspondiente a un pie vertical. De igual modo, ingenieros en la India [6] han utilizado una ecuación empírica $y = \sqrt{A/3} = 0.577\sqrt{A}$, la cual es equivalente a $x = 3 - z$ para secciones trapezoidales; y los ingenieros filipinos [7] utilizan la ecuación (7-3) con $z = 1.5$ o $x = 2.5$ para canales en tierra.

6. Verificar la velocidad mínima permisible si el agua mueve sedimentos.

7. Añadir el borde libre apropiado a la profundidad de la sección de canal.

Ejemplo 7-2. Un canal trapezoidal que transporta 400 pies³/s se construye en un lecho nc erosionable con pendiente de 0.0016 y $n = 0.025$. Proporcione las dimensiones de la sección.

Solución. Mediante la ecuación (6-8),

$$AR^{2/3} = \frac{0.025 \times 400}{1.49 \sqrt{0.0016}} = 167.7$$

Al sustituir $A = (+ zy)y$ y $R = (b + zy)y/(b) + 2\sqrt{1+z^2}\,y)$ en la expresión anterior,

$$\frac{[(b + zy)y]^{5/3}}{(b + 2\sqrt{1 + z^2}\,y)^{2/3}} = 167.7$$

Al suponer $b = 20$ pies y $z = 2$ y al simplificar,

$$7{,}680 + 1{,}720y = [y(10 + y)]^{2.5}$$
$$y = 3.36 \text{ pies}$$

Nótese que esta solución es exactamente la misma que el cálculo de la profundidad normal dado en la solución 1 del ejemplo 6-2. Por consiguiente a este problema también pueden aplicarse las soluciones de ensayo y error y el método gráfico descritos en el ejemplo 6-2.

De igual modo, suponga otros valores apropiados de b y z y calcule las profundidades correspondientes. La decisión final sobre las dimensiones dependerá de consideraciones prácticas. Si los valores de b y z se deciden al principio de los cálculos, la profundidad se calculará sólo una vez.

Suponga que $b = 20$ pies, $z = 2$ y $y = 3.36$ pies son los valores finales. Asigne un borde libre de 2 pies; por consiguiente, la profundidad total del canal es 5.36 pies y el ancho en la superficie del canal (no el ancho de la superficie del agua) es 41.4 pies. El área mojada es 89.8 pies² y la velocidad es 4.46 pies/s, la cual es mayor que la velocidad mínima permisible para evitar la sedimentación, si ésta existe.

Cuando se requiere la sección hidráulica óptima, sustituya $A = \sqrt{3}\,y^2$ y $R = 0.5y$, obtenidos de la tabla 7-2, en $AR^{2/3} = 167.7$ y al simplificar que la profundidad es $y = 6.6$. Añada un borde libre de 3 pies; la profundidad total es 9.6 pies. El ancho de base correspondiente es 7.6 pies, el ancho superior del canal es 18.7 pies, el área mojada es 75.2 pies² y la velocidad es 5.32 pies/s. Como la sección trapezoidal hidráulica óptima es medio hexágono, las pendientes laterales son 1 en $\sqrt{3}/3$.

B. CANALES EROSIONABLES QUE SE SOCAVAN PERO NO SE SEDIMENTAN

7-8. Métodos de aproximación. El comportamiento del flujo en un canal erosionable está influido por tantos factores físicos y tantas condiciones de campo complejas e inciertas que el diseño preciso de tales canales, con el presente desarrollo del conocimiento, está por fuera del alcance de la teoría[2]. La ecuación de flujo uniforme, la cual es apropiada para el diseño de canales estables no erosionables, no da una condición suficiente para el diseño de canales erosionables. Esto se debe

[2] Nótese que ciertos canales son erosionables en tanto que otros muy similares en cuanto a la geometría del canal, la hidráulica y las propiedades físicas del suelo no lo son. Un paso adicional de investigación debería ser explorar las propiedades químicas del material que forma el cuerpo del canal. Es posible que exista un intercambio iónico entre el agua y el suelo o que la hidratación del material provea una cierta unión en algunos lugares y, por consiguiente, influya en la erosión. Para un estudio general sobre la complejidad de este problema, *véanse* [8] y [9].

a que la estabilidad de canales erosionables, la cual gobierna el diseño, depende principalmente de las propiedades del material que forma el cuerpo del canal más que de la hidráulica de flujo en el canal, únicamente. Sólo después de que se obtiene una sección estable para el canal erosionable puede utilizarse la ecuación de flujo uniforme para calcular la velocidad de flujo y el caudal.

Aquí se describen dos métodos de aproximación para el diseño apropiado de canales erosionables: *el método de la velocidad permisible* y el *método de la fuerza tractiva.* El método de la velocidad permisible se ha utilizado con amplitud para el diseño de canales en tierra en los Estados Unidos con el fin de asegurar un estado libre de socavación. El método de la fuerza tractiva ha sido utilizado algunas veces en Europa; fue investigado de manera exhaustiva en el U. S. Bureau of Reclamation y se recomienda tentativamente para el diseño de canales erosionables. Nótese que cualquiera de los dos métodos, con el presente estado de conocimiento, sirve sólo como una guía y no suplanta la experiencia y el criterio en ingeniería.

7-9. Velocidad máxima permisible. La *velocidad máxima permisible* o *velocidad no erosionante* es la mayor velocidad promedio que no causará erosión en el cuerpo del canal. Esta velocidad es muy incierta y variable, y sólo puede estimarse con base en experiencia y criterio. En general, los canales viejos y que han soportado muchos periodos hidrológicos permiten velocidades mucho más altas que los canales nuevos, debido a que un lecho viejo a menudo se encuentra mejor estabilizado, en particular con la sedimentación de materia coloidal. Cuando otras condiciones son iguales, un canal más profundo conducirá el agua con una velocidad media más alta sin erosión que un canal poco profundo. Es probable que esto se deba a que la socavación primordialmente es causada por las velocidades cerca del fondo y, para la misma velocidad media, las velocidades cercanas al fondo son mayores en canales menos profundos.

Antes se hicieron algunos intentos[3] para definir una velocidad media que no causara sedimentación ni socavación. Desde el punto de vista presente, sin embargo, es dudoso que tal velocidad exista en la realidad. En 1915, Etcheverry [26] publicó

[3] La primera ecuación famosa para esta velocidad no sedimentante y no erosionante para agua cargada de limos fue publicada en 1895 por Kennedy [10]. En un estudio sobre el caudal y la profundidad en 22 canales del sistema de irrigación Upper Bari Doab, en Punjab, India, la ecuación de Kennedy se desarrolló como

$$V_0 = Cy^x \tag{7-4}$$

donde V_0 es la velocidad media no sedimentante y no erosionante en pies/s; y es la profundidad de flujo en pies. $C = 0.84$, de acuerdo con la firmeza del material que forma el cuerpo del canal; y $x = 0.64$, un exponente que sólo varía ligeramente. Con base en estudios posteriores hechos por otros ingenieros, los valores de C más recomendados son: 0.56 para suelos extremadamente finos, como los encontrados en Egipto; 0.84 para suelos de arena fina, como los encontrados en el Punjab, India; 0.92 para suelos arenosos gruesos; 1.01 para limos arenosos y con marga; y 1.09 para sedimentos gruesos y basuras en suelos duros. Para agua limpia, se ha sugerido un valor de $x = 0.5$.

Para el diseño de canales que transporten agua cargada de sedimentos, la ecuación de Kennedy es prácticamente obsoleta hoy en día y está siendo remplazada por la teoría de régimen de Lacey [11-16], la función de carga de lecho, de Einstein [17] y el principio de geometría del canal, de Maddock-Leopold [18]. Hay escritos voluminosos sobre estos métodos. Bibliografías completas pueden encontrarse en [19] a [25].

tal vez la primera tabla de velocidades medias máximas seguras contra erosión. En 1925, Fortier y Scobey [27] publicaron la muy conocida tabla de "Velocidades permisibles en canales", que se muestra en la tabla 7-3. Los valores mostrados en esta tabla corresponden a canales por los que han pasado muchos periodos hidrológicos, colocados en pequeñas pendientes y para profundidades de flujo menores que 3 pies. La tabla también muestra los valores de n apropiados para diferentes materiales y los valores convertidos para las fuerzas tractivas permisibles correspondientes, las cuales serán estudiadas más adelante (sección 7-13). En 1936, una revista rusa [28] publicó valores de velocidades máximas permisibles (figuras 7-3 y 7-4) por encima de las cuales se produciría socavación en materiales no cohesivos con un amplio rango de tamaño de partículas y diferentes clases de suelos cohesivos. También dio la variación de estas velocidades con respecto a la profundidad del canal (figura 7-5).

Tabla 7-3. Velocidades máximas permisibles recomendadas por Fortier y Scobey y los valores correspondientes de fuerza tractiva unitaria convertidos por el U. S. Bureau of Reclamation* (para canales rectos de pendiente pequeña, después de envejecimiento)

Material	n	Agua limpia		Agua que transporta limos coloidales	
		V, pies/s	τ_0, lb/pie^2	V, pies/s	τ_0, lb/pie^2
Arena fina coloidal	0.020	1.50	0.027	2.50	0.075
Marga arenosa no colodial	0.020	1.75	0.037	2.50	0.075
Marga limosa no coloidal	0.020	2.00	0.048	3.00	0.11
Limos aluviales no colidales	0.020	2.00	0.048	3.50	0.15
Marga firme ordinaria	0.020	2.50	0.075	3.50	0.15
Ceniza volcánica	0.020	2.50	0.075	3.50	0.15
Arcilla rígida muy coloidal	0.025	3.75	0.26	5.00	0.46
Limos aluviales colidales	0.025	3.75	0.26	5.00	0.46
Esquistos y subsuelos de arcilla dura	0.025	6.00	0.67	6.00	0.67
Grava fina	0.020	2.50	0.075	5.00	0.32
Marga gradada a cantos rodados, no coloidales	0.030	3.75	0.38	5.00	0.66
Limos gradados a cantos rodados coloidales	0.030	4.00	0.43	5.50	0.80
Grava gruesa no coloidal	0.025	4.00	0.30	6.00	0.67
Cantos rodados y ripios de cantera	0.035	5.00	0.91	5.50	1.10

* Los valores de Fortier y Scobey fueron recomendados para su uso en 1926 por el Special Committee on Irrigation Research, de la American Society of Civil Engineers.

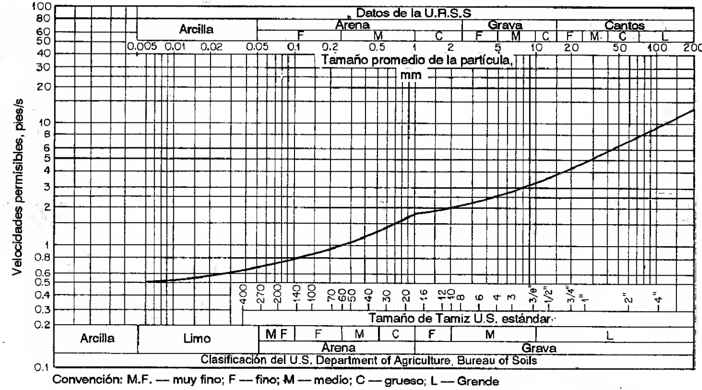


Figura 7-3. Datos de los Estados Unidos y de la URSS sobre velocidades permisibles en suelos no cohesivos.

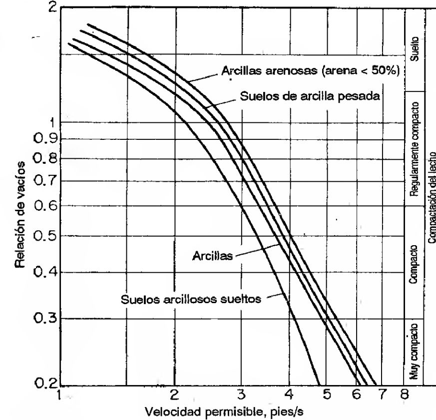


Figura 7-4. Curvas que muestran los datos dc la URSS sobre velocidades permisibles en suelos cohesivos.

Las velocidades máximas permisibles mencionadas arriba se refieren a canales rectos. Para canales sinuosos, las velocidades deben ser más bajas para reducir la socavación. Algunos porcentajes de reducción sugeridos por Lane [29] son 5% para canales ligeramente sinuosos, 13% para canales moderadamente sinuosos y 22% para canales muy sinuosos. Sin embargo, estos valores de porcentajes son muy aproximados debido a que no existen datos exactos en el presente.

7-10. Método de la velocidad permisible. A partir del criterio de la máxima velocidad permisible, el procedimiento de diseño para una sección de canal, con forma supuestamente trapezoidal, consiste en los siguientes pasos:

1. Para la clase determinada de material que conforma el cuerpo del canal, estimar el coeficiente de rugosidad n (sección 5-7), la pendiente del talud lateral z (tabla 7-1) y la velocidad máxima permisible V (tabla 7-3 y figuras 7-3 a 7-5).
2. Calcular el radio hidráulico R a partir de la ecuación de Manning.
3. Calcular el área mojada requerida para el caudal y la velocidad permisible determinados, o $A = Q/V$.
4. Calcular el perímetro mojado o $P = A/R$.
5. Utilizando las expresiones para A y P de la tabla 2-1, resuelva simultáneamente para b y y. La solución puede agilizarse utilizando las tablas dadas en el apéndice B.
6. Añadir un borde libre apropiado y modificar la sección con el fin de hacerla factible desde el punto de vista práctico.

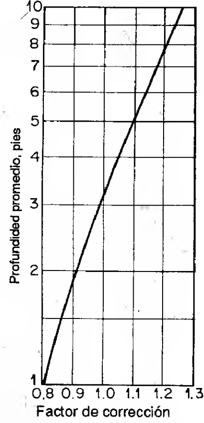


Figura 7-5. Curvas de la URSS que muestran correcciones por profundidad para velocidades permisibles tanto para materiales cohesivos como para materiales no cohesivos.

Ejemplo 7-3. Calcule el ancho de la base y la profundidad de flujo para un canal trapezoidal colocado en una pendiente de 0.0016 y que conduce un caudal de diseño de 400 pies³/s. El canal se excava en tierra que contiene gravas gruesas no coloidales y cantos rodados.

Solución. Para las condiciones determinadas, se estima lo siguiente: $n = 0.025$, $z = 2$ y velocidad máxima permisible igual a 4.5 pies/s.

A partir de la ecuación de Manning, resuelva para R,

$$4.5 = \frac{1.49}{0.025} R^{2/3} \sqrt{0.0016}$$

o

$$R = 260 \text{ pies}$$

Luego $A = 400/4.5 = 88.8$ pies², y $P = A/R = 88.8/2.60 = 34.2$ pies. Ahora

$$A = (b + zy)y = (b + 2y)y = 88.8 \text{ pies}^2$$

y

$$P = (b + 2\sqrt{1 + z^2}\,y = (b + 2\sqrt{5}\,y) = 34.2 \text{ pies}$$

Al resolver las dos ecuaciones anteriores de manera simultánea, $b = 18.7$ pies y $y = 3.46$ pies.

7-11. Fuerza tractiva. Cuando el agua fluye en un canal, se desarrolla una fuerza que actúa sobre el lecho de éste en la dirección del flujo. Esta fuerza, la cual es simplemente el empuje del agua sobre el área mojada, se conoce como *fuerza*

tractiva[4]. En un flujo uniforme la fuerza tractiva en apariencia es igual a la componente efectiva de la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo de agua, paralela al fondo del canal e igual a $wALS$, donde w es el peso unitario del agua, A es el área mojada, L es la longitud del tramo del canal y S es la pendiente (sección 5-4). Luego, el valor promedio de la fuerza tractiva por unidad de área mojada, conocido como *fuerza tractiva unitaria* τ_o, es igual a $wALS/PL = wRS$, donde P es el perímetro mojado, y R es el radio hidráulico; es decir,

$$\tau_0 = wRS \qquad (7\text{-}5)$$

En un canal abierto ancho, el radio hidráulico es igual a la profundidad de flujo y; por consiguiente $\tau_o = wyS$.

Nótese que la fuerza tractiva unitaria en canales, excepto en canales abiertos anchos, no está distribuida uniformemente a lo largo del perímetro mojado. Se han hecho muchos intentos para determinar la distribución de la fuerza tractiva en un canal. Leighly [31] trató de determinar esta distribución en muchos canales trapezoidales y en algunos canales rectangulares y triangulares, utilizando los datos publicados sobre distribuciones de velocidades en los canales. Infortunadamente, debido a la deficiencia de los datos, los resultados de su estudio no fueron muy concluyentes. En el U. S. Bureau of Reclamation, Olsen y Florey [32] y muchos otros ingenieros han utilizado la analogía de la membrana y métodos analíticos y de diferencias finitas para determinar la distribución de fuerza tractiva en canales trapezoidales, rectangulares y triangulares. En la figura 7-6 se muestra una distribución común de fuerza tractiva en un canal trapezoidal resultante de un estudio de analogía de la membrana. El patrón de distribución varía con la forma de la sección, pero prácticamente no se afecta por el tamaño de ésta. Con base en tales estudios, se han preparado algunas curvas (figura 7-7) que muestran las fuerzas tractivas unitarias máximas en los lados y en el fondo de diferentes secciones de canal para uso en diseño. En general, en los canales trapezoidales con formas utilizadas a menudo, la fuerza tractiva máxima en el fondo es cercana al valor wyS, y en los lados, cercana a 0.76 wyS.

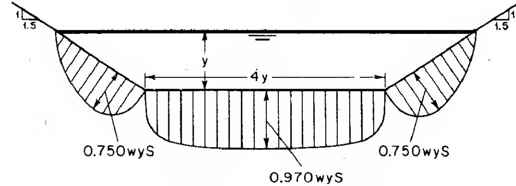


Figura 7-6. Distribución de la fuerza tractiva en una sección trapezoidal de canal.

[4] Ésta también se conoce como *fuerza cortante* o *fuerza de arrastre*. Por lo general se cree que la idea de la fuerza tractiva fue introducida por primera vez en la literatura hidráulica por du Boys en 1879, p. 149 de [30]. Sin embargo, el principio de balancear esta fuerza con la resistencia del canal a un flujo uniforme fue establecida por Brahms en 1754 (*véase* sección 5-4).

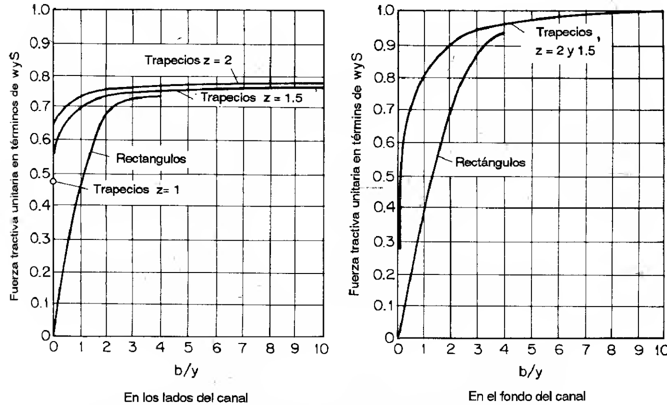


Figura 7-7. Fuerzas tractivas unitarias máximas en términos de términos de *wyS*.

7-12. Relación de fuerza tractiva. Sobre una partícula de suelo que descanse en la pendiente lateral de una sección de canal (figura 7-8) en la cual se encuentra fluyendo agua, actúan dos fuerzas: la fuerza tractiva $a\tau_s$ y la componente de fuerza gravitacional W_s sen θ, la cual hace que la partícula ruede a lo largo de la pendiente lateral[5]. Los símbolos utilizados son a = área efectiva de la partícula, τ_s = fuerza tractiva unitaria en la pendiente del canal, W_s = peso sumergido de la partícula, y $\varnothing$ = ángulo de la pendiente lateral. La resultante de estas dos fuerzas, las cuales forman un ángulo recto, es

$$\sqrt{W_s^2 \operatorname{sen}^2 \phi + a^2\tau_s^2}$$

Cuando esta fuerza es lo suficientemente grande, la partícula se moverá.

A partir del principio de movimiento de fricción en mecánica, puede suponerse que, cuando el movimiento es inminente, la resistencia al movimiento de la partícula es igual a la fuerza que tiende a causar el movimiento. La resistencia al movimiento de la partícula es igual a la fuerza normal W_s cos θ multiplicada por el coeficiente de fricción, o tan θ, donde θ es el ángulo de reposo. Luego,

$$W_s \cos \phi \tan \theta = \sqrt{W_s^2 \operatorname{sen}^2 \phi + a^2\tau_s^2} \qquad (7\text{-}6)$$

[5] El concepto del análisis tridimensional de las fuerzas de gravedad y tractivas que actúan sobre una partícula en reposo sobre una pendiente en un estado de movimiento incipiente fue dado por primera vez por Forchheimer [33]. Un análisis completo de la sección de canal que utiliza este concepto fue desarrollado por primera vez por Chia-Hwa Fan [34]. El análisis también fue desarrollado por separado por el U. S. Bureau of Reclamation, bajo la dirección de E. W. Lane [29, 35].

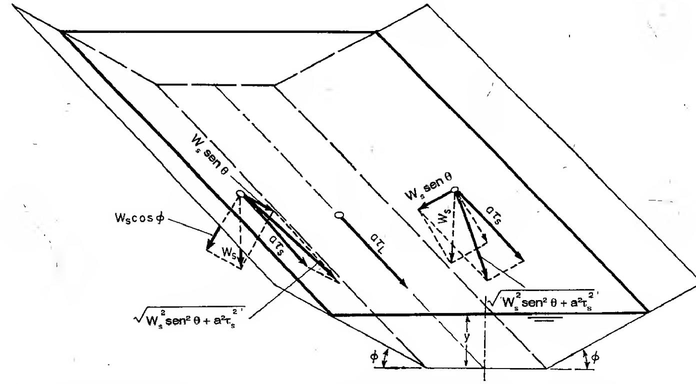


Figura 7-8. Análisis de las fuerzas que actúan en una partícula que reposa en la superficie del lecho de un canal.

Al resolver para la fuerza tractiva unitaria τ_s que causa el movimiento inminente en una superficie inclinada,

$$\tau_s = \frac{W_s}{a} \cos \phi \tan \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \theta}} \qquad (7\text{-}7)$$

De igual modo, cuando el movimiento de una partícula sobre una superficie plana es inminente debido a la fuerza tractiva $a\tau_L$, lo siguiente se obtiene a partir de la ecuación (7-6), con $\phi = 0$:

$$W_s \tan \theta = a\tau_L \qquad (7\text{-}8)$$

Al resolver para la fuerza tractiva unitaria τ_L que causa el movimiento inminente sobre una superficie plana,

$$\tau_L = \frac{W_s}{a} \tan \theta \qquad (7\text{-}9)$$

La relación de τ_s a τ se conoce como *relación de fuerza tractiva*; ésta es una relación importante para propósitos de diseño. A partir de las ecuaciones (7-7) y (7-9), la relación es

$$K = \frac{\tau_s}{\tau_L} = \cos \phi \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \theta}} \qquad (7\text{-}10)$$

Al simplificar[6]

$$K = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \theta}} \qquad (7\text{-}11)$$

[6] La ecuación (7-10) fue presentada por el U. S. Bureau of Reclamation [35, 36], y la ecuación (7-11), por Fan [34]. Las dos ecuaciones son matemáticamente idénticas.

Nótese que esta relación es función sólo de la inclinación ϕ del lado inclinado y del ángulo de reposo θ del material. Para materiales cohesivos y materiales finos no cohesivos, las fuerzas de cohesión, aún en agua comparativamente limpia, se vuelven tan grandes en comparación con la componente de la fuerza gravitacional, que hacen que la partícula ruede hacia abajo, que la fuerza gravitacional con seguridad puede no considerarse. Por consiguiente, el ángulo de reposo necesita ser considerado sólo para materiales gruesos no cohesivos. De acuerdo con la investigación del U. S. Bureau of Reclamation se encontró que en general el ángulo de reposo se incrementa tanto con el tamaño como con la angularidad del material. Para propósitos de diseño, el Bureau preparó curvas (figura 7-9) que muestran los valores del ángulo de reposo para materiales no cohesivos con diámetros superiores a 0.2 pulg para varios grados de rugosidad. El diámetro referido es el diámetro de partícula para el cual el 25% (en peso) del material es mayor.

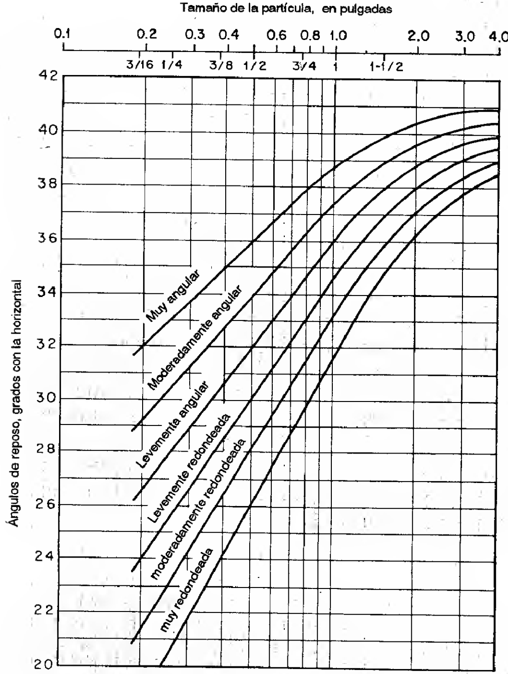


Figura 7-9. Ángulos de reposo para materiales no cohesivos (*U. S. Bureau of Reclamation*).

7-13. Fuerza tractiva permisible. La *fuerza tractiva permisible* es la fuerza tractiva unitaria máxima que no causa erosión importante en el material que forma el lecho del canal en una superficie plana. Esta fuerza tractiva unitaria puede determinarse por medio de experimentos de laboratorio, y el valor así obtenido se conoce como *fuerza tractiva crítica*. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que en canales reales conformados con materiales gruesos no cohesivos pueden soportar valores sustancialmente más altos que las fuerzas tractivas críticas medidas en el laboratorios. Esto tal vez se debe a que el agua y el suelo en canales reales contienen pequeñas cantidades de materia coloidal y orgánica lo cual da una cierta capacidad de pegamento y también porque pequeños movimientos de partículas de suelo pueden tolerarse en diseños prácticos sin poner en peligro la estabilidad del canal. Como la fuerza tractiva permisible es el criterio de diseño para condiciones de campo, el valor permisible puede tomarse menor que el valor crítico.

Ahora, la determinación de la fuerza tractiva permisible se basa en el tamaño de la partícula para materiales no cohesivos y en la compactación o relación de vacíos para materiales cohesivos. Otras propiedades del suelo, como el índice de plasticidad[7] o la acción química pueden tenerse en cuenta como índices para definir con mayor precisión la fuerza tractiva permisible. Sin embargo, faltan suficientes datos e información sobre estos índices. El U. S. Bureau of Reclamation ha hecho un estudio completo sobre el problema, utilizando datos para materiales gruesos no cohesivos obtenidos de canales en el Valle de San Luis [37], valores convertidos de velocidades permisibles dados por Etcheverry y por Fortier y Scobey, los valores de la URSS, etc. (sección 7-9). Como resultado, los valores recomendados para la fuerza tractiva permisible para el diseño de canales se desarrollaron como sigue:

Para materiales *gruesos* no cohesivos, con un factor de seguridad suficiente, el Bureau recomienda un valor tentativo para la fuerza tractiva permisible, en libras/pie^2, igual a 0.4 veces el diámetro en pulgadas de una partícula para la cual el 25% (en peso) del material es mayor. Esta recomendación se muestra por medio de una línea recta en la tabla de diseño (figura 7-10).

Para material *fino* no cohesivo, el tamaño específicado es el tamaño medio o el tamaño menor que el 50% en peso. Tentativamente se recomiendan tres curvas de diseño (figura 7-10),

1) para canales con alto contenido de material fino en el agua,
2) para canales con contenido de sedimento fino en el agua, y
3) para canales con agua limpia.

[7] El índice de plasticidad es la diferencia en porcentaje de humedad entre el límite plástico y el límite líquido en las pruebas de suelo de Atterberg. Este índice ha sido investigado por el U. S. Bureau of Reclamation como una característica del suelo que puede utilizarse para indicar la resistencia a la socavación en materiales cohesivos. Para el diseño de canales, tentativamente puede tomarse un índice de plasticidad de 7 como valor crítico, por debajo del cual ocurre socavación para fuerzas tractivas moderadas. Sin embargo, todavía se observan socavaciones en muchos casos donde el índice se encuentra por encima de 7. Algunas investigaciones muestran que la determinación del índice de plasticidad en conjunto con la prueba de consolidación-esfuerzo cortante posiblemente sea necesaria.

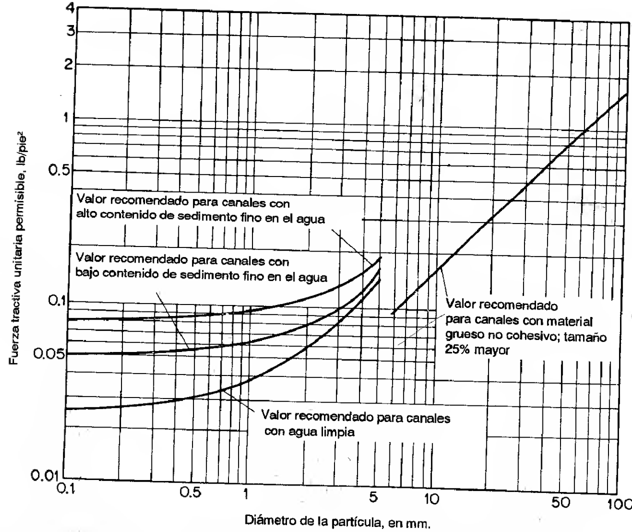


Figura 7-10. Fuerzas tractivas unitarias permisibles recomendadas para canales en materiales no cohesivos (*U. S. Bureau of Reclamation*).

Para materiales cohesivos, los datos basados en la conversión de velocidades permisibles a fuerzas tractivas unitarias, dados en la tabla 7-3 y en la figura 7-11 se recomiendan como referencias de diseño.

Las fuerzas tractivas permisibles mencionadas antes se refieren a canales rectos. Para canales sinuosos, los valores mostrados deben reducirse para reducir la socavación. Los porcentajes aproximados de reducción, sugeridos por Lane [29], son 10% para canales ligeramente sinuosos, 25% para canales moderadamente sinuosos y 40% para canales muy sinuosos.

7-14. Método de la fuerza tractiva. El primer paso para el diseño de canales erosionables mediante el método de la fuerza tractiva consiste en seleccionar una sección de canal aproximada mediante experiencia o utilizando tablas de diseño[8], recolectar muestras del material que forma el lecho del canal y determinar, utilizando estas muestras, las propiedades requeridas. Con estos datos, el diseñador investiga la sección mediante el análisis de fuerza tractiva para asegurar una estabilidad probable por tramos y para determinar la sección mínima que aparece estable. Para canales en materiales no cohesivos, el efecto de rodar hacia abajo a lo largo de la pendiente lateral debe considerarse junto con el efecto de la distribución de las fuerzas tractivas; para canales hechos en material cohesivo el efecto de rodar es

[8] En la figura 5, parágrafo 1.12*c*, de [4], se dan secciones comunes promedio para canales en tierra para irrigación y laterales construidos y propuestos por el U. S. Bureau of Reclamation y seleccionados para los caudales requeridos con base en economía y estabilidad.

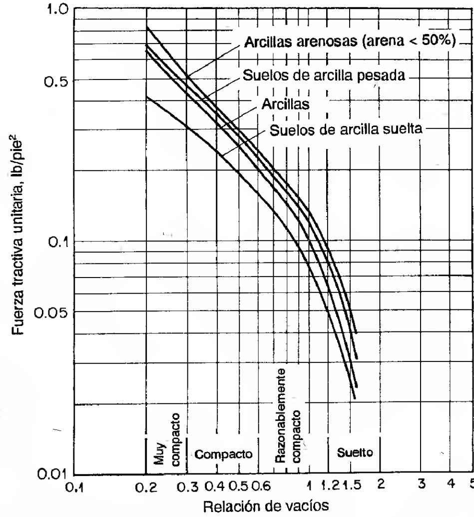


Figura 7-11. Fuerzas tractivas unitarias permisibles para canales en materiales cohesivos convertidas de los datos de la URSS sobre velocidades permisibles.

insignificante, y el efecto de la distribución de la fuerza tractiva por sí solo constituye un criterio suficiente. Sin embargo, la proporción de las dimensiones finales de la sección de canal dependerán de otras condiciones prácticas no hidráulicas. El análisis de la fuerza tractiva se describe mejor en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7-4. Diseñe un canal trapezoidal colocado sobre una pendiente de 0.0016 y que conduce un caudal de 400 pies³/s. El canal va a ser excavado en tierra que contiene gravas gruesas no coloidales y cantos rodados, 25% de los cuales tiene un diámetro de 1.25 pulg o mayor. El coeficiente de Manning es $n = 0.025$.

Solución. Para canales trapezoidales, la fuerza tractiva unitaria máxima en los lados inclinados a menudo es menor que la de fondo (figura 7-7); luego, la fuerza lateral es el valor de control en el análisis. Por consiguiente, el diseño del canal debería incluir: *a*) la proporción de las dimensiones de la sección para la fuerza tractiva unitaria máxima en los lados, y *b*) la verificación de las dimensiones proporcionadas para la fuerza tractiva unitaria máxima en el fondo.

a. Proporción de las dimensiones de la sección. Al suponer unas pendientes laterales de 2:1, o $z = 2$, y una relación base-profundidad $b/y = 5$, la fuerza tractiva unitaria máxima en los lados inclinados (figura 7-7) es $0.775wyS = 0.775 \times 62.4 \times 0.0016y = 0.078y$ lb/pie².

Al considerar un material muy redondeado de 1.25 pulg de diámetro, el ángulo de reposo (figura 7-9) es $\theta = 33.5°$. Con $\theta = 33.5°$ y $z = 2$, o $\phi = 26.5°$, la relación de fuerza tractiva mediante la ecuación (7-11) es $K = 0.587$. Para una tamaño de 1.25 pulg la fuerza tractiva sobre un fondo plano es $\tau_L = 0.4 \times 1.25 = 0.5$ lb/pie² (la misma de la figura 7-10) y la fuerza tractiva permisible en los lados es $\tau_s = 0.587 \times 0.5 = 0.294$ lb/pie².

Para un estado de movimiento inminente de las partículas en los taludes laterales, $0.078y = 0.294$, o $y = 3.77$ pies. Por consiguiente, el ancho del fondo es $b = 3.77 \times 5 = 18.85$

pies. Para esta sección trapezoidal, $A = 99.5$ pies² y $R = 2.79$ pies. Con $n = 0.025$ y $S = 0.0016$, a partir de la ecuación de Manning, el caudal es 470 pies³/s. Cálculos adicionales mostrarán que, para $z = 2$ y $b/y = 4.1$, las dimensiones de la sección son $y = 3.82$ pies y $b = 15.66$ pies y el caudal es 414 pies³/s, el cual es cercano al caudal de diseño.

Dimensiones de secciones alternas pueden obtenerse suponiendo otros valores de z o pendientes laterales.

b. Verificación de las dimensiones proporcionadas. Con $z = 2$ y $b/y = 4.1$, la fuerza tractiva unitaria máxima en el fondo del canal (figura 7-7) es $0.97wyS = 0.97 \times 62.4 \times 3.82 \times 0.0016 = 0.370$ lb/pie², menor que 0.5 lb/pie², la cual es la fuerza tractiva permisible en el fondo.

7-15. La sección hidráulica estable. La sección de un canal erosionable que no se erosiona con una área mojada mínima para un caudal determinado se conoce como *sección hidráulica estable*. Perfiles empíricos, como la elipse o la parábola, han sido sugeridos como secciones hidráulicas estables por muchos ingenieros hidráulicos. El U. S. Bureau of Reclamation [38] ha empleado el principio de la fuerza tractiva para desarrollar una sección en teoría estable para canales erosionables que conducen agua limpia en materiales no cohesivos.

En el diseño de secciones trapezoidales, como se describió en la sección anterior, la fuerza tractiva se hace igual a la permisible sólo sobre una parte del perímetro de la sección, donde las fuerzas son cercanas a su valor máximo; la mayor parte de las fuerzas perimetrales son menores que el valor permisible. En otras palabras, la inestabilidad inminente ocurre sólo sobre una pequeña parte del perímetro. En el desarrollo de una sección hidráulica estable para máxima eficiencia, es necesario satisfacer la condición de que el movimiento inminente prevalezca en todos los puntos del lecho del canal. Para un material con un ángulo de reposo y un caudal determinados, esta sección óptima dará no sólo el canal con la menor área mojada, sino también el canal con el ancho superficial mínimo, la velocidad media máxima y la excavación mínima. En la deducción matemática de esta sección hecha por el Bureau se hacen las siguientes suposiciones:

1. La partícula de suelo es mantenida contra el lecho del canal por la componente del peso sumergido de la partícula que actúa normal al lecho.
2. En la superficie del agua y sobre ella las pendientes laterales tienen un ángulo igual al ángulo de reposo del material bajo la acción de la gravedad.
3. En el centro del canal la pendiente lateral es cero y la fuerza tractiva sola es suficiente para mantener las partículas en el punto de inestabilidad incipiente.
4. En los puntos localizados entre el centro y el borde del canal las partículas se mantienen en un estado de movimiento incipiente por la resultante de la componente de gravedad del peso sumergido de las partículas que actúan en la pendiente lateral y la fuerza tractiva del agua que fluye.
5. La fuerza tractiva que actúa en un área del lecho del canal es igual a la componente del peso del agua localizada directamente por encima del área que actúan en la dirección del flujo. Esta componente del peso es igual al peso multiplicado por la pendiente longitudinal del canal.

Si se quiere mantener la suposición 5 no puede existir transferencia lateral de fuerza tractiva entre corrientes adyacentes que se muevan a diferentes velocidades en la sección (una situación, sin embargo, que en realidad nunca ocurre). Por fortuna,

el análisis matemático hecho por el Bureau[9] ha demostrado que la transferencia real de fuerza tractiva tiene muy poco efecto en los resultados y con seguridad puede no considerarse.

De acuerdo con la suposición 5, la fuerza tractiva que actúa en un área elemental sobre la pendiente lateral (figura 7-12*a*) por unidad de longitud del canal es igual a $wyS\,dx$, donde w es el peso unitario del agua, y es la profundidad del agua por encima de AB y S es la pendiente longitudinal. Como el área AB es $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, la fuerza tractiva unitaria es igual a

$$\frac{wyS\,dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = wyS \cos \phi$$

donde ϕ es el ángulo de la pendiente de la tangente a AB.

Las otras suposiciones establecidas antes han sido utilizadas para desarrollar la ecuación para la relación de fuerza tractiva K (sección 7-12). La fuerza tractiva unitaria del fondo en el centro del canal es $\tau L = wy_0S$, donde y_0 es la profundidad de flujo en el centro. La fuerza tractiva unitaria correspondiente en el área inclinada AB es, por consiguiente, igual a wy_0SK.

Para conseguir movimiento incipiente sobre el perímetro completo del lecho del canal, las dos fuerzas mencionadas en los párrafos anteriores deben ser iguales; es decir,

$$wyS \cos \phi = wy_0SK$$

Al sustituir la ecuación (7-10) para K y $\tan^{-1}(dy/dx)$ para ϕ en la ecuación anterior y al simplificar,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \tan^2\theta = \tan^2\theta$$

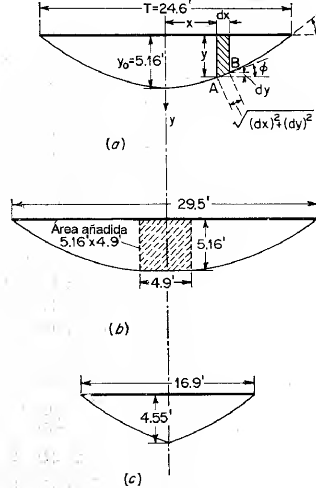


Figura 7-12. Análisis y diseño de una sección hidráulica estable. (*a*) Sección teórica para propiedades del suelo y pendiente del canal determinadas, siempre que $Q = 220$ pies³/s; (*b*) sección modificada para $Q'' = 400$ pies³/s; (*c*) sección modificada para $Q' = 100$ pies³/s.

En el centro del canal, $y = y_0$ y $x = 0$. Bajo esta condición la solución a la ecuación diferencial anterior es

$$y = y_0 \cos\left(\frac{\tan\theta}{y_0}x\right) \qquad (7\text{-}12)$$

[9] Teniendo en cuenta el efecto de la fuerza tractiva lateral, una suposición alternativa fue hecha por el Bureau, la cual establece que la fuerza tractiva que actúa sobre una partícula es proporcional al cuadrado de la velocidad media del canal en el punto donde se localiza la partícula. Esta suposición da una solución que está muy acorde con la solución basada en la suposición 5. Por consiguiente, no considerar la transferencia de fuerza tractiva en el análisis dará resultados igualmente satisfactorios y con un trabajo considerablemente menor.

Esta ecuación muestra que la forma de una sección hidráulica estable bajo las suposiciones especificadas es una curva simple de coseno. A partir de los resultados del análisis matemático del Bureau pueden establecerse las siguientes propiedades de esta sección estable

$$y_0 = \frac{\tau_0}{0.97wS} \quad (7\text{-}13)$$

$$V = \frac{1.35 - 1.19 \tan\theta}{n} y_0^{2/3} S^{1/2} \quad (7\text{-}14)$$

$$A = \frac{2.04 y_0^2}{\tan\theta} \quad (7\text{-}15)$$

donde τ_0 es la fuerza tractiva permisible en lb/pie², V es la velocidad media en la sección en pies/s, A es el área mojada en pies², θ es el ángulo de reposo del material o el ángulo de la pendiente de la sección en el borde del contacto de la superficie del agua en el canal, T es el ancho en la superficie, y el resto de los símbolos son los que se describieron antes.

El caudal de la sección teórica es igual a $Q = VA$. Si el canal va a conducir un caudal menor que Q, es necesario remover una parte vertical de la sección en el centro del canal. Suponga que Q' es el caudal que va a conducirse, el cual es menor que Q, y que los anchos en la superficie de la sección diseñada y con el área removida son T y T' respectivamente. El valor de T' puede calcularse mediante

$$T' = 0.96\left(1 - \sqrt{\frac{Q'}{Q}}\right) T \quad (7\text{-}16)$$

Por otro lado, si el canal va a conducir un cuadal mayor que el de la sección teórica, es necesario añadir una sección rectangular en el centro. Suponga que Q'' es el caudal que va a conducirse, el cual es mayor que Q, y el ancho superficial del área rectangular añadida es T''. El valor de T'' puede calcularse mediante

$$T'' = \frac{n(Q'' - Q)}{1.49 y_0^{5/3} S^{1/2}} \quad (7\text{-}17)$$

Ejemplo 7-5. Determine el perfil de la sección hidráulica estable para remplazar la sección trapezoidal descrita en el ejemplo 7-4.

Solución. Para las condiciones dadas $\tau_0 = 0.5$ lb/pie², $S = 0.0016$, $\theta = 33.5°$ y $n = 0.025$. A partir de la ecuación (7-13), la profundidad en el centro es $y_0 = 0.5/(0.97 \times 62.4 \times 0.0016) = 5.16$ pies. A partir de la ecuación (7-12), la forma de la sección teórica es

$$y = 5.16 \cos 0.128x$$

la cual se grafica tal como se muestra en la figura 7-12*a*. Nótese que el ángulo de la función coseno se expresa en radianes; puede convertirse a grados multiplicándolo por $180/\pi$ o 57.3. El ancho en la superficie puede calcularse mediante la ecuación (7-12) con $y = 0$, o $\cos 0.128z = 0$. Luego, $0.128z = \pi/2$ y $x = 12.3$. El ancho en la superficie es $T = 2x = 24.6$ pies.

A partir de la ecuación (7-14), la velocidad media es $V = (1.35 - 1.19 \tan 33.5°)\, 5.16^{2/3} \times 0.0016^{1/2}/0.025 = 2.69$ pies/s. A partir de la ecuación (7-15), el área mojada es $A = 2.04 \times 5.16^2/\tan 33.5° = 82.2$ pies². Por consiguiente, el caudal es 220 pies³/s. Como el caudal de diseño es 400 pies³/s, es necesario añadir una sección rectangular en el centro (figura 7-12*b*). El ancho del rectángulo puede calcularse utilizando la ecuación (7-17) como

$$T'' = \frac{0.025(400 - 220)}{1.49 \times 5.16^{5/3} \times 0.0016^{1/2}} = 4.9 \text{ pies}$$

Por consiguiente, el ancho en la superficie es 24.6 + 4.9 = 29.5 pies.

Si el canal se diseña para conducir 100 pies³/s, es necesario remover un área vertical en el centro del canal (figura 7-12*c*). El ancho de la superficie del área removida se calcula a partir de la ecuación (7-16).

$$T' = 0.96(1 - \sqrt{100/220}) \times 24.6 = 7.7 \text{ pies}$$

Luego, el ancho en la superficie es 24.6 – 7.7 = 16.9 pies.

C. CANALES EN PASTO

7-16. Canales en pasto. La presencia de pastos o vegetación en los canales dan como resultado turbulencia considerable, lo cual significa pérdidas de energía y retardo en el flujo. Sin embargo, para canales en tierra utilizados para conducir agua en terrenos de cultivo a menudo se encuentra que un recubrimiento de pastos puede ser ventajoso y conveniente. El pasto estabiliza el cuerpo del canal, consolida la masa de suelo del lecho y frena la erosión en la superficie del canal y el movimiento de partículas de suelo a lo largo del fondo del canal. El U. S. Soil Conservation Service [39-41] llevó a cabo una serie de experimentos en canales recubiertos con diferentes clases de pasto (figura 7-13). Los resultados obtenidos bajo diferentes condiciones de prueba y el procedimiento sugerido para el diseño de canales en pasto se describirán en las siguientes secciones.

7-17. Coeficiente de retardo. El coeficiente de Manning de rugosidad para canales en pasto se conoce específicamente como *coeficiente de retardo*. De acuerdo con la investigación hecha por el Soil Conservation Service, se encontró que el n de Manning para una sola clase de pasto variaba dentro de un amplio rango según la profundidad de flujo y la forma y la pendiente del canal. Luego, la selección de un valor de diseño para n sería casi imposible. Por fortuna, se descubrió que el coeficiente de retardo n mantiene cierta relación con el producto de la velocidad media del flujo V y el radio hidráulico R. Esta relación es característica de la vegetación independiente de la inclinación y forma del canal. Por consiguiente, como resultado se desarrolló una serie de curvas experimentales de n *versus* VR (figura 7-14) para cinco grados diferentes de retardo: muy alto, alto, moderado, bajo y muy bajo. Para retardo muy bajo sólo se muestra la curva promedio, en conjunto con las curvas para retardo bajo. La clasificación del grado de retardo se basa en la clase de vegetación y la condición de crecimiento, como se describe en la tabla 7-4.

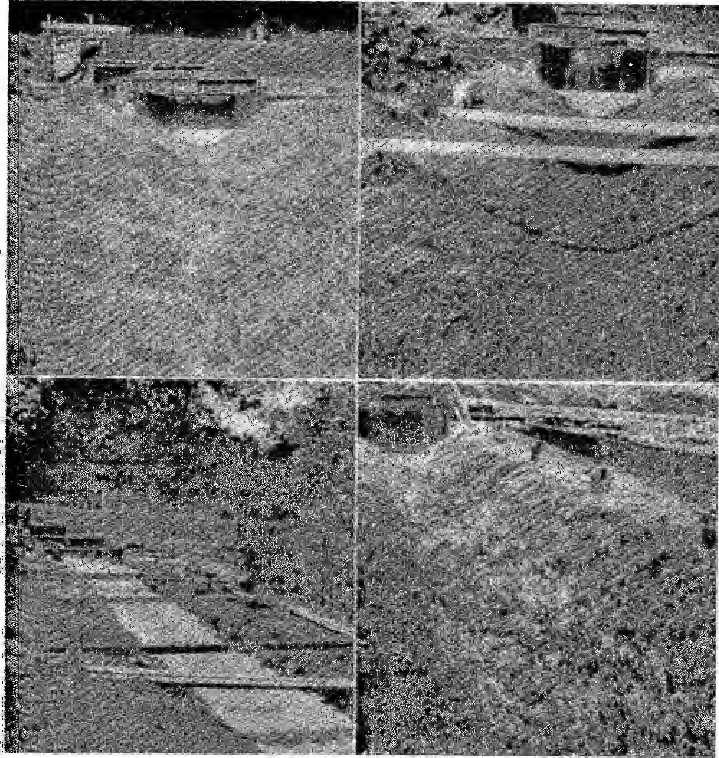


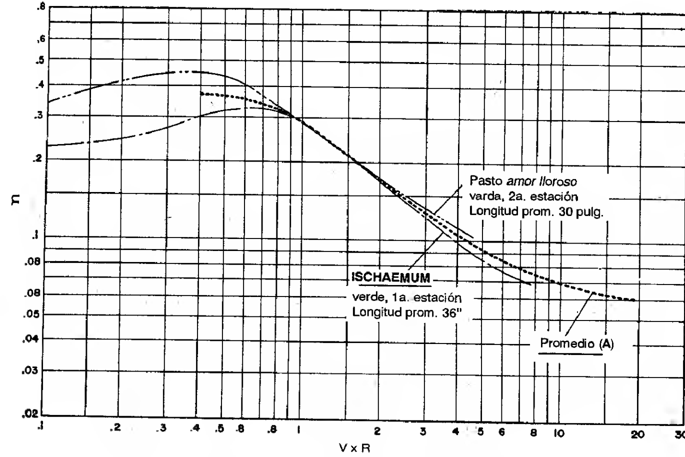
Figura 7-13. Canal en pasto ciempiés (*cortesía de W. O. Ree, U. S. Agricultural Research Service*
(*A*) Antes del experimento; (*B*) después de una prueba con un canal de 15 pies^3/s durante 40 minuto
(*C*) durante una prueba con un caudal de 30 pies^3/s; (*D*) al final de todo el experimento

El término "densidad superficial" utilizado en la tabla se refiere a la densida del pasto, o el conteo de vegetación, el cual algunas veces se expresa como el númer de tallos por pie^2. Las curvas *n-VR* desarrolladas de esta manera también puede aplicarse a otras clases de pasto, siempre que sus características y grados de retard puedan identificarse. Para este propósito, se da la tabla 7-5 como una guía par establecer el retardo vegetal para diferentes condiciones de densidad superficial longitud promedio del pasto.

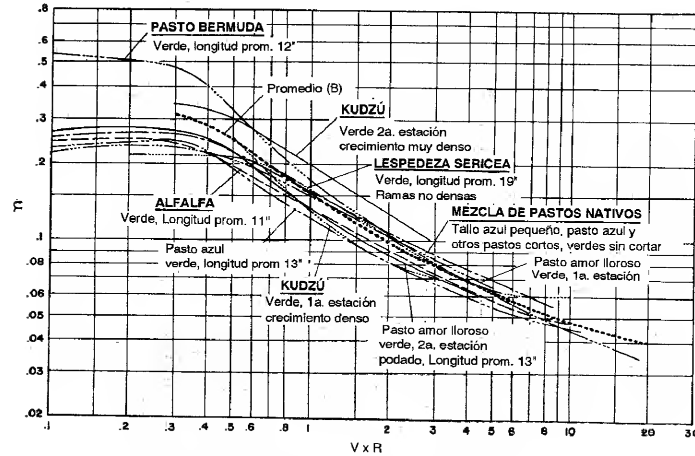
Tabla 7-4. Clasificación del grado de retardo para diferentes clases de pastos*

Retardo	Cubierta	Condición
A. Muy alto	Pasto amor lloroso	Excelente densificación, alto (30 pulg prom.)
	Ischaemum amarilla tallo azul . .	Excelente densificación, alto (36 pulg prom.)
B. Alto	Kudzú	Crecimiento muy denso, sin cortar
	Pasto Bermuda	Buena densificación, alto (12 pulg prom.)
	Mezcla de pasto nativo (tallo azul pequeño, pasto azul, y otros pastos largos y cortos del Mediooeste) .	Buena densificación sin podar
	Pasto amor lloroso	Buena densificación alto (24 pulg prom.)
	Lespedeza sericea	Buena densificación, no boscosa, alta (19 pulg prom.)
	Alfalfa	Buena densificación, sin cortar (11 pulg prom.)
	Pasto amor lloroso	Buena densificación, podado (13 pulg prom.)
	Kudzú	Crecimiento denso, sin cortar
	Pasto azul	Buena densificación, sin cortar (13 pulg prom.)
C. Moderado	Pasto cangrejo	Regular densificación, sin cortar (10 a 48 pulg.)
	Pasto Bermuda	Buena densificación, podado (6 pulg prom.)
	Lespedeza común	Buena densificación, sin cortar (11 pulg prom.)
	Mezcla de pastos de verano y leguminosas (pastos de huerta, forrajes, *rye grass* italiano y *lespedeza* común)	Buena densificación, sin cortar (6 a 8 pulg)
	Pasto cienpiés	Cubierta muy densa (6 pulg pom.)
	Pasto azul Kentucky	Buena densificación, hacia arriba (6 a 12 pulg)
D. Bajo	Pasto Bermuda	Buena densificación, cortado a 2.5 pulg de alto
	Lespedeza común	Excelente densificación, sin cortar (4.5 pulg prom.)
	Pasto búfalo	Buena densificación, sin cortar (3 a 6 pulg)
	Mezcla de pastos y leguminosas de otoño o primavera (pastos de huerta, forrajes, *rye grass* italiano y *lespedeza* común)	Buena densificación, sin cortar (4 a 5 pulg)
	Lespedeza sericea	Después de cortar hasta 2 pulg de altura, muy buena densificación después del corte
E. Muy bajo	Pasto Bermuda	Buena densificación, cortado hasta 1.5 pulg de altura
	Pasto Bermuda	Rastrojo quemado

* U.S. Soil Conservation Service [41].

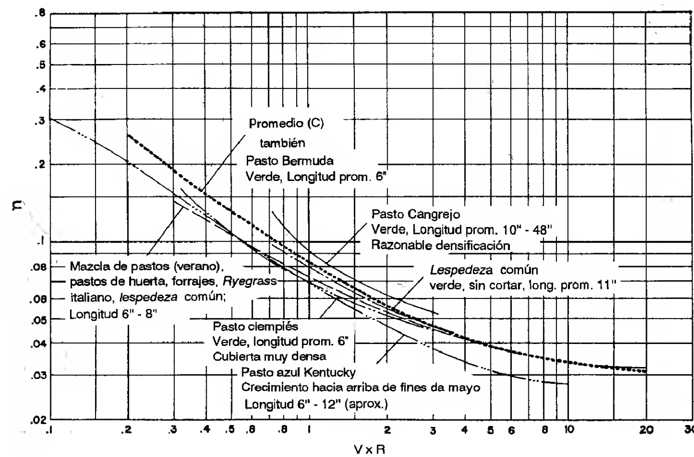


(*a*) Curvas para *A* o retardo vegetal muy alto.

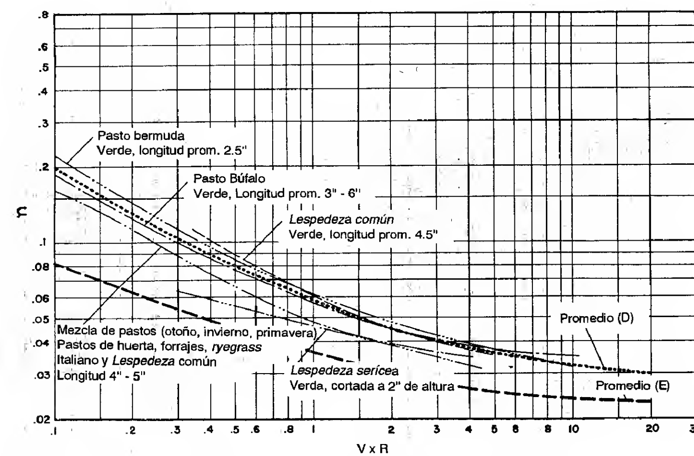


(*b*) Curvas para *B* o retardo vegetal alto.

Figura 7-14. Curvas *n-VR* experimentales (*U. S. Soil Conservation Service*).



(*c*) Curvas para *C* o retardo vegetal moderado.



(*d*) Curvas para *D* o retardo vegetal bajo, y una curva promedio para *E* o retardo vegetal muy bajo.

Figura 7-14. (*continuación*)

Tabla 7-5. Guía para la selección del retardo vegetal*

Densificación	Longitud promedio de pasto, pulg	Grado de retardo
Buena	> 30	A Muy alto
	11-24	B Alto
	6-10	C Moderado
	2-6	D Bajo
	< 2	E Muy bajo
Razonable	> 30	B Alto
	11-24	C Moderado
	6-10	D Bajo
	2-6	D Bajo
	< 2	E Muy bajo

* U.S. Soil Conservation Service [41].

7-18. Velocidad permisible. La velocidad permisible de flujo en un canal en pasto es aquella velocidad que evitará erosión severa en el canal durante un periodo razonable. Las velocidades permisibles para diferentes cubiertas vegetales, inclinaciones de canal y condiciones del suelo, recomendadas con base en la investigación del Soil Conservation Service, se muestran el la tabla 7-6.

Tabla 7-6. Velocidades permisibles para canales recubiertos en pasto*

Cubierta	Rango de pendiente, %	Velocidad permisible, pies/s	
		Suelos resistentes a la erosión	Suelos fácilmente erosionables
Pasto Bermuda	0-5	8	6
	5-10	7	5
	> 10	6	4
Pasto búfalo, Pasto azul Kentucky, pasto bromo liso, pasto azul	0-5	7	5
	5-10	6	4
	> 10	5	3
Mezcla de pastos	0-5	5	4
	5-10	4	3
	No usar en pendientes mayores al 10%		
Lespedeza sericea, pasto amor lloroso, *ischaemum* (amarilla tallo azul), Kudzú, alfalfa, pasto cangrejo	0-5	3.5	2.5
	No usar en pendientes mayores al 5%, excepto para las pendientes laterales en un canal combinado.		
Anuales utilizados en pendientes bajas como protección temporal hasta que se establezca una cubierta permanente de *lespedeza* común o pasto Sudán	0-5	3.5	2.5
	El uso en pendientes mayores al 5% no es recomendable		

Observaciones. Los valores se aplican a densificaciones promedio y uniformes para cada tipo de cubierta. Utilice velocidades superiores a 5 pies/s solamente cuando puedan obtenerse cubiertas buenas y mantenimiento apropiado.
* U.S. Soil Conservation Service [41].

7-19. Selección del pasto. La selección del pasto para el recubrimiento de un canal depende principalmente del clima y del suelo en el cual las plantas crecerán y sobrevivirán bajo las condiciones determinadas. Desde el punto de vista hidráulico, también deben considerarse la estabilidad y otros factores. En general, un caudal grande requiere un recubrimiento más fuerte y mejor. En pendientes empinadas, los pastos de manojo, como la alfalfa, la *lespedeza*, y el kudzú, desarrollarán canalizaciones para el flujo y, por consiguiente, son poco adecuados como revestimiento vegetal. Para pendientes superiores al 5%, sólo pastos finos y uniformemente distribuidos, como el pasto Bermuda, el pasto azul Kentuky y pastos lisos se recomiendan para recubrimientos en los canales donde ocurre el flujo principal. Debido a la molesta naturaleza de propagarse que tienen los pastos que forman césped, la parte superior de los lados y la berma del canal pueden plantarse con pastos que no se propaguen con facilidad, como el pasto amor lloroso. Para un establecimiento rápido del recubrimiento se recomiendan los pastos Bermuda y amor lloroso. Algunas veces se utilizan plantas anuales como protección temporal hasta que se establezcan cubiertas permanentes con pastos nativos. La sedimentación de limos en canales puede controlarse recubriendo con pastos de manojo, los cuales desarrollarán flujo canalizado, incrementando la velocidad y reduciendo la sedimentación.

7-20. Procedimiento de diseño. Una vez que se ha seleccionado la clase de pasto para un recubrimiento de canal, el grado de retardo puede determinarse a partir de la condición de longitud de los tallos y la densidad de crecimiento. Durante el periodo de establecimiento el pasto crecerá y el canal se estabilizará bajo la condición de bajo grado de retardo. El canal no alcanzará su máxima capacidad hasta que la cubierta de pasto se encuentre completamente desarrollada y bien establecida. Por consiguiente, se sugiere que el diseño hidráulico de un canal en pasto conste de dos etapas. La primera etapa (A) es la de diseñar el canal para estabilidad, es decir, determinar las dimensiones del canal bajo la condición de un grado de retardo *más bajo*. La segunda etapa (B) es revisar el diseño para capacidad máxima, es decir, determinar el incremento en la profundidad de flujo necesario para mantener la capacidad máxima bajo la condición de un grado de retardo *más alto*. Por ejemplo, si se selecciona la *lespedeza* común como el pasto para un revestimiento, se utiliza *lespedeza* común con un grado de retardo vegetal bajo (verde, longitud promedio de 4.5 pulg) para la primera etapa de diseño. Luego, en la segunda etapa, debe utilizarse *lespedeza* común con un grado de retardo vegetal moderado (verde, sin podar, longitud promedio 11 pulg). Por último, se añade un borde libre apropiado a la profundidad calculada del canal, que incrementará la capacidad de diseño máxima. El procedimiento de diseño[10] se describe de la siguiente manera:

A. Diseño para estabilidad. Conocidos el caudal, la pendiente del canal y la clase de pasto, la primera etapa de diseño puede proceder siguiendo los siguientes pasos:

1. Suponer un valor de n y determinar los valores correspondientes de VR utilizando la curva n-VR (figura 7-14).

[10] Para un ejemplo sobre el diseño práctico de un canal en pasto, *véase* [42].

2. A partir de la tabla 7-6, seleccionar la velocidad permisible y calcular valor de R.

3. A partir de la ecuación de Manning, calcular el valor de

$$VR = \frac{1.49R^{5/3}S^{1/2}}{n}$$

y verificar este valor contra el valor de VR obtenido en el paso 1.

4. Hacer otros tanteos hasta que el valor calculado de VR sea igual al valor ‹ VR obtenido en la curva n-VR.

5. Calcular el área mojada o $A = Q/V$.

6. Como los valores de A y R se han obtenido, las dimensiones de la secci‹ pueden determinarse utilizando el procedimiento descrito en la sección 7-7.

Las secciones a menudo utilizadas para canales en pasto son la trapezoidal, parabólica y la triangular, nombradas en orden de incremento de profundid‹ requerida en la excavación. Debido a la acción normal de la sedimentación y erosión en el canal, las secciones trapezoidales y triangulares, seleccionadas principio pero sin mantenimiento, por lo general se volverán parabólicas después ‹ un largo periodo de servicio.

Ejemplo 7-6. Determine la sección de un canal recubierto con una mezcla de pastos, colocados ‹ un suelo resistente a la erosión con una pendiente de 0.04, el cual conduce un caudal de 50 pies³/‹

Solución. En el diseño para estabilidad se considera la mezcla de pasto que ofrece un retar‹ vegetal bajo, es decir, la correspondiente a la estación de invierno. Por consiguiente, de‹ utilizarse la curva n-VR correspondiente para el cálculo.

A partir de la tabla 7-6, se toma la velocidad permisible para diseño como 5 pies/ Utilizando la curva n-VR (figura 7-14) para una mezcla de pastos durante el otoño, el invier‹ y la primavera, los cálculos por tanteo implicados en el diseño son los siguientes:

Tanteo Nº	n	VR	R	$\frac{1.49R^{5/3}S^{1/2}}{n}$
1	0.04	1.80	0.36	1.36
2	0.05	0.90	0.18	0.34
3	0.035	3.50	0.70	4.72
4	0.0375	2.50	0.50	2.50

Los valores correctos para la determinación de las secciones son $R = 0.50$ pies y $A = 50/5 = 1$‹ pies². Varias secciones que cumplen estos requerimentos se proponen en la siguiente form‹ (utilizando los cuadros del apéndice B):

Sección	Pendiente lateral z: 1	Ancho en el fondo b, pies	Profundidad y, pies	Ancho superior T, pies
Trapecio.	3:1	17.0	0.53	20.18
Trapecio.	6:1	12.5	0.62	19.94
Triángulo.	10:1	0	1.00	20.00
Parábola.	. . . .	. . . .	0.73	20.00

B. Diseño para máxima capacidad. La segunda etapa en el diseño es determinar la profundidad adicional necesaria para permitir la máxima capacidad con un revestimiento completamente desarrollado. El procedimiento es como sigue:

1. Suponer la profundidad y y calcular el área mojada A y el radio hidráulico R.

2. Calcular la velocidad V mediante $V = Q/A$ y el valor de VR.

3. A partir de la curva n-VR con un grado de retardo más alto para el recubrimiento seleccionado, determinar el valor de n.

4. Calcular la velocidad a partir de la ecuación de Manning y verificar este valor de V contra el valor obtenido en el paso 2.

5. Hacer cálculos por tanteo hasta que el valor calculado de V en el paso 4 sea igual al valor calculado de V en el paso 2. Nótese que esta velocidad es siempre menor que la velocidad permisible supuesta en la primera etapa de diseño, es decir, en el diseño para estabilidad, debido a que la sección transversal ha sido agrandada en la segunda etapa de diseño.

6. Añadir el borde libre apropiado a la profundidad calculada.

Ejemplo 7-7. Modifique las secciones seleccionadas en el ejemplo 7-6 para capacidad máxima.

Solución. Para determinar la profundidad apropiada para capacidad máxima en las secciones propuestas, la mezcla de pastos en la estación de crecimiento, la cual ofrece un retardo vegetal moderado, se considera en el cálculo. Se utiliza entonces la curva n-VR (figura 7-14) para la mezcla de pastos en el verano. Otros datos conocidos son $Q = 50$ pies³/s y $S = 0.04$.

Para la sección transversal trapezoidal con una pendiente lateral de 3:1 y $b = 17.0$ pies, los cálculos por tanteo se muestran a continuación:

Tanteo Nº	y	A	R	V	VR	n	$V = \frac{1.49R^{2/3}S^{1/2}}{n}$
1	0.70	13.4	0.63	3.73	2.35	0.051	4.22
2	0.60	11.3	0.54	4.42	2.39	0.050	3.96
3	0.65	12.3	0.58	4.07	2.36	0.051	4.07

La profundidad correcta es 0.65 pies. Al añadir un borde libre de 0.2 pies, la profundidad total es 0.85 pies.

Para la sección trapezoidal con una pendiente lateral de 6:1 y $b = 12.5$ pies, los cálculos arrojan una profundidad total de 0.94 pies. De igual modo, la profundidad total de la sección triangular con pendientes laterales de 10:1 es de 1.33 pies.

Para la sección parabólica de $y = 0.73$ pies y $T = 20$ pies los cálculos por tanteo son los siguientes:

Tanteo Nº	y	T	A	R	V	VR	n	$\frac{1.49R^{2/3}S^{1/2}}{n}$
1	0.80	21.0	11.2	0.52	4.46	2.32	0.051	3.78
2	0.90	22.2	13.3	0.60	3.76	2.25	0.051	4.16
3	0.85	21.6	12.2	0.57	4.10	2.34	0.051	4.03
4	0.86	21.7	12.4	0.58	4.03	2.34	0.051	4.07

Nótese que los cálculos para la sección parabólica se simplifican mediante el uso de la ecuación para R dada en la tabla 2-1 y por el hecho de que la profundidad es proporcional al cuadrado del ancho de la superficie; es decir, $T = 20\sqrt{y/0.73}$. Al dejar un borde libre de 0.20 pies, la profundidad total es 1.06 pies y el ancho de la superficie es 24.1 pies.

La selección final para la sección de canal y sus dimensiones dependerán de los aspectos prácticos de construcción y en circunstancias bajo las cuales el problema se propone.

PROBLEMAS

7-1. Demuestre que la sección hidráulica rectangular o triangular más eficiente es medio cuadrado.

7-2. Explique: a) que cualquier sección formada por un polígono que pueda ser inscrito en un semicírculo con su centro en la superficie del agua tendrá su radio hidráulico igual a la mitad del radio del círculo inscrito, y *b*) que tal sección tendrá la mayor eficiencia hidráulica.

7-3. Determine la sección hidráulica óptima para el canal del ejemplo 7-2 si la sección es: *a*) rectangular, *b*) triangular, *c*) circular, *d*) parabólica, y *e*) en la forma de una catenaria hidráulica.

7-4. Resuelva el ejemplo 7-2 mediante la regla empírica de las ecuaciones (7-2) y (7-3).

7-5. Diseñe un canal no erosionable para conducir 200 pies³/s con $n = 0.020$ y $S = 0.0020$. Utilice su propio criterio y sus suposiciones.

7-6. Basado en la práctica del U. S. Bureau of Reclamation determine: *a*) el borde libre del canal diseñado en el ejemplo 7-2, cuando éste no se encuentra revestido, y *b*) las alturas del revestimiento de las bancas si el canal se reviste.

7-7. Resuelva el ejemplo 7-3 si el material que forma el cuerpo del canal es limo fino con un tamaño promedio de partícula de 0.006 mm. Estime la velocidad permisible con la ayuda de *a*) la tabla de Fortier y Scobey, *b*) los datos de la URSS y *c*) la ecuación de Kennedy modificada para agua limpia.

7-8. Resuelva el ejemplo 7-3 si el material que conforma el cuerpo del canal es un suelo arcilloso medianamente compactado con una relación de vacíos de 1.0.

7-9. Resuelva el ejemplo 7-3 si el canal tiene una sección parabólica.

7-10. Diseñe la sección de un canal para conducir 200 pies³/s a través de un terreno de suelos erosionables con $n = 0.020$ y $S = 0.0020$. Suponga cualquier otra información necesaria y utilice su propio criterio.

7-11. El canal All American se diseñó para derivar 15,155 pies³/s de agua decantada (o sin limos) desde el río Colorado para irrigar el Imperial Valley, en el Sur de California. Este canal tiene 80 millas de longitud. La sección máxima común tiene un ancho en la base de 160 pies, un ancho en la superficie del agua de 232 pies, una profundidad de flujo de 20.6 pies, un borde libre mínimo de 6 pies y un ancho en la banca de 27 a 30 pies. La capacidad en su tramo final es 2,600 pies³/s. El canal fue excavado en su mayor parte en suelo aluvial, variando desde margas ligeramente arenosas o con limos a arcilla para adobes con un tamaño de partícula promedio de 0.0025 pulg. Revise el diseño hidráulico de la sección de canal.

7-12. Revise la estabilidad de las dimensiones de la sección obtenida en el ejemplo 7-3 mediante el método de la fuerza tractiva, suponiendo que el 25% del material que forma el lecho del canal tiene un diámetro de 1.25 pulg o mayor.

7-13. Resuelva el ejemplo 7-4 para las siguientes condiciones, respectivamente:

a) Si se supone que las pendientes laterales son de 1 a 1.5.

b) Si el material que forma el lecho del canal contiene partículas finas no cohesivas, el 50% de las cuales son superiores a 1 mm de diámetro. El agua es limpia.

c) Si el material que forma el lecho del canal es una arcilla compacta cohesiva, con una relación de vacíos de 0.5.

d) Si el canal es moderadamente sinuoso.

7-14. La conversión de la velocidad máxima permisible a fuerza tractiva permisible (tabla 7-3) se basa en una profundidad de flujo de 3 pies y en una sección de canal promedio con un ancho en la base de 10 pies y pendientes laterales de 1.5:1. Para limos aluviales no coloidales y un flujo de agua limpia, la velocidad máxima permisible recomendada por Fortier y Scobey es 2.00 pies/s y el valor de n se toma como 0.020. Calcule la fuerza tractiva permisible correspondiente.

7-15. Calcule la fuerza tractiva máxima por unidad de área en la sección del canal All American descrito en el problema 7-11.

7-16. Determine la sección transversal y el caudal de la sección hidráulica estable de un canal excavado en un material no cohesivo con $\tau_0 = 0.1$ lb/pie², $S = 0.0004$, $\theta = 31°$ y $n = 0.020$.

7-17. Determine el perfil modificado para la sección de canal obtenida en el problema anterior si el canal debe conducir: a) 75 pies³/s y b) 300 pies³/s.

7-18. Diseñe un cauce de agua recubierto con pasto Bermuda sobre un suelo resistente a la erosión para conducir un caudal de 200 pies³/s. La pendiente promedio del canal es 3%. Utilice la curva para retardo vegetal moderado.

7-19. Determine la profundidad total para capacidad máxima de la sección de canal propuesta en el problema anterior. Deje un borde libre igual al 20% de la profundidad calculada.

REFERENCIAS

1. Victor L. Streeter, "Economical canal cross sections", *Transactions*, Vol. 110, *American Society of Civil Engineers*, 1945, pp. 421-430.
2. Ivan E. Houk, "Irrigation Engineering", Vol. 2, *Projects, conduits, and structures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.
3. *Linings for irrigation canals*, U.S. Bureau of Reclamation, julio de 1952.
4. "Canals and related structures", *U.S. Bureau of Reclamation, Design and construction manual, Design supplement Nº 3*, abril 17 de 1952, Vol. x, Parte 2, Capítulo 1, parágrafos 1.15, 1.8, y 1.18.
5. B. A. Etcheverry, "Irrigation practice and engineering", Vol. II, *Conveyance of Water*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1ª ed., 1915, p. 122.
6. Guilford L. Molesworth, *Pocket-book of engineering formulae (Useful formulae and memoranda) for civil and mechanical engineers*, E. & F. N. Spon, London, 7ª ed., 1871, p. 176.
7. Isidro D. Cariño, "A graphical solution for flow in earth channels", artículo 1360, *Proceedings*, Vol. 83, Nº IR2, *American Society of Civil Engineers, Journal, Irrigation and Drainage Division*, septiembre de 1957, pp. 1-9.
8. Pete W. Terrell y Whitney M. Borland, "Design of stable canals and channels in erodible material", *Transactions*, Vol. 123, *American Society of Civil Engineers*, 1958, pp. 101-115.
9. E. W. Lane, "Stable channels in erodible material", *Transactions*, Vol. 102, American Society of Civil Engineers, 1937, pp. 123-142.
10. Robert G. Kennedy, "The prevention of silting in irrigation canals", *Proceedings*, Vol. 119, *Institution of Civil Engineers*, London, 1895, pp. 281-290.
11. Edward S. Lindley, "Regime channels", *Minutes of proceedings*, Vol. 7, Punjab Engineering Congress, Lahore, India, 1919, pp. 63-74.
12. Gerald Lacey, "Stable channels in alluvium", *Proceedings*, Vol. 229, *Institution of Civil Engineers*, London, 1930, pp. 259-384.
13. Gerald Lacey, "Regime flow in incoherent alluvium", *Central Board of Irrigation, Publication Nº 20*, Simla, India, 1940.
14. Gerald Lacey, "A general theory of flow in alluvium", *Journal*, Vol. 27, Institution of Civil Engineers, London, 1946, pp. 16-47.

15. Thomas Blench, *Hydraulics of sediment-bearing canals and rivers*, Evans Industries, Ltd., Vancouver, B.C., Canada, 1951.
16. Thomas Blench, "Regime theory for self-formed sediment bearing channels", *Transactions*, Vol. 117, *American Society of Civil Engineers*, 1952, pp. 383-400.
17. H. A. Einstein, "The bed-load function for sediment transportation in open channel flows", *U.S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 1026*, 1950.
18. L. B. Leopold y Thomas Maddock, Jr., "The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications", *U.S. Geological Survey, Professional Paper 252*, 1953.
19. E. W. Lane, "Stable channels in erodible material". *Transactions*, Vol. 102, *American Society of Civil Engineers*, 1937, pp. 123-142.
20. Serge Leliavsky, *An introduction to fluvial hydraulics*, Constable & Co., Ltd., London, 1955.
21. Institution Research Committee, "Recent developments in hydraulics", *Proceedings*, Parte III, Vol. 4, *Institution of Civil Engineers*, London, diciembre de 1955, pp. 990-1049.
22. Ning Chien, "The present status of research on sediment transport", *Transactions*, Vol. 121, *American Society of Civil Engineers*, 1956, pp. 833-868.
23. Ning Chien, "Graphic design of alluvial channels", *Transactions*, Vol. 121, *American Society of Civil Engineers*, 1956, pp. 1267-1280.
24. Ning Chien, "A concept of the regime theory", *Transactions*, Vol. 122, *American Society of Civil Engineers*, 1957, pp. 785-793.
25. Enos J. Carlson y Carl R. Miller, "Research needs in sediment hydraulics", artículo 953, *Proceedings*, Vol. 82, Nº HY2, *American Society of Civil Engineers, Journal, Hydraulics Division*, abril de 1956, pp. 1-33.
26. B. A. Etcheverry, *Irrigation practice and engineering*, Vol. II, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1915.
27. S. Fortier y F. C. Scobey, "Permissible canal velocities", *Transactions*, Vol. 89, *American Society of Civil Engineers*, 1926, pp. 940-956.
28. "The maximum permissible mean velocity in open channels", *Gidrotekhnicheskoie Stroitel'stvo*, (*Hydrotechnical construction*), Nº 5, Moscow, mayo de 1936, pp. 5-7.
29. Emory W. Lane, "Design of stable channels", *Transactions*, Vol. 120, American Society of Civil Engineers, 1955, pp. 1234-1260.
30. P. du Boys, "Études du régime du Rhône et l'action exercée par les eaux sur un lit à fond de graviers indéfiniment affouillable" ("The Rhone and streams with movable beds"), *Annales des ponts et chaussées*, Ser. 5, Vol. 18, 1879, pp. 141-195.
31. J. B. Leighly, "Toward a theory of the morphologic significance of turbulence in the flow of water in stream", *University of California, Publications in Geography*, Vol. 6, Nº 1, Berkeley, 1932, pp. 1-22.
32. O. J. Olsen y Q. L. Florey (compiladores), "Sedimentation studies in open channels: boundary shear and velocity distribution by membrane analogy, analytical and finite-difference methods", revisado por D. McHenry y R. E. Glover, *U.S. Bureau of Reclamation, Laboratory Report, Nº Sp-34*, agosto 5 de 1952.
33. Philipp Forchheimer, *Hydraulik* (*Hydraulics*), Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1ª ed., 1924, p. 495; 3ª ed., 1930, p. 551.
34. Chia-Hwa Fan, "A study of stable channel cross section" (en chino), *Hydraulic engineering*, Vol. 15, Nº 1, *Chinese Society of Hydraulic Engineers*, Nanking, 1947, pp. 71-79.
35. E. W. Lane, "Progress report on results of studies on design of stable channels", *U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report, Nº Hyd-352*, junio de 1952.
36. A. C. Carter, "Critical tractive forces on channel side slopes", *U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-366* (remplaza al Nº *Hyd-295*), febrero 18 de 1953.
37. E. W. Lane y E. J. Carlson, "Some factors affecting the stability of canals constructed in coarse granular materials", *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Sept. 1-4*, 1953, Joint Meeting of International Association for Hydraulic Research and Hydraulics Division, *American Society of Civil Engineers*, agosto de 1953, pp. 37-48.

38. R. E. Glover y Q. L. Florey, "Stable channel profiles", *U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-325*, septiembre 27 de 1951. El trabajo fue iniciado por R. G. Conard y revisado por E. W. Lane.
39. W. O. Ree, "Hydraulic characteristics of vegetation for vegetated waterways", *Agricultural engineering*, Vol. 30, Nº 4, abril de 1949, pp. 184-187 y 189.
40. W. O. Ree y V. J. Palmer, "Flow of water in channels protected by vegetative lining", *U.S. Soil Conservation Service, Technical Bulletin Nº 967*, febrero de 1949.
41. "Stillwater Outdoor Hydraulic Laboratory: handbook of channel design for soil and water conservation", *U.S. Soil Conservation Service, SCS-TP-61*, marzo de 1947; revisado en junio de 1954.
42. V. B. Fredenhagen y E. H. Doll, "Grassed waterways", *Agricultural Engineering*, Vol. 35, Nº 6, junio de 1954, pp. 417 419.

CAPÍTULO 8

CONCEPTOS TEÓRICOS DE CAPA LÍMITE, RUGOSIDAD SUPERFICIAL, DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES E INESTABILIDAD DE FLUJO UNIFORME

Este capítulo presenta una selección de conceptos teóricos desarrollados en la mecánica de flujo en canales abiertos. A pesar de que estos conceptos no son analizados en su totalidad, pueden arrojar alguna luz sobre la solución de muchos problemas prácticos.

8-1. La capa límite. Cuando el agua entra a un canal, la distribución de velocidades a través de la sección de canal, debido a la presencia de la rugosidad de contorno, variará con la distancia a lo largo de la cual el agua se mueve en éste (figura 8-1)[1]. Si el flujo es uniforme y estable y si el canal es prismático y con rugosidad constante, la distribución de velocidades eventualmente alcanzará un patrón definido. Para propósitos de simplicidad, en el análisis se supone lo siguiente: 1) el flujo que entra al canal es laminar y con una distribución de velocidades uniforme; 2) no existe ninguna restricción a la entrada que cause una perturbación abrupta en la superficie del agua y en la distribución de velocidades; 3) la profundidad de flujo es indefinidamente grande, de tal manera que puede considerarse constante a medida que el agua entra al canal. En el canal, el efecto sobre la distribución de velocidades debido a la rugosidad de contorno se indica mediante la línea *ABC*. Por fuera de la superficie representada por *ABC*, la distribución de velocidades es prácticamente uniforme. Cerca de la superficie del canal, dentro de la región *ABC*, la velocidad varía de acuerdo con la distancia desde la superficie del canal. La región dentro de *ABC*, a pesar de no ser distinguible, se conoce como *capa límite*[2] y su espesor se designa mediante δ. Como la capa límite no puede distinguirse, su espesor ha sido definido arbitrariamente en varias formas. Una definición común es que el espesor δ es la magnitud de la distancia normal desde la superficie del contorno para la cual la

[1] Para propósitos de simplicidad, se muestra el perfil bidimensional de un canal abierto ancho con la escala vertical exagerada.

[2] Para un estudio completo de este tema, *véanse* [1] a [4].

velocidad v_1 es igual al 99% de la velocidad límite v_0, hacia la cual la curva de distribución de velocidades en la capa límite se aproxima asintóticamente (figura 8-2).

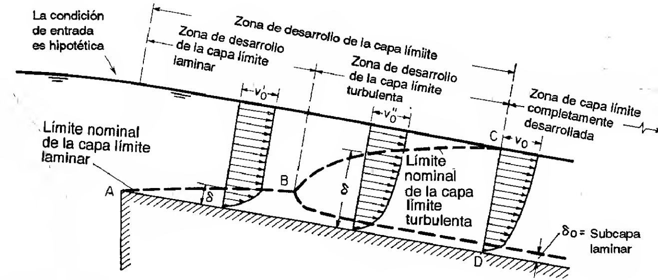


Figura 8-1. Desarrollo de la capa límite en un canal abierto con una condición de entrada ideal.

El efecto de la capa límite sobre el flujo es equivalente a desplazar imaginariamente hacia arriba el fondo del canal, hasta una posición virtual, en una cantidad igual al llamado *espesor de desplazamiento* δ^* (figura 8-2), el cual se define como

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v}{v_1}\right) dy \qquad (8\text{-}1)$$

donde v es la velocidad a una distancia y desde la superficie del canal, y v_1 es la velocidad en el borde de la capa límite. El valor del espesor de desplazamiento por lo general varía desde un octavo hasta un décimo del espesor de la capa límite, de acuerdo con la magnitud del número de Reynolds.

Al comienzo del flujo en el canal (figura 8-1) el flujo es completamente laminar y se desarrolla una capa límite laminar a lo largo de la superficie del canal, como se muestra mediante la curva *AB*. La distribución de velocidades en la capa es casi parabólica. A medida que el agua viaja en sentido aguas abajo en el canal, el flujo en la capa límite eventualmente cambiará a turbulento. El punto donde ocurre este cambio se indica mediante *B*.

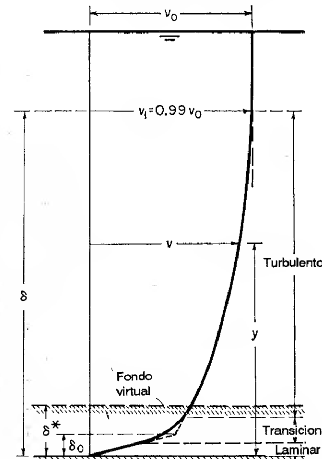


Figura 8-2. Distribución de velocidades sobre una superficie de canal liso (no a escala).

Hacia aguas abajo de *B* se desarrolla una *capa límite turbulenta*, como se muestra mediante *BC*. Puede demostrarse analíticamente que la distribución de velocidades en esta capa es casi logarítmica (sección 8-4).

Si la superficie del canal es relativamente lisa, la velocidad cerca de la superficie del canal es baja; por tanto se desarrolla una lámina muy delgada y estable de flujo conocida como *subcapa laminar*. Dentro de la subcapa laminar el flujo se mantiene laminar[3]. La superficie superior de la subcapa laminar corresponde a la zona de transición de flujo de laminar a turbulento (sección 1-3) y, por consiguiente, no puede definirse con precisión.

Si a través del canal existen condiciones de flujo uniforme, la capa límite turbulenta se desarrollará por completo en la sección *CD*; de ahí en adelante la distribución de velocidades tendrá un patrón definido. En un canal de laboratorio, la capa límite laminar *AB* puede eliminarse con facilidad colocando un elemento de rugosidad a la entrada. Luego, la capa límite turbulenta se desarrollará exactamente al inicio del canal, y la longitud total de la zona para el desarrollo completo de la capa límite puede acortarse. Como el flujo en canales ordinarios a menudo es turbulento, las siguientes secciones se refieren sólo a la capa límite turbulenta.

8-2. Concepto de rugosidad superficial. El concepto de la existencia de una subcapa laminar en la capa límite turbulenta ofrece una explicación pintoresca del comportamiento de la rugosidad superficial. Cuando se amplifica el perfil de la superficie de un canal (figura 8-3), puede verse que la superficie se compone de picos y valles irregulares. La altura *efectiva* de las irregularidades que forman los elementos de la rugosidad se conoce como *altura de rugosidad*[4] *k*. La relación *k/R* de la altura de rugosidad con respecto al radio hidráulico se conoce como *rugosidad relativa*.

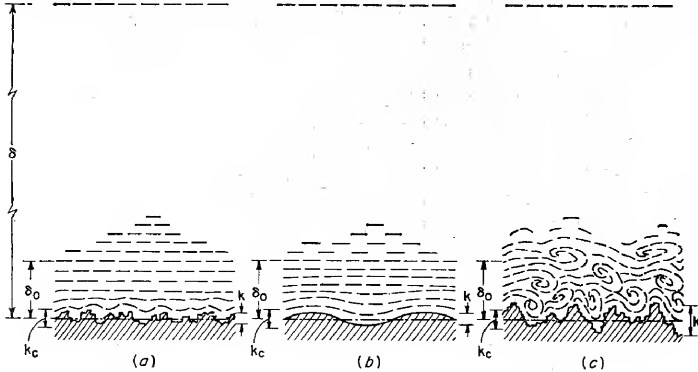


Figura 8-3. Naturaleza de la rugosidad superficial. (*a*) lisa; (*b*) ondulada; (*c*) rugosa.

[3] Un concepto refinado de la subcapa laminar considera que existe en la subcapa una pequeña cantidad de remolinos que decrecen rápidamente hasta cero en la superficie del contorno.

[4] Nótese que la altura de la rugosidad es sólo una medida de la dimensión lineal de los elementos de rugosidad, pero no es necesariamente igual a la altura real o inclusive a la promedio. Por ejemplo, dos elementos de rugosidad pueden tener diferentes dimensiones lineales pero, debido a la diferencia en forma y orientación, pueden producir efectos de rugosidad idénticos y, por consiguiente, sus rugosidades serían designadas por la misma altura de rugosidad.

Si la altura de la rugosidad es menor que una fracción determinada del espesor de la subcapa laminar, las irregularidades superficiales serán tan pequeñas que todos los elementos de rugosidad estarán sumergidos por completo en la subcapa laminar (figura 8-3*a*)[5]. Bajo esta condición la rugosidad no tiene efecto sobre el flujo por fuera de la subcapa laminar, y se dice que la superficie es *hidráulicamente lisa*. Se dice que una superficie hidráulicamente lisa es *ondulosa* si el perfil superficial promedio sigue una curva (figura 8-3*b*).

En relación con el flujo en tuberías o sobre placas planas con ángulo de incidencia cero, Schlichting (*véase* p. 454 de [1]) da la siguiente condición para que una superficie sea hidráulicamente lisa:

$$\frac{V_f k}{\nu} < 5 \quad \text{o} \quad k < \frac{5\nu}{V_f} \tag{8-2}$$

donde $V_f = \sqrt{gRS}$, un término conocido como *velocidad de fricción* (sección 8-4).

A partir de la ecuación de Chézy y de la condición anterior, puede demostrarse que, para que una superficie sea hidráulicamente lisa, la altura de rugosidad debe ser menor que una *rugosidad crítica*, expresada por

$$k_c = \frac{5C}{\sqrt{g}} \frac{\nu}{V} \tag{8-3}$$

donde C es el C de Chézy, ν es la viscosidad cinemática y V es la velocidad media. La condición anterior está dada para rugosidades obtenidas con arenas con valores de C probablemente mayores que 100. Para la condición promedio, Schlichting da $k_c = 100\nu/V$, lo cual corresponde a $C = 113.5$. Como una aproximación, la ecuación (8-3) puede aplicarse a canales.

Si la altura de la rugosidad es mayor que el valor crítico definido por la ecuación (8-3) (figura 8-3*c*), los elementos de rugosidad tendrán una magnitud y una angularidad suficientes para extender sus efectos por fuera de la subcapa laminar y por consiguiente perturbar el flujo en el canal. Se dice que la superficie es, por tanto, *rugosa*. En canales rugosos, la distribución de velocidades dependerá de la forma y el tamaño de las proyecciones de la rugosidad, y no podrá formarse una subcapa laminar estable.

La altura de rugosidad promedio para una superficie dada puede determinarse experimentalmente. La tabla 8-1 presenta valores de *k* para diferentes clases de material, promediados de muchos datos experimentales.

El concepto de rugosidad en conductos fue desarrollado además por Morris [5]. Morris supuso que la pérdida de energía en un flujo turbulento sobre una superficie rugosa se debe sobre todo a la formación de estelas por detrás de cada elemento de rugosidad. La intensidad de tales fuentes de vorticidad en la dirección del flujo determinan, en gran medida, el carácter de la turbulencia y los fenómenos de disipación de energía en el flujo. Por consiguiente, el espaciamiento longitudinal λ de los elementos de rugosidad es la dimensión de rugosidad de mayor importancia

[5] La posición desde la cual debe medirse la altura de rugosidad es un asunto discutible. Aquí se supone que *k* es medido desde un plano horizontal de referencia, que se localiza a una distancia de 0.5*k* por debajo del fondo promedio del canal.

del flujo en conductos rugosos. Bajo este concepto, el flujo sobre superficies rugosas puede clasificarse en tres tipos básicos (figura 8-4): *flujo con rugosidad aislada, flujo con interferencia de remolinos* y *flujo cuasi liso* (o *flujo suavizado*).

Tabla 8-1. Valores aproximados de la altura de rugosidad k

Material	*k, pies*
Latón, cobre, plomo, vidrio	0.0001-0.0030
Hierro forjado, acero	0.0002-0.0080
Hierro fundido asfaltado	0.0004-0.0070
Hierro galvanizado	0.0005-0.0150
Hierro fundido	0.0008-0.0180
Listones de madera	0.0006-0.0030
Cemento	0.0013-0.0040
Concreto	0.0015-0.0100
Arcilla para tejas de drenaje	0.0020-0.0100
Acero remachado	0.0030-0.0300
Lecho de río natural	0.1000-3.0000

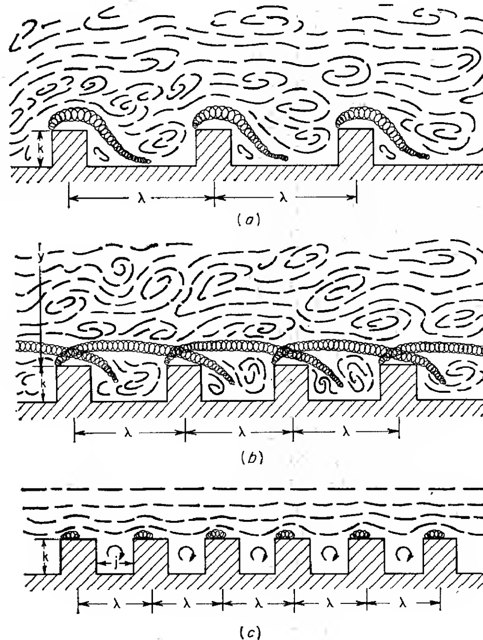


Figura 8-4. Esquemas que muestran el concepto de los tres tipos de flujo sobre superficie rugosa: *a*) Flujo con rugosidad aislada; (*b*) flujo con interferencia de remolinos; (*c*) flujo cuasi liso.

El *flujo con rugosidad aislada* prevalece cuando los elementos de rugosidad están muy apartados uno del otro de tal modo que la estela y la vorticidad de cada elemento está completamente desarrollada y disipada antes de que se alcance el siguiente elemento. La rugosidad aparente, por consiguiente, resultará de la fuerza de arrastre de los elementos de rugosidad, representada principalmente por la altura de la proyección k del elemento, en adición al arrastre por fricción sobre la superficie de la pared entre los elementos, la cual depende del espaciamiento de éstos. En este tipo de flujo, la relación k/λ puede tomarse como un parámetro de correlación significativo que influye el factor de fricción aparente en el flujo.

El *flujo con interferencia de remolinos* resulta cuando los elementos de rugosidad están colocados tan cerca unos de otros que las estelas y la vorticidad de cada elemento interfieren con aquellos desarrollados en el siguiente elemento, dando como resultado una vorticidad intensa y compleja y una mezcla turbulenta. En tal flujo, la altura del elemento es poco importante, pero el espaciamiento es obviamente de gran importancia. La profundidad promedio y del flujo por encima de las crestas de los elementos también controlará en parte la extensión vertical de la región superficial de turbulencia anormal[6]. En tal flujo, por consiguiente, la relación y/λ será un parámetro de correlación importante.

El *flujo cuasi liso* ocurre cuando los elementos de rugosidad están tan cerca uno de otro que el flujo esencialmente se desliza por encima de la cresta de los elementos. Las ranuras entre los elementos se llenarán con agua muerta, la cual contiene remolinos estables, creando una seudopared. Proyecciones grandes de la rugosidad no existen en esta seudopared y la superficie actúa como hidráulicamente lisa. En tal flujo, la relación k/λ (o j/λ, donde j es el ancho de ranura) de nuevo será un parámetro significativo. El flujo cuasi liso tiene un factor de fricción más grande que el flujo sobre una superficie realmente lisa, debido a que los remolinos en las ranuras consumen cierta cantidad de energía.

El concepto anterior parece sustentarse de manera adecuada por los datos experimentales de muchas fuentes diferentes. El concepto también puede extenderse a superficies con rugosidad variable utilizando valores promedio de las dimensiones de la rugosidad que varía o combinando los factores de fricción para cada tipo de flujo con el fin de obtener un factor de fricción global aparente para el flujo.

8-3. Cálculo de la capa límite. Bauer [6] ha propuesto un método aproximado pero práctico para el cálculo del desarrollo de la capa límite turbulenta en canales anchos. Este método en principio fue desarrollado para flujo en canales con pendientes altas, aunque es aplicable a canales de pendientes bajas, siempre y cuando el flujo sea uniforme o se esté acelerando, y si se está acelerando, que esto no ocurra con tanta rapidez como para causar separaciones de la capa límite.

El estudio del desarrollo de la capa límite, de Bauer, fue hecho en vertederos de rebose en concreto (figura 8-5). En este caso la transición de la capa límite laminar a la capa límite turbulenta a menudo ocurre lo suficientemente aguas arriba de la zona bajo consideración; por consiguiente, la capa límite laminar puede no consi-

[6] Morris utilizó el radio de la tubería en lugar de la profundidad para definir el parámetro, debido a que él estaba interesado primordialmente en tuberías en lugar de canales.

derarse, porque es una parte insignificante del problema. A partir de los resultados de la investigación de Bauer, puede escribirse la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.024}{(x/k)^{0.13}} \tag{8-4}$$

donde δ es el espesor de la capa límite turbulenta a una distancia x desde 0 en la dirección del flujo (figura 8-5), y donde k es la altura de la rugosidad. Bauer demostró la aplicación de este método mediante el siguiente ejemplo. Nótese que el flujo sobre la superficie de un vertedero, como el descrito en este ejemplo, es variado y se utiliza un método simplificado para el cálculo de la superficie del flujo variado. En el caso del desarrollo de la capa límite en un flujo uniforme, la aplicación del método de Bauer es exactamente la misma, excepto que la superficie del agua no requiere cálculos, debido a que es paralela al fondo del canal.

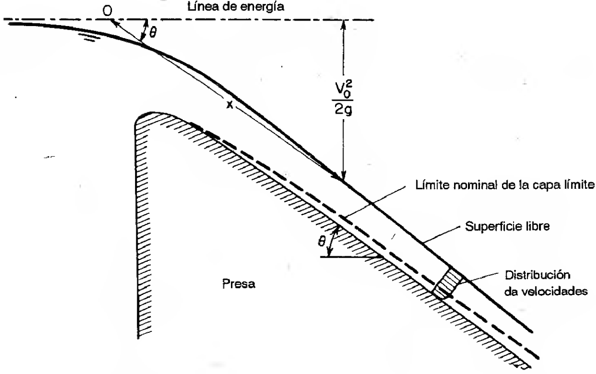


Figura 8-5. Crecimiento de la capa límite sobre la superficie de un vertedero de rebose.

Ejemplo 8-1. Un vertedero de rebose en concreto de longitud indefinida tiene un ángulo de la pendiente superficial de $\theta = 53°8'$ (figura 8-5) y una rugosidad de tal manera que $k = 0.005$ pies. Cuando el caudal es 360 pies³/s por pie de ancho del vertedero, calcule la longitud de desarrollo de la capa límite, el perfil de la capa límite y la superficie del agua.

Solución. El cálculo se muestra en la tabla 8-2; los encabezamientos se explican de la siguiente manera:

Columna 1. Longitud asignada arbitrariamente de x en pies, medida desde el punto 0
Columna 2. Valores de x/k, donde $k = 0.005$ pies
Columna 3. Valores de δ/x, calculados mediante la ecuación (8-4)
Columna 4. Valores de δ en pies, obtenidos al multiplicar x por δ/x
Columna 5. Altura de velocidad $v_0^2/2g$ en pies, igual a x sen $\theta = 0.80x$
Columna 6. Velocidad en pies/s correspondiente a la cabeza de velocidad en la columna anterior
Columna 7. Espesor potencial de flujo en pies, igual al caudal de 360 pies³/s/pie dividido por la velocidad v_0.

Columna 8. Espesor real del flujo en pies, igual al espesor potencial más el espesor de desplazamiento, el cual se supone igual al 10% del espesor δ de la capa límite.

Tabla 8-2. Cálculo de la capa límite
$k = 0.005$ pies $\theta = 53°8'$ $q = 360$ pies³/seg/pie

x (1)	x/k (2)	δ/x (3)	δ (4)	$v_0^2/2g$ (5)	v_0 (6)	q/v_0 (7)	y (8)
50	1×10^4	0.0073	0.36	40	50.8	7.09	7.13
100	2×10^4	0.0066	0.66	80	71.8	5.00	5.07
200	4×10^4	0.0060	1.20	160	101.5	3.53	3.65
400	8×10^4	0.0055	2.20	320	143.5	2.50	2.72
600	1.2×10^5	0.0052	3.12	480	175.8	2.04	2.35

La superficie del agua y la capa límite calculadas se grafican en un papel logarítmico (figura 8-6). El punto de intersección de los dos perfiles indica la localización de la sección en la cual la capa límite alcanza su valor máximo o donde se encuentra desarrollada por completo. La longitud de desarrollo, tal como se muestra, es aproximadamente 460 pies.

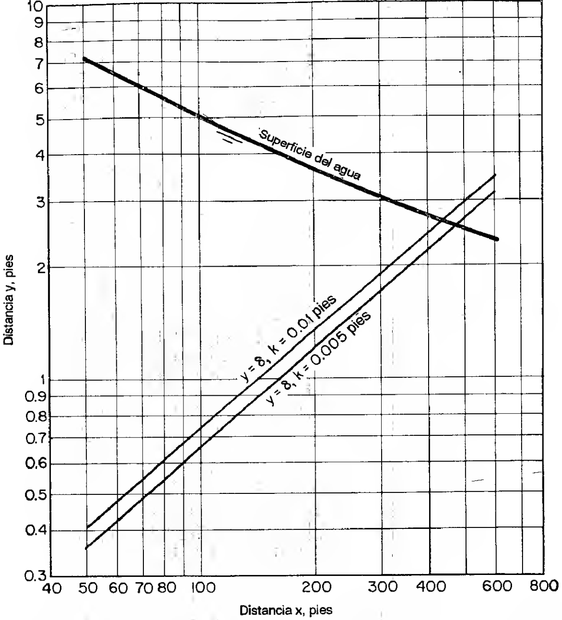


Figura 8-6. Solución del ejemplo 8-1 para el crecimiento de una capa límite.

Nótese que el método simplificado para el cálculo del perfil de la superficie del agua de un flujo variado se justifica en este problema debido a que el flujo es relativamente delgado y la pendiente es muy empinada. Como las pérdidas por fricción en este caso son muy pequeñas, la energía potencial del agua es prácticamente convertida por completo en energía cinética expresada mediante la altura de velocidad. Para el cálculo de perfiles superficiales en flujo variado en general, en la parte III se describirán varios métodos.

Con el fin de ilustrar el efecto del cambio en la rugosidad sobre el crecimiento de la capa límite, los cálculos se repiten utilizando los mismos datos pero con una rugosidad dos veces mayor. La línea marcada con "$y = \delta$, $k = 0.01$ pies" (figura 8-6) corresponde al resultado de este cálculo. El cambio en la superficie del agua es prácticamente insignificante. Nótese que la diferencia entre los valores de la longitud de desarrollo para los dos casos es de alrededor de 30 pies, o una variación de menos del 10%. Esto demuestra que un incremento en la rugosidad tiene la tendencia de acelerar el crecimiento de la capa límite o de reducir la longitud de desarrollo.

8-4. Distribución de velocidades en flujo turbulento. La distribución de velocidades en un flujo uniforme en canales se vuelve estable cuando la capa límite turbulenta se encuentra completamente desarrollada. En la capa límite turbulenta puede demostrarse que la distribución es casi logarítmica.

El esfuerzo cortante en cualquier punto de un flujo turbulento que se mueve sobre una superficie sólida fue dado por Prandtl [7] como

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{8-5}$$

donde ρ = densidad de masa = w/g, w es el peso unitario del fluido, y g es la aceleración de la gravedad

l = una longitud característica, conocida como *longitud de mezcla*

dv/dy = gradiente de velocidad a una distancia normal y desde la superficie sólida.

Para la región cercana a la superficie sólida, Prandtl introdujo dos suposiciones: 1) que la longitud de mezcla es proporcional a y, y 2) que el esfuerzo cortante es constante. Como el esfuerzo cortante en la superficie del canal es igual a la fuerza tractiva unitaria (sección 7-11), la segunda suposición da $\tau = \tau_0$. A partir de estas dos suposiciones, la ecuación (8-5) puede escribirse como

$$dv = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{dy}{y} \tag{8-6}$$

donde κ es una constante para la proporcionalidad entre l y y. El valor de κ ha sido determinado en muchos experimentos [8] y es alrededor de 0.40. Al integrar la ecuación (8-6),

$$v = 2.5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{y}{y_0} \tag{8-7}$$

donde y_0 es una constante de integración.

A partir de la ecuación (7-5) y $w = \rho g$, puede verse que

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRS} = V_f \tag{8-8}$$

La cantidad representada por V_f tiene dimensiones de una velocidad. Debido a que ésta varía con la fricción en el contorno τ_0, se conoce como *velocidad de fricción* o *velocidad de corte.* Luego, la ecuación (8-7) puede escribirse como

$$v = 2.5V_f \ln\frac{y}{y_0} \tag{8-9}$$

Esta última ecuación indica que la velocidad en la región turbulenta es una función logarítmica de la distancia y. Por lo general se conoce como *ley universal de distribución de velocidades, de Prandtl-von Kármán*[7].

Esta ley ha sido verificada mediante varios experimentos [10]. Los resultados indican una similaridad notable entre las distribuciones observadas y calculadas y, por consiguiente, ofrece una justificación razonable para el uso de esta ley logarítmica en problemas prácticos.

Cuando la superficie es lisa, se ha encontrado que la constante y_0 en la ecuación (8-9) depende únicamente de la velocidad de fricción y de la viscosidad cinemática; es decir,

$$y_0 = \frac{m\nu}{V_f} \tag{8-10}$$

donde m es una constante igual a alrededor de 1/9 para superficies lisas[8]. Para superficies ondulosas, el valor de m dependerá de la forma de los perfiles de las ondulaciones. Al sustituir la ecuación (8-10) para y_0 en la ecuación (8-9), y al simplificar

$$v = 5.75V_f \log\frac{9yV_f}{\nu} \quad \text{para superficies lisas} \tag{8-11}$$

Esta ecuación da la distribución de velocidades en flujo turbulento sobre superficies lisas.

Cuando la superficie es rugosa, se encuentra que la constante y_0 depende de la altura de la rugosidad; es decir,

$$y_0 = mk \tag{8-12}$$

donde la constante[9] m es igual a aproximadamente 1/30. Al sustituir la ecuación (8-12) para y_0 en la ecuación (8-9), y al simplificar,

$$v = 5.75V_f \log\frac{30y}{k} \quad \text{para superficies rugosas} \tag{8-13}$$

Esta ecuación da la distribución de velocidades en flujos turbulentos sobre superficies rugosas. Nótese que la altura de la rugosidad k en esta ecuación corresponde al

[7] Von Kármán [9] también demostró esta ley utilizando una hipótesis de similaridad que supone una distribución lineal del esfuerzo cortante, siendo la longitud de mezcla proporcional a $(dv/dy)/(d^2v/dy^2)$.

[8] Este valor se deduce de los datos experimentales de Nikuradse sobre tubos lisos [11].

[9] Este valor se deduce de los datos experimentales de Nikuradse sobre tubos rugosos [12]. En los experimentos de Nikuradse los granos de arena son pegados a las paredes internas de la tubería para simular la rugosidad. Tal rugosidad se conoce como *rugosidad artificial*.

diámetro medio de los granos de arena utilizados por Nikuradse. Luego, se conoce específicamente como *rugosidad de arena de Nikuradse.*

Nótese que las constantes utilizadas en las anteriores ecuaciones de distribución de velocidades para superficies lisas y rugosas fueron deducidas a partir de datos de tuberías. Sin embargo, se supone que es permisible aplicar la ley universal de distribución de velocidades a otros casos de flujo turbulento, utilizando las constantes determinadas en pruebas en tuberías circulares.

8-5. Ecuaciones teóricas para flujo uniforme. A partir de la ley universal de distribución de velocidades, de Prandtl-von Kármán, Keulegan [13][10] dedujo ecuaciones para la velocidad media de flujo turbulento en canales abiertos. En consideración a la claridad y simplicidad, la deducción de Keulegan será modificada más adelante.

Mediante la ecuación de continuidad, el caudal total a través de una sección de canal común (figura 8-7) puede escribirse como

$$Q = VA = \int_{\delta_0=0}^{y=h} v\,dA = \int_0^h vB\,dy \tag{8-14}$$

donde h es la profundidad del agua, A es el área mojada, B es la longitud de la curva de igual velocidad y y es la profundidad vertical medida desde el contorno hasta la curva de igual velocidad. Como la subcapa laminar es relativamente muy delgada, δ_0 puede suponerse igual a cero. Además se supone que la velocidad máxima se encuentra en la superficie libre y que la longitud B es proporcional a su distancia vertical y desde el contorno; es decir,

$$B = P - \gamma y \tag{8-15}$$

donde P es el perímetro mojado y γ es una función que depende de la forma de la sección. Luego, el área mojada es igual a

$$A = \int_0^h B\,dy = Ph - \frac{\gamma}{2}h^2 \tag{8-16}$$

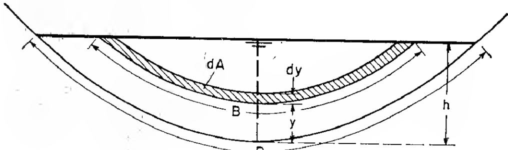


Figura 8-7. Sección de canal para ilustrar la notación.

Al sustituir en la ecuación (8-14) el valor de v tomado de la ecuación (8-9), el valor de B de la ecuación (8-15) y el valor de A de la ecuación (8-16), y luego al integrar y simplificar, se obtiene la siguiente ecuación:

[10] Otras referencias sobre este tema son [14] a [21].

$$V = 2.5V_f \ln\left[\frac{R}{y_0}\frac{h}{R}\exp\left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A}\right)\right]$$

o

$$V = V_f\left\{5.75\log\left[\frac{h}{mR}\exp\left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A}\right)\right] + 5.75\log\frac{mR}{y_0}\right\} \tag{8-17}$$

En la ecuación anterior la cantidad representada por el primer término del lado derecho es una función de la forma de la sección de canal. Sin embargo, la variación de esta cantidad con diferentes formas de la sección es relativamente pequeña. Para propósitos de simplificación, la cantidad puede representarse por una constante total[11] A_0. Esta constante incluirá no sólo la función de forma, sino también otros factores de incertidumbre, como los efectos de la superficie libre y el efecto de la distribución no uniforme de la fuerza tractiva en el contorno. Por consiguiente, la ecuación (8-17) puede escribirse como

$$V = V_f\left(A_0 + 5.75\log\frac{mR}{y_0}\right) \tag{8-18}$$

Ésta es la ecuación teórica general para la velocidad media del flujo uniforme en canales abiertos.

Para canales lisos, y_0 puede representarse mediante la ecuación (8-10). También, a partir del estudio de Keulegan de los datos de Nikuradse [11], se encuentra que A_0 es 3.25. Por consiguiente, la ecuación teórica de flujo uniforme es

$$V = V_f\left(3.25 + 5.75\log\frac{RV_f}{\nu}\right) \quad \text{para canales lisos} \tag{8-19}$$

A partir de los datos de Bazin [22] para superficies ondulosas, Keulegan obtuvo un valor de $A_0 = 1.3$ para canales pequeños en madera y -3.0 para canales grandes en madera.

Para canales rugosos, y_0 puede expresarse mediante la ecuación (8-12). A partir del estudio de Keulegan de los datos de Bazin [22] se encontró que el valor de A_0 tiene un amplio rango, que varía desde 3.23 hasta 16.92. Luego, puede utilizarse un valor medio de 6.25 para A_0. Por consiguiente, la ecuación teórica de flujo uniforme es

$$V = V_f\left(6.25 + 5.75\log\frac{R}{k}\right) \quad \text{para canales rugosos} \tag{8-20}$$

A partir de la ecuación de Chézy, $V = C\sqrt{RS}$ y al utilizar la definición de velocidad de fricción $V_f = \sqrt{gRS}$, puede demostrarse que

$$\frac{V}{V_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \tag{8-21}$$

Al sustituir esta ecuación y el número de Reynolds $\mathbf{R} = RV/_{\nu}$ en las ecuaciones (8-19) y (8-20), se tienen las siguientes expresiones para el C de Chézy:

[11] Es completamente posible simplificar la deducción suponiendo esta constante desde el inicio. Sin embargo, el procedimiento dado aquí tiene el objetivo de dar una demostración lógica con base en los principios involucrados.

$$C = 32.6 \log \frac{20.8R}{C} \qquad \text{para canales lisos} \qquad (8\text{-}22)$$

$$C = 32.6 \log \frac{12.2R}{k} \qquad \text{para canales rugosos} \qquad (8\text{-}23)$$

Después del estudio analítico de Keulegan de las leyes de flujo turbulento en canales, Powell [16-18] experimentó pequeños escalones rectangulares utilizados como rugosidad artificial y llegó a la ecuación (5-5) para el C de Chézy. De igual manera, Robinson y Albertson [19] utilizaron placas deflectoras como rugosidad artificial y desarrollaron otra ecuación empírica para C en canales rugosos. Moore, Rand y Hama [3] también llevaron a cabo estudios similares, utilizando barras transversales como rugosidad de varios tamaños.

Un estudio adicional fue hecho por Iwagaki [21] utilizando datos experimentales obtenidos de diferentes fuentes. Los resultados del estudio han establecido que la resistencia al flujo turbulento en canales abiertos se vuelve mayor que la correspondiente en tuberías con aumento en el número de Froude. Iwagaki razonó que esto se debe al incremento en la inestabilidad de la superficie libre para números de Froude altos. Utilizando los datos presentados por Iwagaki, por consiguiente, es posible introducir el efecto de la inestabilidad en la superficie libre en las ecuaciones de Keulegan suponiendo que las constantes de las ecuaciones son funciones del número de Froude. Sean las ecuaciones (8-19) y (8-20) como siguen:

$$V = V_f\left(A_s + 5.75 \log \frac{RV_f}{\nu}\right) \qquad \text{para canales lisos} \qquad (8\text{-}24)$$

$$V = V_f\left(A_r + 5.75 \log \frac{R}{k}\right) \qquad \text{para canales rugosos} \qquad (8\text{-}25)$$

En las anteriores ecuaciones A_s y A_r son funciones del número de Froude. Estas constantes también pueden incluir los efectos de otros factores menos importantes. Los datos graficados están muy dispersos (tal como se muestra en la figura 8-8 mediante las fronteras sombreadas) probablemente debido a estos efectos. Cuando la pendiente del canal se vuelve muy alta, el flujo se vuelve inestable (sección 8-8). En tales casos, las leyes de flujo turbulento descritas en esta sección no siguen siendo válidas.

8-6. Interpretación teórica del coeficiente de rugosidad de Manning. Es bastante interesante estudiar el n de Manning relacionándolo con la rugosidad teórica del canal para canales rugosos, como se hizo en la sección anterior. Al eliminar C de las ecuaciones (5-7) y (8-23), el n de Manning puede expresarse como sigue:

$$n = \phi\left(\frac{R}{k}\right) k^{1/6} \qquad (8\text{-}26)$$

donde

$$\phi\left(\frac{R}{k}\right) = \frac{(R/k)^{1/6}}{21.9 \log (12.2R/k)} \qquad (8\text{-}27)$$

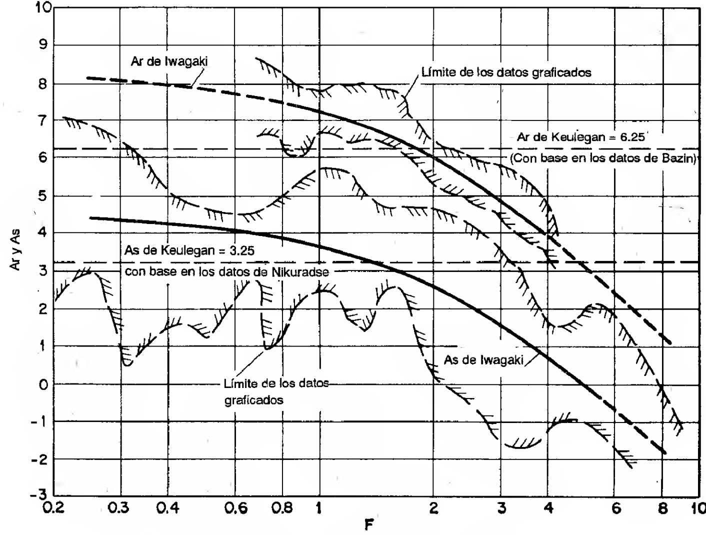


Figura 8-8. Relaciones entre A_r, A_s y F.

La gráfica de esta ecuación (figura 8-9) indica que para un amplio rango de R/k la variación en $\phi\,(R/k)$ es pequeña. Como una aproximación, $\phi\,(R/k)$ puede suponerse constante e igual a un valor promedio. Con base en observaciones reales hechas en Suiza, Strickler [23] llegó a una ecuación que al compararse con la ecuación (8-26) da un valor promedio[12] de $\phi\,(R/k) = 0.0342$. La altura de rugosidad utilizada por Strickler es la del tamaño del tamiz mediano del material. Datos [24] recolectados de algunas corrientes en el noroeste de los Estados Unidos y el río Mississippi también se muestran en la figura 8-9 para propósitos de comparación.

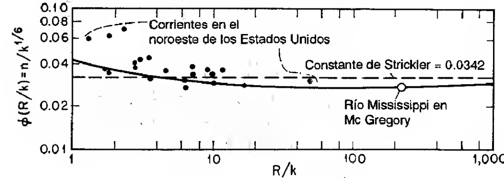


Figura 8-9. Función $\phi\,(R/k)$

Si se supone que $\phi\,(R/k)$ es constante, la ecuación (8-26) llevará a la conclusión interesante de que el n de Manning varía con la potencia 1/6 de la altura de la

[12] Esta constante ha sido convertida a unidades pie-lb-s. El valor de k se expresa en pies.

rugosidad. En otras palabras, un cambio del orden de mil en la medida lineal de la altura de rugosidad dará como resultado un cambio del orden de tres en n. Luego, la altura de rugosidad como una medida de la rugosidad del canal es más sensible que el n de Manning. En consecuencia, el efecto de los errores involucrados en la estimación de la altura de rugosidad para la determinación del n de Manning mediante la ecuación (8-26) es comparativamente pequeño.

Bakhmeteff y Feodoroff [25] han hecho una comparación de la ecuación de Manning con la ecuación Prandtl-von Kármán [en una forma correspondiente a la ecuación (8-26)], la ecuación de G. K. y la ecuación de Bazin. Sus resultados indican que la ecuación de Manning en la forma de la ecuación (5-7) es la que mejor se ajusta a todas las ecuaciones bajo consideración.

8-7. Métodos para determinar el coeficiente de rugosidad de Manning. Con base en la distribución teórica de velocidades en canales rugosos, se han desarrollado dos aproximaciones para determinar el n de Manning.

A. Método de medición de la velocidad. Con referencia a la ley logarítmica de distribución de velocidades expresada en la ecuación (8-13), puede verse que la distribución de velocidades depende de la altura de la rugosidad, la cual puede relacionarse con el n de Manning mediante la ecuación (8-26). En otras palabras, la rugosidad en términos del n de Manning puede tomarse como un factor dominante que afecta la distribución de velocidades. Si se conoce la distribución, el valor del n de Manning puede determinarse. Este concepto ha sido utilizado por Boyer [24] y otros [25-28] para la estimación del valor de n a partir de la distribución vertical de velocidades en una corriente.

Sea $v_{0.2}$ la velocidad a 2/10 de la profundidad, es decir, a una distancia $0.8y$ desde el fondo de un canal rugoso ancho, donde y es la profundidad de flujo. Mediante la ecuación (8-13), la velocidad puede expresarse como

$$v_{0.2} = 5.75 V_f \log \frac{24y}{k}$$

De igual modo, sea $v_{0.8}$ la velocidad a 8/10 de la profundidad; entonces

$$v_{0.8} = 5.75 V_f \log \frac{6y}{k}$$

Al eliminar V_f en las dos ecuaciones anteriores,

$$\log \frac{y}{k} = \frac{0.778x - 1.381}{1 - x} \qquad (8\text{-}28)$$

donde $x = v_{0.2}/v_{0.8}$. Al sustituir la ecuación (8-28) en la ecuación (8-20), con $R = y$ y al simplificar,

$$\frac{V}{V_f} = \frac{1.78(x + 0.95)}{x - 1} \qquad (8\text{-}29)$$

A partir de las ecuaciones (5-7) y (8-21), con $R = y$,

$$\frac{V}{V_f} = \frac{y^{1/6}}{3.81n} \qquad (8\text{-}30)$$

Al igualar las partes derechas de las ecuaciones (8-29) y (8-30) y al resolver para n,

$$n = \frac{(x - 1)y^{1/6}}{6.78(x + 0.95)} \qquad (8\text{-}31)$$

Esta ecuación da el valor del n para un canal rugoso ancho con la ley de distribución logarítmica de velocidades. Cuando esta ecuación se aplica a corrientes reales, el valor de y puede tomarse como la profundidad media. Se ha preparado una gráfica de esta ecuación ($n/y^{1/6}$ *versus* x) para compararla con una curva similar desarrollada por Boyer [24] y también con observaciones reales tomadas en varias corrientes en el noroeste de los Estados Unidos y en el río Mississippi. La comparación lleva a la creencia de que existe una relación general entre el n de Manning y la distribución de velocidades. Sin embargo, se necesitan más datos para verificar esta teoría de manera más convincente y para delinear la relación de tal modo que pueda utilizarse en extenso para propósitos prácticos.

La medición simple del flujo en una corriente a menudo se hace midiendo la velocidad en varias verticales a profundidades de 0.2 y 0.8 (sección 2-6). Estas mediciones, que se promedian para obtener la velocidad media en la vertical, pueden utilizarse para estimar el n de Manning en la ecuación (8-31). Si se demuestra que este método es satisfactorio para aplicaciones prácticas, dará una manera fácil para determinar la rugosidad en corrientes donde se han hecho observaciones de velocidad.

B. Método de medición de la rugosidad. En este método se supone que la ecuación (8-27) para la función $\phi(R/k)$ es aceptable. Luego, el valor del n de Manning puede calcularse mediante la ecuación (8-26) cuando se conoce la altura de la rugosidad.

Este método puede extenderse a corrientes que contienen lechos con sedimentos en movimiento. De acuerdo con Einstein y Barbarossa [29], el radio hidráulico R para tales corrientes consta de dos partes: el radio hidráulico R' debido a la rugosidad superficial, y el radio hidráulico $R - R'$ debido a la rugosidad causada por el lecho de sedimentos en movimiento. Para la rugosidad superficial, la altura de la rugosidad se representa por k_{65} en pies, que es el tamaño del grano para el cual el 65% del material es más grueso, tal como se obtiene de una curva promedio de análisis mecánico. Esta curva se prepara a partir de muestras del material tomadas en el perímetro mojado dentro del tramo escogido de la corriente. La altura de la rugosidad para los sedimentos en movimiento se representan por el tamaño k_{35} en pies, que es el tamaño para el cual el 35% es más grueso. Este tamaño se toma de una curva de análisis mecánico obtenida de muestras de sedimentos recolectadas dentro del tramo de la corriente. Siguiendo este concepto, Doland y Chow [30] demostraron que la función de $\phi(R/k)$ para los efectos combinados de rugosidad superficial y movimiento de sedimentos es

$$\phi\left(\frac{R}{k}\right) = \frac{0.0342}{(R'/R)^{3/2}} \qquad (8\text{-}32)$$

donde el valor de R'/R depende del radio hidráulico R, de la pendiente S y de los tamaños de grano k_{65} y k_{35}. Al calcular los valores de $(R/k_{65})^{1/3}$ y k_{35}/RS, puede obtenerse el valor de R'/R a partir de las curvas semiempíricas mostradas en la figura

8-10. Estas curvas se basan en datos tomados de siete ríos comunes en los Estado Unidos[13]. Cuando $\phi\,(R/k)$ se calcula mediante la ecuación (8-32), puede determi narse el valor de n mediante la ecuación (8-26) con $k = k_{65}$. Cuando existe muy poc movimiento de sedimentos en la corriente, o $R - R' = 0$, puede verse que la ecuació (8-32) se reduce a la constante de Strickler (sección 8-6).

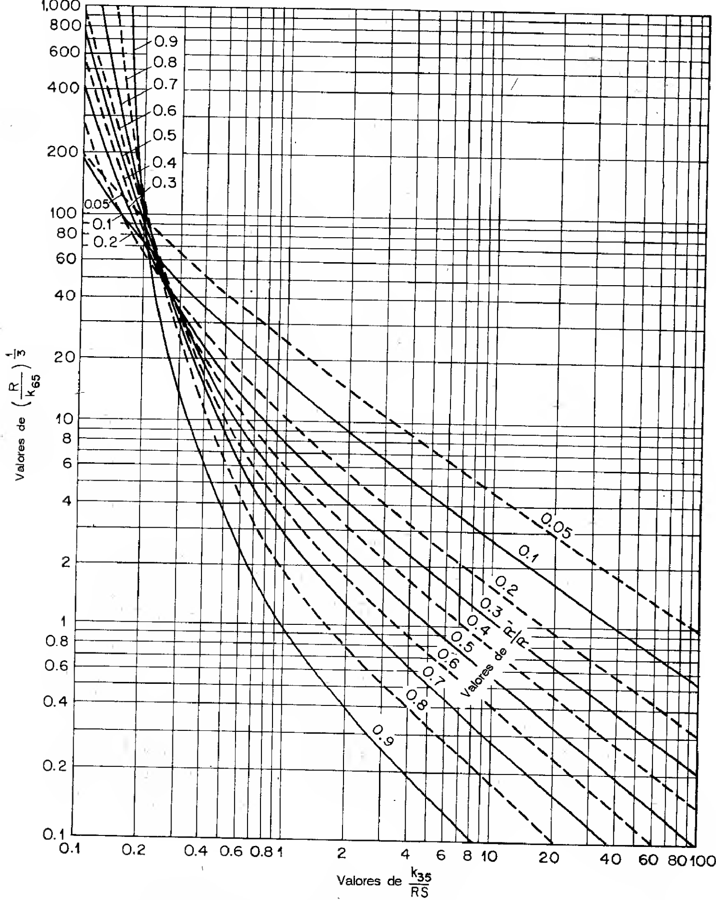


Figura 8-10. Relación entre $(R/k_{65})^{1/3}$ y $k35/RS$

[13] El río Missouri en Pierre y Ft. Randall, S. D., y Omaha, Nebraska; el río Elkhorn en Waterloo, Nebraska; el río Big Sioux en Akron, Iowa; el río Niobrara en Butte, Nebraska; el río Platte en Ashland, Nebraska; el río Salinas en San Lucas y Paso Robles, California; y el río Nacimiento en Junction, California.

El método antes descrito no considera otras clases de rugosidades diferentes de la rugosidad superficial y la rugosidad debida a lechos de sedimentos en movimiento. Por consiguiente, sólo es aplicable a problemas en los cuales la fricción por matorrales de la banca es insignificante y en las cuales el canal activo, aun dividido por barras de arena y posiblemente por islas, se encuentra libre de basuras y vegetación.

8-8. Inestabilidad del flujo uniforme. El flujo uniforme se vuelve inestable cuando la velocidad de flujo es muy alta o la pendiente del canal es muy empinada. Cuando esto ocurre, la inestabilidad de la superficie libre se caracteriza por la formación de una serie de ondas de remolino. Este fenómeno fue reportado por primera vez por Cornish [31] en 1910 cuando lo observó en canales abiertos en los Alpes. La onda de remolino es un fenómeno de flujo no permanente y su naturaleza se describirá en la sección 19-9.

Se han hecho muchos intentos [32-45] para desarrollar un criterio de inestabilidad de flujo uniforme. En 1945 Vedernikov [35] empleó ciertas aproximaciones de Saint-Venant y desarrolló un criterio que se conoce como *número de Vedernikov* **V**. Después, Craya [41] e Iwasa [43] estudiaron el inicio del crecimiento o decaimiento temporal continuo de una onda de perturbación infinitesimal en la superficie de un fluido y desarrollaron criterios similares.

El número de Vedernikov puede expresarse como

$$\mathbf{V} = \frac{x\gamma V}{V_w - V} \tag{8-33}$$

donde x = exponente del radio hidráulico en la ecuación general de flujo uniforme, ecuación (5-1). Luego, $x = 2$ para flujo laminar (sección 6-10), $x = 0.5$ para flujo turbulento si se utiliza la ecuación de Chézy, y $x = 2/3$ para flujo turbulento si se utiliza la ecuación de Manning.

V = velocidad media

V_w = velocidad absoluta de las ondas de perturbación en el canal

γ = un factor de forma de la sección de canal, definido por

$$\gamma = 1 - R\frac{dP}{dA} \tag{8-34}$$

donde R es el radio hidráulico, P es el perímetro mojado y A es el área mojada. Luego $\gamma = 1$ para canales muy anchos y $\gamma = 0$ para canales muy angostos.

Se demostrará que $V_w - V$ es igual a la celeridad c de las ondas (sección 18-6) o a la velocidad crítica V_c. Como el número de Froude es $\mathbf{F} = V/V_c$, la ecuación (8-33) puede reducirse a

$$\mathbf{V} = x\gamma\mathbf{F} \tag{8-35}$$

Cuando el número de Vedernikov **V** es menor que la unidad, cualquier onda en el canal se abatirá y el flujo puede ser estable. Pero cuando **V** es igual a o mayor que la unidad, las ondas se amplificarán de tal manera que el flujo estable se volverá imposible, prevalecerá el flujo no permanente y se formarán ondas de remolino.

Para calcular **V** para un flujo turbulento, nótese que debe utilizarse una ecuación de flujo uniforme apropiada para el flujo en canales de alta pendiente para dar el valor de x. Ante la falta de tal ecuación, se utiliza la ecuación de Manning o la ecuación de Chézy sólo como una aproximación. Como la pendiente del canal por lo general es alta cuando se desarrolla la inestabilidad de flujo, el número de Froude en la ecuación (8-35) debe calcularse mediante la ecuación (3-13), la cual considera el efecto de la pendiente.

PROBLEMAS

8-1. Demuestre que la ecuación (8-1) se deduce de la condición de que la presencia de la capa límite eleva el fondo del canal una distancia virtual igual al espesor de desplazamiento.

8-2. Un canal rectangular de laboratorio de 1.5 pies de ancho conduce un flujo uniforme de 0.34 pies^3/s con una profundidad de 0.15 pies y una pendiente de 0.0009. La altura de la rugosidad de la superficie del canal es 0.0025 pies. Grafique el perfil de la capa límite turbulenta y estime la longitud de canal requerida para un desarrollo completo de la capa límite que empieza a ser turbulenta desde la entrada.

8-3. Determine si el canal descrito en el problema anterior es hidráulicamente liso o rugoso.

8-4. Un canal trapezoidal (figura 2-2) con $b = 20$ pies, $z = 2$ y $S = 0.001$ conduce un flujo uniforme con una profundidad de 6 pies. Calcule la fuerza tractiva unitaria promedio y la velocidad de fricción desarrollada en el canal. ¿Cuáles son las velocidades de fricción máximas en los lados y en el fondo del canal?

8-5. Demuestre que

$$\frac{V}{V_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{R^{1/6}}{3.8n} \qquad (8\text{-}36)$$

donde f es el factor de fricción de Darcy y n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

8-6. A partir de la ecuación (8-13) para expresar la distribución teórica de velocidades en canales rugosos anchos, *a*) demuestre que el promedio de velocidad a 0.2 y 0.8 de la profundidad da la velocidad a 0.6 de la profundidad, y *b*) calcule la posición de la velocidad media por debajo de la superficie libre y compare el resultado con el determinado mediante la regla del U. S. Geological Survey (sección 2-6).

8-7. Un canal ancho conduce un flujo uniforme con una profundidad de 5 pulg con una pendiente de 0.0001. La superficie del canal es rugosa, con un valor de $k = 0.25$ pulg. Calcule y construya una curva que muestre la distribución teórica de velocidades en la sección de canal. ¿Cuál es la velocidad media y cuál su posición?

8-8. Determine los valores de k en los problemas 5-9 y 5-10.

8-9. A partir de la ecuación (8-13), demuestre que los coeficientes teóricos de distribución de velocidades en canales rugosos anchos pueden expresarse como

$$\alpha = 1 + 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3 \qquad (2\text{-}6)$$
$$\beta = 1 + \epsilon^2 \qquad (2\text{-}7)$$

donde $\epsilon = 2.5V_f/V$. También demuestre que $\epsilon = 14.2/C = 0.883\sqrt{f} = 9.5n/R^{1/6} = (v_M/V) - 1$, donde C es el factor de resistencia de Chézy, f es el factor de fricción de Darcy, n es el coeficiente de rugosidad de Manning, R es el radio hidráulico, v_M es la velocidad máxima y V es la velocidad media.

8-10. Grafique una curva que muestre la relación entre α y β definidos mediante las ecuaciones (2-6) y (2-7), respectivamente.

8-11. Calcule los coeficientes de distribución de velocidades para el flujo en el canal descrito en el problema 8-7.

8-12. Una corriente ancha conduce un flujo aproximadamente uniforme con una profundidad de 12 pies. Las velocidades a 0.2 y 0.8 de la profundidad son 1.85 y 1.32 pies/s, respectivamente. Estime: *a*) el coeficiente de rugosidad n, *b*) la velocidad media, *c*) la pendiente del canal y *d*) el caudal por unidad de ancho del canal.

8-13. En una corriente ancha con un lecho de sedimentos en movimiento se dispone de los siguientes datos: $S = 0.003$, $k_{65} = 0.50$ mm y $k_{35} = 0.40$ mm. El radio hidráulico y el área mojada son $R = 0.85y - 1.8$ y $A = 273y - 797$, donde R y y están en pies y A en pies^2. Construya la curva de calibración de caudales para la corriente.

8-14. Demuestre que el número de Vedernikov en canales anchos es $\mathbf{V} = 2\mathbf{F}$ para flujo laminar, $\mathbf{V} = 0.67\mathbf{F}$ para flujo turbulento, si se utiliza la ecuación de Manning, y $\mathbf{V} = 0.5\mathbf{F}$ para flujo turbulento, si se utiliza la ecuación de Chézy.

8-15. A partir del criterio de Vedernikov, explique los efectos generales de los siguientes factores sobre la inestabilidad del flujo: *a*) el valor de x en la ecuación de flujo uniforme, *b*) la forma de la sección transversal del canal, *c*) la viscosidad del fluido, *d*) el coeficiente de energía y *e*) la pendiente del canal.

REFERENCIAS

1. Hermann Schlichting, *Boundary layer theory*, traducido del alemán por J. Kestin, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Pergamon Press Ltd., London, y Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1955.
2. J. W. Delleur, "The boundary layer development in open channels", artículo 1138, *Proceedings*, Vol. 83, Nº EM1, *American Society of Civil Engineers, Journal, Engineering Mechanics Division*, enero de 1957, pp. 1-24.
3. Francis R. Hama, "Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces", *Transactions*, Vol. 62, *Society of Naval Architects and Marine Engineers*, 1954, pp. 333-351.
4. Yoshiaki Iwasa, "Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. XIX, Nº III, Japan, julio, 1957, pp. 229-254.
5. Henry M. Morris, Jr., "A new concept of flow in rough conduits", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 373-398. Análisis por Víctor L. Streeter, Walter Rand, Harry H. Ambrose, y Henry M. Morris, Jr., pp. 399-410.
6. William J. Bauer, "Turbulent boundary layer on steep slopes", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 1212-1233.
7. Ludwig Prandtl, "Über die ausgebildete Turbulenz" ("On fully developed turbulence"), *Proceedings of the 2d. International Congress of Applied Mechanics*, Zürich, 1926, pp. 62-74.
8. Boris A. Bakhmeteff, *The mechanics of turbulent flow*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1936, p. 66.
9. Theodor von Kármán, "Mechanische Äehnlichkeit und Turbulenz" ("Mechanical similarity and turbulence"), *Proceedings of the 3d. International Congress of Applied Mechanics*, Vol. 1, Stockholm, 1930, pp. 85-92.
10. Vito A. Vanoni, "Velocity distribution in open channels", *Civil Engineering*, Vol. 11, Nº 6, junio, 1941, pp. 356-357.
11. J. Nikuradse, "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren" ("Laws of turbulent flow in smooth pipes"), *Verein deutscher Ingenieure, Forschungsheft Nº 356*, Berlin, 1932.
12. J. Nikuradse, "Strömungsgesetze in rauhen Röhren" ("Laws of flow in rough pipes"), *Verein deutscher Ingenieure, Forschungsheft Nº 361*, Berlin, 1933.
13. Garbis H. Keulegan, "Laws of turbulent flow in open channels", artículo de investigación RP 1151, *Journal of Research*, Vol. 21, U.S. National Bureau of Standards, diciembre, 1938, pp. 707-741.

14. Erik Lindquist, "On velocity formulas for open channels and pipes", Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Vol. 1, Stockholm, 1933, pp. 177-234.
15. A. E. Bretting, "A set of practical hydraulic formulae based on recent experimental research; comparison with older formulae", *Appendix 24, 2d. Meeting, International Association of Hydraulic Structures Research*, Stockholm, abril 7-9, 1948, p. 20.
16. Ralph W. Powell, "Flow in a channel of definite roughness", *Transactions*, Vol. 111, *American Society of Civil Engineers*, 1946, pp. 531-566.
17. Ralph W. Powell, "Resistance to flow in smooth channels", *Transactions*, Vol. 30, Nº 6, *American Geophysical Union*, diciembre, 1949, pp. 875-878.
18. Ralph L. Powell, "Resistance to flow in rough channels", *Transactions*, Vol. 31, Nº 4, *American Geophysical Union*, agosto, 1950, pp. 575-582.
19. A. R. Robinson y M. L. Albertson, "Artificial roughness standard for open channels", *Transactions*, Vol. 33, Nº 6, *American Geophysical Union*, diciembre de 1952, pp. 881-888.
20. Yuichi Iwagaki, "On the laws of resistance to turbulent flow in open smooth channels", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. 15, Nº 1, Japan, enero, 1953, pp. 27-40.
21. Yuichi Iwagaki, "On the law of resistance to turbulent flow in open rough channels", *Proceedings of the 4th. Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1954, pp. 229-233.
22. H. Darcy y H. Bazin, "Recherches hydrauliques, I, Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts" ("Hydraulic research: I, Experimental research on the flow of water in open channels"), *Mémoires présentés par divers savants á l'Académie des Sciences*, Vol. 19, Nº 1, Dunod, Paris, 1865.
23. A. Strickler, "Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen" ("Some contributions to the problem of the velocity formula and roughness factors for rivers, canals, and closed conduits"), *Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft*, Nº 16, Bern, Switzerland, 1923.
24. M. C. Boyer, "Estimating the Manning coefficient from an average bed roughness in open channels", *Transactions*, Vol. 35, Nº 6, *American Geophysical Union*, diciembre, 1954, pp. 957-961.
25. Boris A. Bakhmeteff y Nicholas V. Feodoroff, "Discussion on open channel flow", *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 492-502.
26. M. P. O'Brien, "The vertical distribution of velocity in wide rivers", *Transactions*, Vol. 18, Parte 2, *American Geophysical Union*, 1937, pp. 467-470.
27. F. C. Scobey, "The flow of water in irrigation channels", *U.S. Department of Agriculture, Professional Paper, Bulletin Nº 194*, 1915.
28. W. E. Langbein, "Determination of Manning's *n* from vertical-velocity curve", *Transactions*, Parte II, *American Geophysical Union*, julio de 1940, pp. 618-620.
29. Hans A. Einstein y H. L. Barbarossa, "River channel roughness", *Transactions*, Vol. 117, *American Society of Civil Engineers*, 1952, pp. 1121-1132.
30. James J. Doland y Ven Te Chow, "Discussion of River channel roughness", por Hans A. Einstein y H. L. Barbarossa, *Transactions*, Vol. 117, *American Society of Civil Engineers*, 1952, pp. 1134-1139.
31. Vaughan Cornish, *Waves of the sea and other water waves*, The open Court Publishing Company, La Salle, Ill., y T. Fisher Unwin, London, 1910.
32. Harold Jeffreys, "The flow of water in an inclined channel of rectangular section", *London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Ser. 6, Vol. 49, mayo, 1925, pp. 793-807.
33. G. H. Keulegan y G. W. Patterson, "A criterion for instability of flow in steep channels", *Transactions*, Vol. 21, Parte II, *American Geophysical Union*, julio, 1940, pp. 594-596.
34. Harold A. Thomas, "The propagation of waves in steep prismatic conduits", *Proceedings of Hydraulics Conference, University of Iowa Studies in Engineering, Bulletin 20*, 1940, pp. 214-229.
35. V. V. Vedernikov, "Conditions at the front of a translation wave distributing a steady motion of a real fluid", *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, Vol. 48, Nº 4, 1945, pp. 239-242.

36. V. V. Vedernikov, "Characteristic features of a liquid flow in an open channel", *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, Vol. 52, 1946, pp. 207-210.
37. Ralph W. Powell, "Vedernikov's criterion for ultra-rapid flow", *Transactions*, Vol. 29, Nº 6, *American Geophysical Union*, diciembre de 1948, pp. 882-886. Análisis por V. V. Vedernikov y Ralph W. Powell, Vol. 32, Nº 4, agosto de 1951, pp. 603-607.
38. Robert F. Dressler, "Mathematical solutions of the problems of roll waves in inclined open channels" *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 2, Nº 2-3, 1949, pp. 149-194.
39. Robert F. Dressler, "Stability of uniform flow and roll-wave formation", *Proceedings of the Gravity Waves Symposium, U.S. National Bureau of Standards, Circular 521*, 1952, pp 237-241.
40. Francis F. Escoffier, "A graphical method for investigating the stability of flow in open channels or in closed conduits flowing partly full", *Transactions*, Vol. 31, Nº 4, *American Geophysical Union*, 1950, pp. 583-586.
41. A. Craya, "The criterion for the possibility of roll wave formation", *Proceedings of the Gravity Waves Symposium, U.S. National Bureau of Standards, Circular 521*, 1952, pp. 294-332.
42. Tojiro Ishihara, Yuichi Iwagaki, y Yasuo Ishihara, "On the rollwave-trains appearing in the water flow on a steep slope surface", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. XIV, Nº 2, Japan, marzo de 1952, pp. 83-91.
43. Yoshiaki Iwasa, "The criterion for instability of steady uniform flows in open channels", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. XVI, Nº 6, Japan, marzo, 1954, pp. 264-275.
44. Chia-Shun Yih, "Stability of parallel laminar flow with a free surface", *Proceedings of the 2d. U.S. National Congress of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, 1954, pp. 623-628.
45. C. C. Lin, *The theory of hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1955.

PARTE III

FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

CAPÍTULO 9

TEORÍA Y ANÁLISIS

9-1. Suposiciones básicas. El flujo gradualmente variado que será estudiado en la parte III de este libro es el flujo permanente cuya profundidad varía de manera gradual a lo largo de la longitud del canal (sección 1-2). Esta definición establece dos condiciones: 1) el flujo es permanente; es decir, las características hidráulicas de flujo permanecen constantes para el intervalo de tiempo bajo consideración, y 2) las líneas de corriente son paralelas; es decir, prevalece la distribución hidrostática de presiones sobre la sección de canal.

El desarrollo de la teoría del flujo gradualmente variado se remonta al siglo XVIII. Muchos de los primeros ingenieros hidráulicos[1] contribuyeron a este desarrollo. Todas las teorías así desarrolladas en general giran alrededor de la siguiente suposición básica:

A. *La pérdida de altura en una sección es la misma que para un flujo uniforme que tiene la velocidad y el radio hidráulico de la sección.*

De acuerdo con esta suposición, *la ecuación de flujo uniforme puede utilizarse para evaluar la pendiente de energía de un flujo gradualmente variado en una sección de canal determinada, y el correspondiente coeficiente de rugosidad desarrollado en principio para flujo uniforme se aplica al flujo variado.* Esta suposición nunca ha sido confirmada de manera precisa por experimentos[2] o por teoría, pero los errores que surgen de ella se creen que son pequeños comparados con aquellos

[1] Se cree que Bélanger [1] es el contribuyente más destacado. Dentro de los primeros contribuyentes están Bernoulli, Bresse, Poncelet, Saint-Venant, Boussinesq y otros [2] a [5].

[2] A partir de los datos experimentales de la Sunderland Technical College y King's College en Inglaterra y de la Universidad de Illinois, Bettes [6] dedujo una relación *f*-R [1-3] para flujo gradualmente variado en canales abiertos lisos, la cual estuvo muy de acuerdo con la relación para flujo uniforme obtenida por Allen [7]. También, el cálculo de curvas de remanso basado en esta suposición ha sido verificado satisfactoriamente en muchos experimentos. Estas verificaciones experimentales, a pesar de que no son muy rigurosas, indican la validez de la suposición para propósitos prácticos.

en los cuales se incurre comúnmente durante el uso de una ecuación de flujo uniforme y en la selección del coeficiente de rugosidad. A través de los años esta suposición ha demostrado ser una base confiable para el diseño. La suposición es sin duda más correcta para flujos variados donde la velocidad se incrementa que aquellos en los cuales la velocidad disminuye, debido a que en un flujo con velocidad que se incrementa la pérdida de altura es causada casi en su totalidad por efectos friccionales, en tanto que en un flujo con velocidad decreciente pueden existir pérdidas por remolinos de gran escala.

Además de la anterior suposición básica, también se utilizan las siguientes suposiciones donde se necesite una simplificación adicional en los análisis subsecuentes:

B. La pendiente del canal es baja; esto significa que:

1. La profundidad de flujo es la misma sin importar si se utiliza la dirección vertical o normal (al fondo del canal).

2. El factor de corrección de presiones cos θ [aplicado a la profundidad de la sección de flujo, ecuación (2-12)] es igual a la unidad.

3. No ocurre atrapamiento de aire. En caso de que exista un notable atrapamiento de aire, los cálculos deben llevarse a cabo, suponiendo que no existe atrapamiento y después deben corregirse utilizando la ecuación (2-15).

C. El canal es prismático; es decir, el canal tiene alineamiento y forma constantes.

D. La distribución de velocidad en la sección de canal es fija. Luego los coeficientes de distribución de velocidades son constantes.

E. La conductividad *K* (sección 6-3) y el factor de sección *Z* (sección 4-3) son funciones exponenciales de la profundidad de flujo.

F. El coeficiente de rugosidad es independiente de la profundidad de flujo y constante a través del tramo del canal bajo consideración.

9-2. Ecuación dinámica de flujo gradualmente variado. Considere el perfil de flujo gradualmente variado en la longitud elemental dx de un canal abierto (figura 9-1). La altura total de energía por encima del nivel de referencia en la sección 1 aguas arriba es

$$H = z + d\cos\theta + \alpha\frac{V^2}{2g} \qquad (3\text{-}2)$$

donde H es la altura total de energía en pies; z es la distancia vertical del fondo del canal por encima del nivel de referencia en pies; d es la profundidad de la seccción de flujo en pies; θ es el ángulo de la pendiente del fondo; α es el coeficiente de energía; y V es la velocidad media del flujo a través de la sección en pies/s.

Se supone que θ y α son constantes a través del tramo del canal bajo consideración. Al tomar el fondo del canal como el eje x y al derivar la ecuación (3-2) con respecto a la longitud x del perfil de la superficie del agua, el cual se mide a lo largo del eje x, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \cos\theta\frac{dd}{dx} + \alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \qquad (9\text{-}1)$$

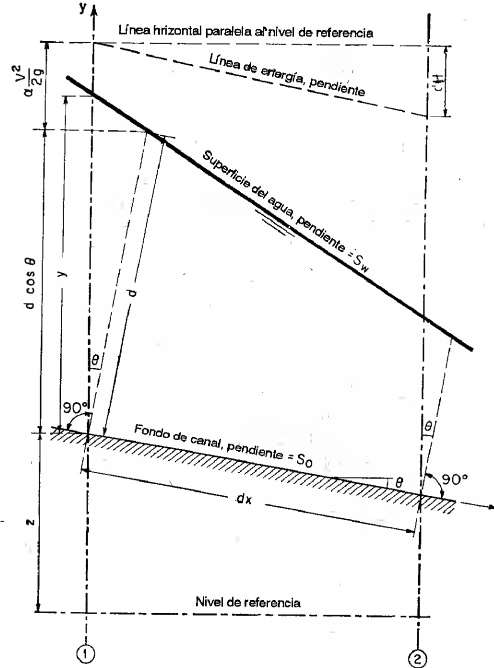


Figura 9-1. Deducción de la ecuación de flujo gradualmente variado.

Nótese que la pendiente se define como el seno del ángulo de la pendiente y se supone que es *positiva* si *desciende* en la dirección del flujo y *negativa* si *asciende*. Por consiguiente[3] en la figura 9-1, la pendiente de energía es $S_f = dH/dx$ y la pendiente del fondo del canal es $S_0 = \text{sen}\ \theta = -dz/dx$. Al sustituir estas pendientes en la ecuación (9-1) y al resolver para dd/dx,

$$\frac{dd}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos\theta + \alpha\, d(V^2/2g)/dd} \qquad (9\text{-}2)$$

Ésta es la ecuación diferencial general para flujo gradualmente variado, conocida de aquí en adelante como *ecuación dinámica del flujo gradualmente variado*, o simplemente como la *ecuación de flujo gradualmente variado*. Ésta representa la pendiente de la superficie *con respecto al fondo del canal*. La profundi-

[3] Nótese que las pérdidas por fricción dH siempre son una cantidad negativa en la dirección del flujo (a menos que se añada energía exterior al curso del flujo) y que el cambio en la elevación del fondo dz es una cantidad negativa cuando la pendiente desciende.

dad d se mide desde el fondo del canal, y el fondo del canal se toma como el eje x. Luego la pendiente de la superficie del agua es igual a la pendiente S_0 del fondo del canal si $dd/dx = 0$, menor que S_0 si dd/dx es positiva, y mayor que S_0 si dd/dx es negativa. En otras palabras, la superficie del agua es paralela al fondo del canal cuando $dd/dx = 0$, aumenta cuando dd/dx es positivo y disminuye cuando dd/dx es negativo.

En la ecuación anterior el ángulo θ de la pendiente se ha supuesto constante o independiente de x. De otra manera, debería añadirse un nuevo término, $-d$ sen θ $(d\theta/dd)$, donde θ es una función de x, la cual debe sumarse al denominador. Para θ pequeño, cos $\theta \approx 1$, $d \approx y$ y $dd/dx \approx dy/dx$. Luego la ecuación (9-2) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 + \alpha\, d(V^2/2g)/dy} \qquad (9\text{-}3)$$

En la mayor parte de los problemas la pendiente del canal es pequeña; por consiguiente, se utilizará la ecuación (9-3) en los análisis subsecuentes.

El término $\alpha d(V^2/2g)/dy$ en la ecuación de flujo variado representa el cambio en la altura de velocidad. Se ha supuesto que el coeficiente α es constante de una sección a la otra en el tramo del canal bajo consideración. De otra manera, el cambio en la altura de velocidad debería expresarse como $d(\alpha V^2/2g)/dy$, donde α es función de x. Como $V = Q/A$, Q es constante y $dA/dy = T$, el término de altura de velocidad puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\alpha \frac{d}{dy}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = \frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{dA^{-2}}{dy} = -\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} = -\frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} \qquad (9\text{-}4)$$

Como $Z = \sqrt{A^3/T}$, la anterior ecuación puede escribirse como

$$\alpha \frac{d}{dy}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{gZ^2} \qquad (9\text{-}5)$$

Al suponer que un flujo crítico con caudal igual a Q ocurre en la sección, la ecuación (4-4) da

$$Q = Z_c\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \qquad (9\text{-}6)$$

donde Z_c es el factor de sección para el cálculo de flujo crítico correspondiente al caudal Q y a la profundidad y_c. El símbolo Z_c utilizado aquí debería distinguirse cuidadosamente del Z de la ecuación (9-5). El símbolo Z simplemente representa el valor numérico de $\sqrt{A^3/T}$, el cual se calcula para el caudal Q con una profundidad igual a y del flujo gradualmente variado. El valor de Z_c es el factor de sección, el cual se calcula para Q con la profundidad y_c como si el flujo fuera crítico. Ahora, al sustituir la ecuación (9-6) para Q en la ecuación (9-5) y al simplificar,

$$\alpha \frac{d}{dy}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{Z_c^2}{Z^2} \qquad (9\text{-}7)$$

El término S_f de la ecuación (9-3) representa la pendiente de energía. De acuerdo con la primera suposición de la sección 9-1, esta pendiente de una sección de canal con flujo gradualmente variado es igual a la pendiente de energía del flujo uniforme que tiene la velocidad y el radio hidráulico de la sección. Cuando se utiliza la ecuación de Manning, la pendiente de energía es

$$S_f = \frac{n^2V^2}{2.22R^{4/3}} \qquad (9\text{-}8)$$

Cuando se utiliza la ecuación de Chézy,

$$S_f = \frac{V^2}{C^2R} \qquad (9\text{-}9)$$

En una forma general, expresada en términos de la conductividad K, la pendiente de energía de la ecuación (6-4) puede escribirse como

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} \qquad (9\text{-}10)$$

Suponga que un flujo uniforme con caudal igual a Q ocurre en la sección. La pendiente de energía sería igual a la pendiente del fondo, y la ecuación (9-10) puede escribirse como

$$S_0 = \frac{Q^2}{K_n^2} \qquad (9\text{-}11)$$

donde K_n es la conductividad para el flujo uniforme con una profundidad y_n. Ésta K_n debe distinguirse de K en la ecuación (9-10). La notación K representa el valor numérico de la conductividad correspondiente a una profundidad y del flujo gradualmente variado. El valor K_n es la conductividad calculada para Q correspondiente a la profundidad y_n como si el flujo se considerara uniforme.

Al dividir la ecuación (9-10) por la ecuación (9-11),

$$\frac{S_f}{S_0} = \frac{K_n^2}{K^2} \qquad (9\text{-}12)$$

Al sustituir las ecuaciones (9-7) y (9-12) en la ecuación (9-3),

$$\frac{dy}{dx} = S_0\frac{1 - (K_n/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} \qquad (9\text{-}13)$$

Ésta es otra forma de la ecuación de flujo gradualmente variado.

Existen otras formas muy conocidas de la ecuación de flujo gradualmente variado que pueden ser fácilmente deducidas, como

$$\frac{dy}{dx} = S_0\frac{1 - (K_n/K)^2}{1 - r(K_n/K)^2} \qquad (9\text{-}14)$$

donde $r = S_0/S_{cn}$, o la relación de la pendiente del canal con respecto a la pendiente crítica en la profundidad normal del caudal Q (sección 6-7),

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (Q/Q_n)^2}{1 - (Q/Q_c)^2} \tag{9-15}$$

donde Q es el caudal determinado para el flujo gradualmente variado con la profundidad real y, Q_n es el caudal normal con una profundidad de flujo igual a y, y Q_c es el caudal crítico correspondiente a una profundidad igual a y, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - Q^2/C^2A^2R}{1 - \alpha Q^2/gA^2D} \tag{9-16}$$

donde D es la profundidad hidráulica, C es el factor de resistencia de Chézy y el resto de la notación es igual a como se definió en esta sección.

Para canales rectangulares anchos,

1. Cuando se utiliza la ecuación de Manning,

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_n/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3} \tag{9-17}$$

2. Cuando se utiliza la ecuación de Chézy,

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_n/y)^3}{1 - (y_c/y)^3} \tag{9-18}$$

9-3. Características de los perfiles de flujo. La ecuación dinámica de flujo gradualmente variado, desarrollada en la sección 9-2, expresa la pendiente de la superficie longitudinal del flujo con respecto al fondo del canal. Por consiguiente puede utilizarse para describir las características de varios *perfiles de flujo* o perfiles de la superficie de agua del flujo. Para propósitos de simplicidad, se considera el canal como *prismático* y se utiliza la ecuación (9-13) para el análisis. Se supone que los valores de K y Z en esta ecuación se incrementan o disminuyen continuamente con la profundidad y. Esto es cierto para todas las secciones de canales abiertos con excepción de conductos con claves que se cierran gradualmente. En tales conductos, el valor de K, después de alcanzar su valor máximo, disminuirá a medida que la profundidad de flujo se aproxima a la parte superior del conducto (sección 6-3).

El perfil de flujo representa la *curva de la superficie* del flujo. Representará una curva de remanso[4] (sección 4-5) si la profundidad de flujo se incrementa en la dirección del flujo, y una curva de caída (sección 4-5) si la profundidad disminuye con la dirección del flujo. Siguiendo la descripción de la sección anterior, puede verse que el perfil de flujo es una curva de remanso si dy/dx es positiva y una curva de caída si dy/dx es negativa.

Para una curva de remanso, dy/dx es positivo; luego, la ecuación (9-13) da dos casos posibles:

[4] El término "curva de remanso" se utiliza primordialmente para indicar la curva longitudinal de la superficie del agua represada aguas arriba de una presa o en un río tributario debido a una creciente en la corriente principal. Muchos autores han extendido este significado para incluir todos los tipos de perfiles de flujo.

1. $1 - (K_n/K)^2 > 0$ y $1 - (Z_c/Z)^2 > 0$
2. $1 - (K_n/K)^2 < 0$ y $1 - (Z_c/Z)^2 < 0$

Como los valores de K y Z se incrementan o disminuyen continuamente con la profundidad y, el primer caso indica que $y > y_n$ y $y > y_c$. Como $y > y_c$, el flujo debe ser subcrítico. Si $y > y_n > y_c$, el flujo subcrítico debe ocurrir en un *canal suave* (es decir, un canal con pendiente subcrítica). Por otro lado, si $y > y_c > y_n$, el flujo subcrítico debe ocurrir en un *canal empinado* (es decir, un canal con pendiente supercrítica). De igual manera el segundo caso indica que $y < y_n$ y $y < y_c$. El flujo correspondiente debe ser supercrítico; y éste ocurre en un canal suave si $y_n > y_c > y$ y en un canal empinado si $y_c > y_n > y$.

Para una curva de caída, dy/dx es negativo y la ecuación (9-13) da dos casos posibles:

1. $1 - (K_n/K)^2 > 0$ y $1 - (Z_c/Z)^2 < 0$
2. $1 - (K_n/K)^2 < 0$ y $1 - (Z_c/Z)^2 > 0$

El primer caso indica que $y_c > y > y_n$ y, por consiguiente, que el flujo es supercrítico en un canal empinado. Del mismo modo, el segundo caso indica que $y_n > y > y_c$, o que el flujo es subcrítico en un canal suave.

Cuando la superficie del agua es paralela al fondo del canal, $dy/dx = 0$, y la ecuación (9-13) da $1 - (K_n/K)^2 = 0$, o $y = y_n$, lo cual indica un flujo uniforme. El flujo es uniforme crítico si $y = y_n = y_c$, uniforme subcrítico si $y = y_n > y_c$ y uniforme supercrítico si $y_c > y_n = y$.

Para propósitos de análisis, la pendiente del canal puede clasificarse como *pendiente favorable* y *pendiente no favorable*. Una pendiente favorable es una pendiente del canal que cae en la dirección del flujo. Por consiguiente, una pendiente favorable es siempre positiva y puede llamarse *pendiente positiva*. Una pendiente favorable o positiva puede ser crítica, suave (subcrítica) o inclinada (supercrítica). Una pendiente no favorable puede ser *horizontal* o *adversa*. Una pendiente horizontal es una *pendiente cero*. Una pendiente adversa es una *pendiente negativa* que aumenta en la dirección del flujo.

En un canal de pendiente horizontal o $S_0 = 0$, la ecuación (9-11) da $K_n = \infty$ o $y_n = \infty$. Como $K_n \sqrt{S_0} = Q$, la ecuación (9-13) para canales horizontales puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(Q/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} \tag{9-19}$$

Al considerar $y_n = \infty$, esta ecuación indica dos condiciones posibles:

1. $y_n > y > y_c$
2. $y_n > y_c > y$

El primer caso representa un flujo subcrítico con una curva de caída, debido a que dy/dx se muestra como negativo. El segundo caso representa un flujo supercrítico con una curva de remanso, debido a que dy/dx se muestra como positivo.

En un canal de pendiente adversa o $S_0 < 0$, la ecuación (9-11) indica que, para valores negativos de S_0, K_n debe ser imaginario o K_n^2 debe ser negativo [8]. En consecuencia, la ecuación (9-13) da dos casos posibles:

1. Un flujo subcrítico en el cual $y > y_c$
2. Un flujo supercrítico en el cual $y < y_c$

En el primer caso dy/dx es negativo y el perfil de flujo es una curva de caída. En el segundo caso dy/dx es positivo y el perfil de flujo es una curva de remanso. Como K_n es imaginario, el valor de y_n no puede expresarse con facilidad[5]. De hecho, un valor positivo finito de y_n es físicamente imposible debido a que un flujo uniforme nunca puede ocurrir en un canal adverso (¿por qué?).

Los análisis anteriores se resumen en la tabla 9-1 y en las figuras 9-2 y 9-4. Algunos aspectos importantes de los perfiles de flujo teórico son los siguientes:

Tabla 9-1. Tipos de perfiles de flujo en canales prismáticos.

Pendiente del canal	Designación			Relación de y con y_n y y_c			Tipo general de curva	Tipo de flujo
	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 1	Zona 2	Zona 3		
Horizontal $S_0 = 0$	Ninguno			$y >$	$y_n >$	y_c	Ninguno	Ninguno
		$H2$			$y_n > y >$	y_c	Caída	Subcrítico
			$H3$		$y_n >$	$y_c > y$	Remanso	Supercrítico
Suave $0 < S_0 < S_c$	$M1$			$y >$	$y_n >$	y_c	Remanso	Subcrítico
		$M2$			$y_n > y >$	y_c	Caída	Subcrítico
			$M3$		$y_n >$	$y_c > y$	Remanso	Supercrítico
Crítica $S_0 = S_c > 0$	$C1$			$y >$	$y_c =$	y_n	Remanso	Subcrítico
		$C2$			$y_c = y = y_n$		Paralelo al fondo del canal	Uniforme-crítico
			$C3$		$y_c =$	$y_n > y$	Remanso	Supercrítico
Empinada $S_0 > S_c > 0$	$S1$			$y >$	$y_c >$	y_n	Remanso	Subcrítico
		$S2$			$y_c > y >$	y_n	Caída	Supercrítico
			$S3$		$y_c >$	$y_n > y$	Remanso	Supercrítico
Adversa $S_0 < 0$	Ninguno			$y >$	$(y_n)^* >$	y_c	Ninguno	Ninguno
		$A2$			$(y_n)^* > y >$	y_c	Caída	Subcrítico
			$A3$		$(y_n)^* >$	$y_c > y$	Remanso	Supercrítico

* y_n en paréntesis se supone como un valor positivo.

[5] Algunos autores toman y_n como negativo [9]. Entonces, la ecuación de Chézy puede utilizarse para propósitos de explicación. Mediante la ecuación de Chézy, $K = CAR^{1/2}$ y $K^2 = C^2A^2R$. Luego, para un valor negativo de K^2, R y, por consiguiente, y_n deben ser negativos. También se ha supuesto el valor de y_n como positivo [10]. En este caso el C de Chézy se toma como un valor imaginario con el fin de mantener los valores de A y R invariablemente positivos.

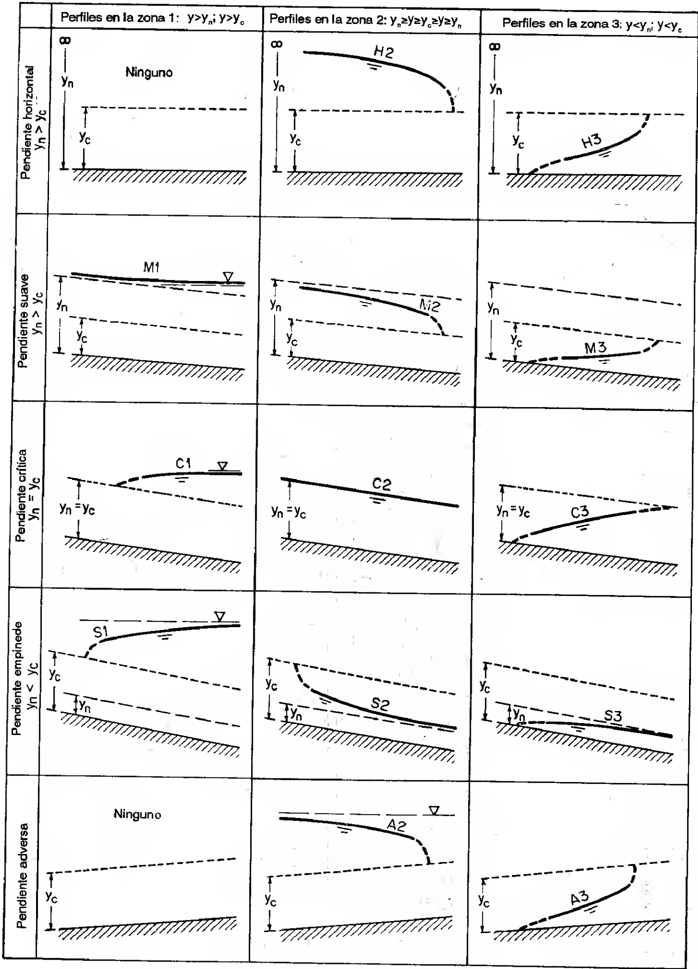


Figura 9-2. Clasificación de los perfiles de flujo en flujo gradualmente variado.

A. Discontinuidad en el perfil de flujo. Cuando $y = y_c$, la ecuación (9-13) indica que $dy/dx = \infty$, es decir, que el perfil de flujo debe ser vertical al cruzar la línea de profundidad crítica. Si la profundidad de flujo cambia súbitamente de un nivel bajo a un nivel alto al cruzar la línea de profundidad crítica, ocurre un resalto hidráulico que representa una discontinuidad en el perfil de flujo. Si la profundidad cambia de un nivel alto a un nivel bajo, entonces ocurre una caída hidráulica. Nótese que en la línea de profundidad crítica o cerca de ella, el perfil de flujo produce una curvatura tan alta que la suposición de flujo paralelo para la definición del flujo gradualmente variado introduce errores grandes. De hecho, el flujo puede volverse tan curvilíneo o rápidamente variado que la teoría y las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior se vuelven inaplicables. Por consiguiente, la ecuación (9-13) no debe utilizarse para describir o calcular con exactitud el perfil de flujo cerca de la profundidad crítica.

B. Comportamiento del perfil de flujo en profundidades específicas. Para el análisis subsecuente, es importante reconocer el comportamiento teórico del perfil de flujo en algunas profundidades específicas. Cuando $y = \infty$ la ecuación (9-13) muestra que $dy/dx = S_0$, es decir, que la superficie de flujo es horizontal. Cuando $y = y_n$, la ecuación (9-13) muestra que $dy/dx = 0$, es decir, que la superficie de flujo es paralela al fondo del canal; esto significa flujo uniforme. Cuando $y = y_c$ puede ocurrir un resalto hidráulico o una caída hidráulica en el perfil de flujo, tal como se anotó antes. Cuando $y = y_n = y_c$, el flujo es uniforme y crítico.

C. Puntos de inflexión en el perfil de flujo. Cuando $y = 0$, la ecuación (9-13) parece producir una forma indeterminada ∞/∞ para dy/dx. Sin embargo, puede demostrarse que el comportamiento teórico del perfil de flujo en $y = 0$ o cerca de cero depende del tipo de ecuación de flujo uniforme que se utilice para el cálculo. Para un canal rectangular ancho, la ecuación (9-17) representa la pendiente del perfil de flujo si se utiliza la ecuación de Manning. Mediante esta ecuación puede demostrarse que dy/dx se vuelve infinito cuando $y = 0$. Esto significa que la curva es vertical en el fondo del canal. A partir de la ecuación de Chézy puede demostrarse que $dy/dx = S_0(y_n/y_c)^3$ para $y = 0$. Esto significa que la curva forma un cierto ángulo con el fondo. En apariencia debe existir un punto de inflexión en el perfil de flujo cuando $y < y_c < y_n$. Investigaciones matemáticas hechas por Gunder [11] y Mouret [12] han revelado que este punto de inflexión se localiza a una profundidad muy cerca del fondo del canal (figura 9-3)[6]. De la misma manera, Mouret encontró que existe otro punto de inflexión en el perfil de flujo cuando $y > y_n > y_c$ (figura 9-3)[7].

9-4. Clasificación de los perfiles de flujo[8]. Para un caudal y unas condiciones de canal determinados las líneas de profundidad normal y las líneas de profundidad crítica dividen el espacio de un canal en tres zonas:

[6] Se cree que el aspecto de los puntos de inflexión fue analizada por primera vez por Merten [13].
[7] Este punto de inflexión ocurre porque el perfil debe tener una pendiente horizontal al cruzar el perfil transicional y luego debe curvarse hacia adelante tangente al nivel del embalse aguas abajo (sección 9-6).
[8] Se cree que una descripción y una clasificación completa de los diferentes perfiles de flujo fue dada por primera vez por Boudin [14].

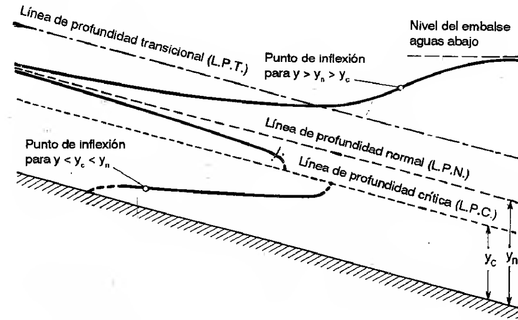


Figura 9-3. Puntos teóricos de inflexión en perfiles de flujo.

Zona 1. El espacio por encima de la línea superior
Zona 2. El espacio entre las dos líneas
Zona 3. El espacio por debajo de la línea inferior

Luego, los perfiles de flujo pueden clasificarse en trece tipos diferentes de acuerdo con la naturaleza de la pendiente del canal y la zona en la cual se encuentra la superficie del flujo. Estos tipos se designan como *H*2, *H*3; *M*1, *M*2, *M*3; *C*1, *C*2, *C*3; *S*1, *S*2, *S*3; y *A*2, *A*3; donde la letra describe la pendiente: *H* para horizontal, *M** para suave (subcrítica), *C* para crítica, *S* para empinada (supercrítica) y *A* para pendiente adversa, y el número representa el número de la zona. De los trece perfiles de flujo, doce son para flujo gradualmente variado, y uno, *C*2, es para flujo uniforme. Nótese que a menudo ocurre un perfil de flujo continuo sólo en una zona. Las características generales de estos perfiles se dan en la tabla 9-1, y sus formas se muestran en las figuras 9-2 y 9-4. Como los perfiles cerca de la profundidad crítica y del fondo del canal no pueden definirse con exactitud mediante la teoría de flujo gradualmente variado, éstos se muestran con líneas punteadas. Varios de los perfiles de flujo se analizan a continuación.

A. Perfiles tipo M. $S_0 < S_c$ y $y_n > y_c$.

El perfil *M*1 representa la curva de remanso más conocida; es el más importante de todos los perfiles de flujo desde un punto de vista práctico. Este perfil ocurre cuando el extremo de aguas abajo de un canal suave largo se sumerge en un embalse hasta una profundidad mayor que la profundidad normal de flujo en el canal. Este perfil de flujo se ubica en la zona 1. El extremo de aguas arriba de la curva es tangente a la línea de profundidad normal, debido a que $dy/dx = 0$ cuando $y = y_n$; y en el extremo de aguas abajo es tangente a la superficie horizontal del embalse, debido a que $dy/dx = S_0$ cuando $y = \infty$. Ejemplos comunes del perfil *M*1 son el perfil por detrás de una presa en un río natural (figura 9-4*a*) y el perfil en un canal que une dos embalses (figura 9-4*b*).

* *Nota del traductor.* La letra *M* corresponde a suave, en inglés, *mild* y la letra *S* a empinado, en inglés, *steep*.

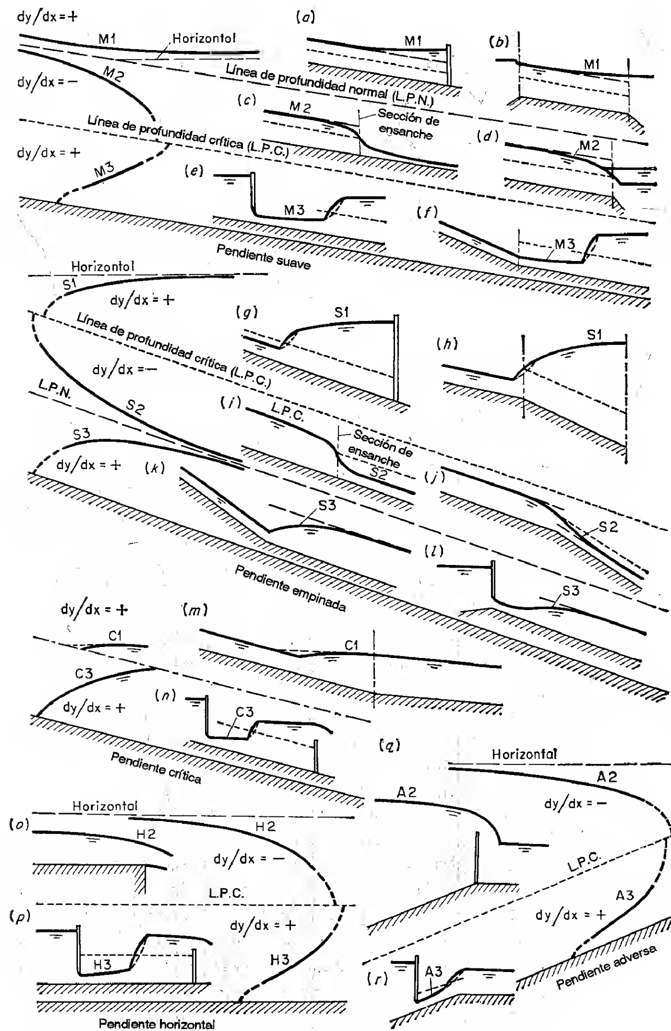


Figura 9-4. Ejemplos de perfiles de flujo.

Un *perfil M2* ocurre cuando el fondo del canal en el extremo de aguas abajo se sumerge en un embalse con una profundidad menor que la normal. El extremo de aguas arriba del perfil de flujo es tangente a la línea de profundidad normal, debido a que $dy/dx = 0$ cuando $y = y_n$. Si la cantidad de sumergencia en el extremo de aguas abajo es menor que la profundidad crítica, el perfil terminará abruptamente, con su extremo tangente a una línea vertical en una profundidad igual a la profundidad crítica, debido a que $dy/dx = \infty$ cuando $y = y_c$. Esto implica la formación de una caída hidráulica. Si la profundidad de sumergencia en el extremo de aguas abajo es mayor que la profundidad crítica, entonces se formará tanto perfil como agua haya por encima de la superficie del embalse. Ejemplos son el perfil en el lado de aguas arriba de un ensanchamiento abrupto en la sección transversal de un canal (figura 9-4*c*) y el perfil en un canal que llega a un embalse, donde el nivel de la piscina se muestra tanto encima como debajo de la línea de profundidad crítica (figura 9-4*d*).

En teoría el *perfil M3* empieza desde el fondo del canal aguas arriba, con un ángulo de pendiente vertical o con un ángulo agudo, dependiendo del tipo de ecuación de flujo uniforme que se utilice (sección 9-3), y termina con un resalto hidráulico en el extremo de aguas abajo. Por lo general este tipo de perfil ocurre cuando un flujo supercrítico entra en un canal suave. El inicio del perfil, a pesar de que no puede definirse con precisión mediante la teoría, depende de la velocidad inicial del agua entrante. A mayor velocidad, más distante aguas abajo empezará el perfil. El extremo teórico de aguas arriba del perfil intersecará el fondo del canal. En este extremo $y = 0$. Por consiguiente, la velocidad se volvería infinita. Luego, el extremo teórico de aguas arriba de un perfil *M3* no puede existir físicamente. Ejemplos de perfil *M3* son el perfil de una corriente por debajo de una compuerta deslizante (figura 9-4*e*) y el perfil después de un cambio en la pendiente del fondo de empinada a más suave (figura 9-4*f*).

B. Perfiles tipo S. $S_0 > S_c$ y $y_n < y_c$.

El *perfil S1* empieza con un resalto en el extremo de aguas arriba y se vuelve tangente a la horizontal en el extremo de aguas abajo. Ejemplos son los perfiles de flujo por detrás de una presa en un canal empinado (figura 9-4*g*) y en un canal empinado llegando a un embalse con una alta elevación (figura 9-4*h*).

El *perfil S2* es una curva de caída. A menudo es muy corto y semeja una transición entre una caída hidráulica y un flujo uniforme, debido a que empieza aguas arriba con una pendiente vertical en la profundidad crítica y es tangente a la línea de profundidad normal en el extremo de aguas abajo. Ejemplos son los perfiles formados en el lado de aguas abajo de un ensanchamiento de sección de canal (figura 9-4*i*) y en el lado empinado de un canal que cambia su pendiente de empinada a más empinada (figura 9-4*j*).

El *perfil S3* es también del tipo transicional, conformado entre un flujo supercrítico entrante y la línea de profundidad normal a la cual el perfil es tangente. Ejemplos son el perfil en el lado de pendiente empinada en un canal que cambia pendiente de empinada a menos empinada (figura 9-4*k*) y debajo de una compuerta con una profundidad de flujo entrante menor que la profundidad normal en un canal de pendiente empinada (figura 9-4*l*).

C. Perfiles tipo C. $S_0 = S_c$ y $y_n = y_c$.

Estos perfiles representan las condiciones de transición entre los perfiles *M* y *S*. Suponiendo un canal rectangular ancho, la ecuación (9-17) muestra que los *perfiles* C1 y C3 son curvos y que el perfil C1 es asintótico a una línea horizontal (figuras 9-4*m* y 9-4*n*). Cuando se utiliza la ecuación de Chézy, la ecuación (9-18) mostrará que los dos perfiles son líneas horizontales. El *perfil C*2 representa el caso de flujo uniforme crítico.

D. Perfiles de tipo H. $S_0 = 0$ y $y_n = \infty$.

Éstos son los casos limitantes de perfiles *M* cuando el fondo del canal se vuelve horizontal. Los *perfiles H*2 y *H*3 corresponden a los perfiles *M*2 y *M*3, pero un perfil *H*1 no puede establecerse en realidad, debido a que y_n es infinito. Ejemplos de los perfiles *H* se muestran en las figuras 9-4*o* y 9-4*p*.

E. Perfiles tipo A. $S_0 < 0$.

El perfil *A*1 es imposible debido a que el valor de y_n no es real. Los *perfiles A*2 y *A*3 son similares a los perfiles *H*2 y *H*3, respectivamente. En general los perfiles tipo *A* rara vez ocurren. Ejemplos se muestran en las figuras 9-4*q* y 9-4*r*.

F. Perfiles en conductos con claves que se cierran gradualmente.

Para cualquier conducto con una clave que se cierra gradualmente, el caudal normal se incrementará a medida que la profundidad del flujo se incrementa. Primero se incrementará hasta el valor de caudal de flujo lleno Q_0 a una profundidad y_0' menor que la profundidad de flujo lleno y_0. De allí en adelante el caudal alcanzará un valor máximo $Q_{máx}$ a una profundidad y_n^*. Incrementos adicionales en la profundidad de flujo eventualmente decrecerán el caudal hasta el caudal de tubo lleno en el momento en que la superficie de flujo toque el techo del conducto. La figura 9-5*a* muestra la variación del caudal normal en un conducto de este tipo. En el caso particular de un conducto circular, las profundidades son $y_0' = 0.82y_0$ y $y_n^* = 0.938y_0$, donde y_0 es el diámetro del conducto (sección 6-4). Dentro de la región de $y = y_0'$ y $y = y_0$, existen dos posibles profundidades normales para un caudal determinado, es decir, la *profundidad normal baja* y_n y la *profundidad normal alta* o *conjugada* y_n'.

Siguiendo el principio utilizado en el párrafo anterior puede demostrarse que existen cuatro tipos de perfiles de flujo para una pendiente determinada [15-19]. Las figuras 9-5*b*, 9-5*c*, y 9-5*d* muestran estos perfiles para pendientes suaves y empinadas. Las posiciones de las profundidades y_n y y_n' se suponen constantes en estas figuras. Nótese que la profundidad crítica en la figura 9-5*d* es mayor que las profundidades normales y_n' y y_n, pero su profundidad normal baja correspondiente es menor que y_n' y y_n. En consecuencia, la pendiente crítica correspondiente debería ser menor que la pendiente normal y se considera que la pendiente del canal es suave.

9-5. Análisis de perfil de flujo. El análisis del perfil de flujo es un procedimiento utilizado para predecir la forma del perfil de flujo. Esto permite al ingeniero conocer de antemano los posibles perfiles de flujo que pueden ocurrir en un esquema de canal determinado. Este procedimiento constituye una parte muy significativa en todos los problemas de diseño de canales para flujo gradualmente variado.

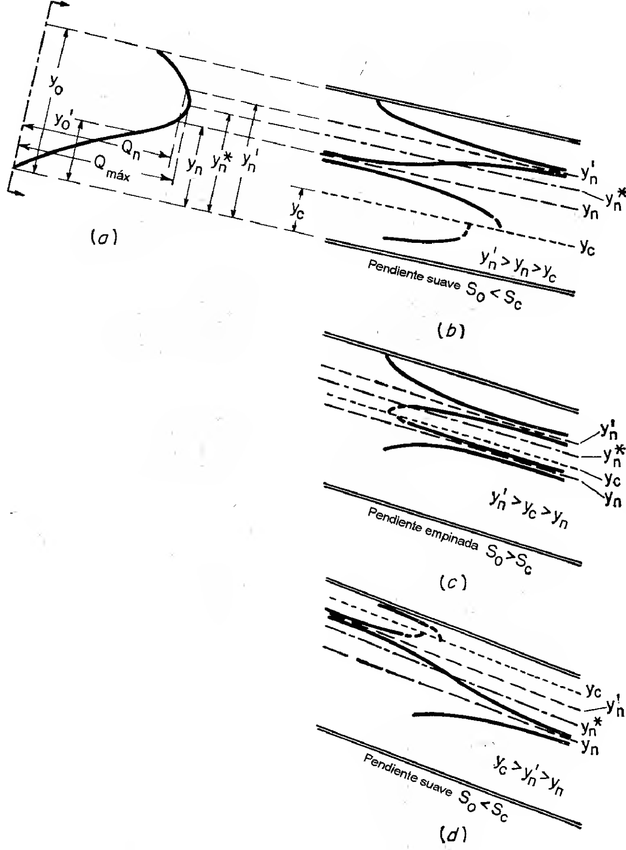


Figura 9-5. Perfiles de flujo en un conducto cerrado.

A. Canal prismático con pendiente constante. El perfil de flujo en un c
prismático largo con una pendiente constante se describió en la sección
Ejemplos comunes mostrados en la figura 9-4 deben ser útiles para determin
tipo de perfil de flujo en un problema determinado.

B. Canal prismático con un cambio en la pendiente. Este canal es equivale
un par de canales prismáticos conectados con la misma sección transversal perc
diferentes pendientes. En la figura 9-6 se muestran veinte perfiles de flujo común e
canal prismático largo con un quiebre en la pendiente. Estos perfiles son explicat
por sí mismos. Sin embargo, deben mencionarse algunos aspectos especiales:

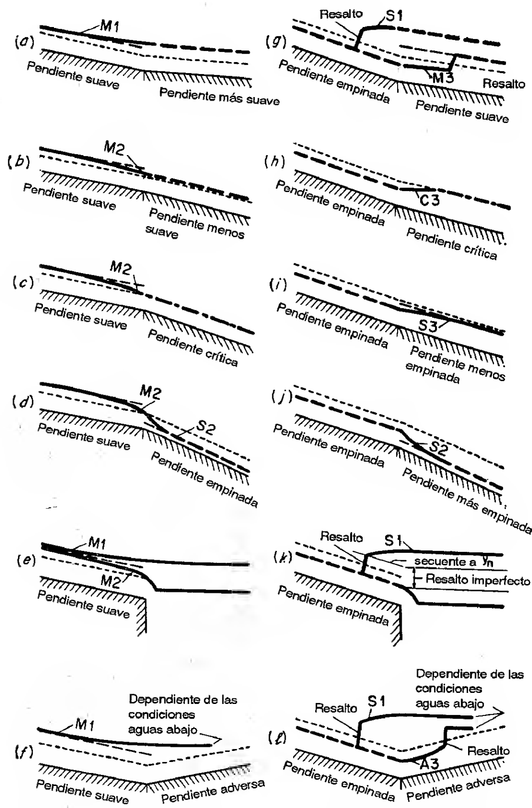


Figura 9-6. Perfiles de flujo gradualmente variado en un canal prismático largo con un quiebre en la pendiente de fondo.

1. El perfil en la profundidad crítica o cerca de ella no puede predecirse con precisión mediante la teoría de flujo gradualmente variado, debido a que por lo general el flujo es rápidamente variado.

2. En teoría, al pasar la línea crítica, el perfil de flujo debería tener una pendiente vertical. Como el flujo a menudo es rápidamente variado cuando pasa la línea crítica, la pendiente real del perfil no puede predecirse con precisión. Por la misma razón, la profundidad crítica no puede ocurrir exactamente encima del quiebre en el fondo del canal y puede ser diferente de la profundidad mostrada en la figura.

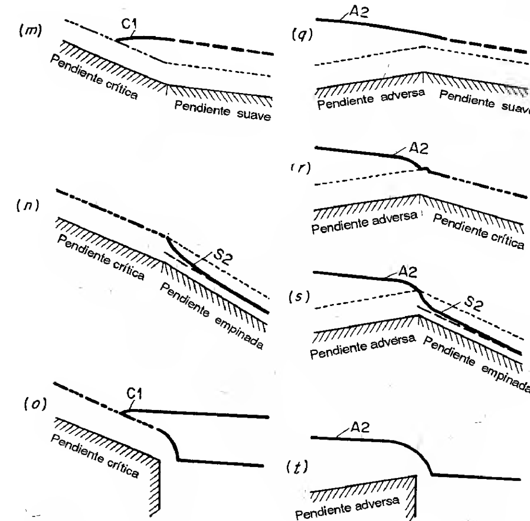


Figura 9-6. (*continuación*)

3. En algunos casos (figuras 9-6*g* y 9-6*l*), el resalto hidráulico puede ocurrir en el canal de aguas arriba o en el canal de aguas abajo dependiendo de la pendiente relativa de los dos canales[9]. En el caso *g*, por ejemplo, el resalto ocurrirá en el canal de aguas abajo si la profundidad normal en este canal es comparativamente pequeña. Cuando la pendiente del canal de aguas abajo decrece y, por consiguiente, la profundidad normal aumenta, el resalto se moverá aguas arriba hasta llegar al canal de aguas arriba. La localización exacta del resalto se estudiará en la sección 15-7.

4. Si el canal de aguas arriba tiene una pendiente adversa (figuras 9-6*q* a 9-6*t*), el caudal es fijado no por las condiciones del canal aguas arriba sino por la elevación del nivel del embalse aguas arriba, el cual es la asíntota horizontal del perfil *A*2. El

[9] También depende de la rugosidad relativa y de la forma de los dos canales que se conectan. En este análisis se supone que estos valores son constantes.

procedimiento de análisis es suponer un caudal y determinar cuál caso de q a t describe mejor el perfil. Entonces, calcular el perfil de flujo en la dirección aguas arriba y determinar el nivel del embalse. Si el nivel calculado no concuerda con el nivel determinado para el embalse, entonces repita el cálculo con otro caudal supuesto hasta que el nivel calculado concuerde con el nivel determinado.

5. Perfiles comunes (figura 9-6) se ilustran para canales largos en los cuales puede establecerse un flujo uniforme distante hacia aguas arriba y aguas abajo.

C. Canal prismático con varios cambios en la pendiente. Para tales canales el procedimiento de análisis general es como sigue:

1. Grafique el perfil del canal con una escala vertical exagerada.

2. Para cada tramo calcule y_n y grafique la línea de profundidad normal y muéstrela mediante líneas punteadas a lo largo de todo el canal.

3. Para cada tramo calcule y_c y grafique la línea de profundidad crítica y muéstrela mediante líneas punteadas a lo largo de todo el canal.

4. Localice todas las posibles secciones de control. En la sección de control[10] el flujo debe pasar a través de una profundidad de control que puede ser la profundidad crítica, la profundidad normal o cualquier otra profundidad conocida. Existen tres tipos de sección de control:

a. SECCIÓN DE CONTROL AGUAS ARRIBA. Ésta ocurre en cualquier tramo empinado en el extremo de aguas arriba, debido a que el flujo en un canal empinado tiene que pasar a través de la sección crítica en el extremo de aguas arriba y luego seguir en el perfil $S1$ o en el $S2$. Por consiguiente, la profundidad crítica es la profundidad de control (*véase* también la sección 4-5). Si la superficie del agua del lado aguas abajo es muy alta, ésta puede aumentar la superficie de flujo en la sección de control aguas arriba. Cuando varios tramos empinados ocurren en sucesión, la sección de control se localiza en el extremo de aguas arriba del tramo inicial. El control de aguas arriba también ocurre en tramos suaves y largos, debido a que las curvas $M1$ o $M2$ se aproximan a la profundidad normal en el extremo de aguas arriba.

b. SECCIÓN DE CONTROL AGUAS ABAJO. Ésta ocurre en el extremo de aguas abajo de cualquier tramo empinado largo, debido a que el flujo se aproximará a la profundidad normal en el extremo de aguas abajo. Si el extremo de aguas abajo de un canal suave termina en una caída libre, puede suponerse que la sección de control se localiza en el borde donde la profundidad es crítica[11].

c. SECCIÓN ARTIFICIAL DE CONTROL. Ésta ocurre en una estructura de control, como un vertedero, una presa o una compuerta deslizante, en la cual la profundidad de control es conocida o puede determinarse.

5. Empezando con la profundidad de control en cada sección de control trace en cada tramo un perfil continuo. La posición del perfil en cada tramo puede localizarse correctamente con respecto a las líneas de profundidad normal y de profundidad crítica. Para este propósito, los perfiles comunes descritos antes (sección 9-4) deberían ser útiles.

[10] El término "sección de control" utilizado aquí tiene un significado amplio. Se refiere a cualquier sección en la cual la profundidad de flujo es conocida o puede ser controlada en un nivel requerido.
[11] En realidad la profundidad crítica calculada se encuentra algo antes del borde (sección 3-4).

6. Cuando el flujo es supercrítico en la parte de aguas arriba de un tramo pero subcrítico en la parte de aguas abajo, el perfil de flujo tiene que pasar por la profundidad crítica en algún lugar dentro del tramo. Al cruzar la línea de profundidad crítica por lo general se crea un resalto hidráulico al subir el agua desde una profundidad baja hasta su profundidad secuente. La localización exacta del resalto se estudiará más adelante (sección 15-7).

Ejemplo 9-1. Se han calculado las profundidades normal y crítica en un canal, las cuales se muestran en la figura 9-7. Haga un esquema de los posibles perfiles de flujo.

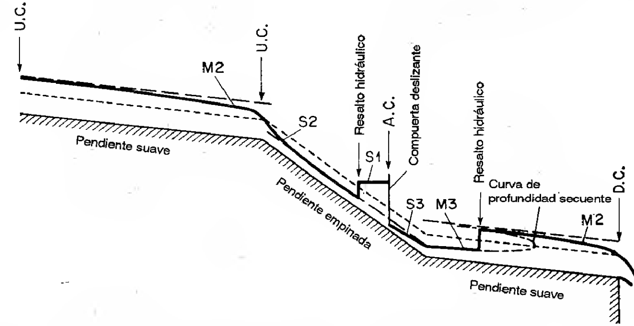


Figura 9-7. Análisis de perfil de flujo para el ejemplo 9-1. U.C. = control aguas arriba; D.C. = control aguar abajo; A.C. = control artificial.

Solución. Primero localice las posibles secciones de control, como las de control aguas arriba U.C.*, de control aguas abajo D.C., y de control artificial A.C. El control artificial en este ejemplo es una compuerta deslizante que represa el agua para formar un perfil $S1$ en el lado de aguas arriba. La formación de resaltos hidráulicos en los tramos medio y aguas abajo es aparente, pero la determinación de sus posiciones exactas requiere consideraciones adicionales. En el tramo más bajo, por ejemplo, los perfiles $M2$ y $M3$ deberían calcularse primero. Luego, calcule la curva que representa la profundidad secuente del perfil $M3$. La intersección de la curva de profundidad secuente y perfil $M2$ da una posición aproximada para el resalto. Un valor más exacto para la posición del resalto puede obtenerse al corregir la posición teniendo en cuenta la longitud del resalto. En la figura se esquematizan diferentes tipos de perfiles de flujo.

D. Canales no prismáticos y canales con flujo espacialmente variado. En canales no prismáticos y canales con flujo espacialmente variado, el análisis de flujo se vuelve complicado por el hecho de que la sección de control puede ocurrir en cualquier sección de canal y su posición no puede determinarse con facilidad. Considere tres pendientes de canal diferentes para tres tipos de flujo: 1) flujo continuo en un canal prismático (figura 9-8*a*), 2) flujo especialmente variado con

* *Nota del traductor.* En inglés, U. C. = *upstream control*; D. C. = *downstream control*; A. C. = *artificial control.* Se conserva esta notación ya que en español las iniciales son iguales para dos de los tres casos (aguas arriba, aguas abajo).

caudal que aumenta en un canal prismático (figura 9-8*b*), y 3) flujo continuo en un canal no prismático con una pendiente constante pero con sección transversal variable (figura 9-8*b*). Todos los canales tienen una caída libre.

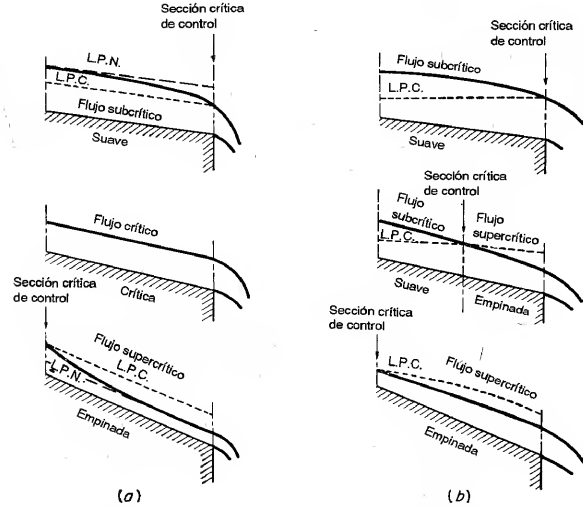


Figura 9-8. Localización de la sección crítica de control. (*a*) Flujo en un canal prismático (*b*) flujo en un canal no prismático o flujo espacialmente variado.

En el primer tipo de flujo, éste cambia de subcrítico a supercrítico a medida que la pendiente del canal varía de suave a empinada. Por consiguiente, la sección crítica de control debe transferirse del extremo de aguas abajo al extremo de aguas arriba. Nótese que la transferencia de la sección crítica de control ocurre casi instantáneamente. En el instante de la transición[12], el flujo crítico ocurre a través de toda la longitud del canal (esquema intermedio de la figura 9-8*a*), y cualquier sección en el tramo es, por consiguiente, una sección crítica.

En el segundo y en el tercer tipo de flujo la transición de estado de flujo ocurrirá gradualmente de sección a sección, a medida que la sección crítica de control se mueve hacia aguas arriba. En cualquier momento durante la transición (esquema intermedio de la figura 9-8*b*), el flujo hacia aguas abajo de la sección de control es supercrítico, y el flujo hacia aguas arriba es subcrítico. La determinación de la sección de control se describirá en la siguiente sección.

[12] En este momento la profundidad normal coincide con la profundidad crítica, convirtiéndose en una profundidad transicional (sección 9-6).

9-6. Método del punto singular. El análisis anterior de los perfiles de flujo se hizo primordialmente para canales prismáticos. Para un tratamiento completo de los perfiles de flujo, en canales prismáticos o no prismáticos con pendientes constantes o variables, se ha hecho uso de métodos de aproximación utilizando matemáticas avanzadas[13]. Una de estas aproximaciones es el uso de la teoría del punto singular. Esta teoría fue desarrollada por Poincaré [22] pero fue aplicada por primera vez a estudios de flujo en canales de pendiente variable por Massé [23]. El método basado en esta teoría ha sido discutido y ampliado por Jaeger [24], De Marchi [25], Hom-ma [26, 27], Escoffier [28], Iwasa [29], y otros.

Para propósitos de simplicidad en el análisis, sólo se consideran canales con pendientes pequeñas. Si se permite que el numerador y el denominador de la ecuación (9-15) se representen por dos funciones, o

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(Q/Q_n)^2}{1-(Q/Q_c)^2} = \frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} \quad \text{o} \quad \frac{F_1}{F_2} \tag{9-20}$$

Luego, si se hace cada una de estas funciones iguales a cero, o

$$F_1 = S_0\left[1-\left(\frac{Q}{Q_n}\right)^2\right] = 0 \tag{9-21}$$

y

$$F_2 = 1-\left(\frac{Q}{Q_c}\right)^2 = 0 \tag{9-22}$$

La solución de la ecuación (9-21), $F_1 = 0$, dará $Q = Q_n$ o $Y = Y_n$. Por consiguiente, $F_1 = 0$ representa la línea de profundidad normal en un canal prismático. En canales no prismáticos, $F_1 = 0$ da como resultado un perfil de flujo normal ficticio[14]. Éste es ficticio porque el flujo uniforme en canales no prismáticos es irreal.

De igual modo, la ecuación (9-22), $F_2 = 0$, representa el perfil de flujo crítico. Como Q_c es independiente de la pendiente del canal, el concepto de perfil de flujo crítico es válido en canales de pendiente variable.

En canales prismáticos, $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$ representan dos líneas paralelas. En canales no prismáticos, sin embargo, los dos perfiles pueden intersecarse, por ejemplo, en el punto P, (figura 9-9). En el punto P, la aplicación de la ecuación (9-20) da $dy/dx = 0/0$, que es una expresión indeterminada. En matemáticas este punto se conoce como *punto singular*.

Cuando $Q_n = Q_c$, $y_n = y_c$, la cual se conoce como *profundidad transicional*[15]. La curva que representa esta profundidad se conoce como *perfil transicional*. Un flujo que pasa a través de este perfil en el punto singular cambiará su estado de subcrítico a supercrítico, o viceversa. De hecho, el perfil transicional debe pasar por el punto singular, debido a que en este punto $Q_n = Q_c = Q$ o $y_n = y_c = y$. En otros sitios donde $Q_n = Q_c = Q$, la ecuación (9-20) da $dy/dx = S_0$; es decir, un perfil de flujo

[13] Véase otro método de análisis hecho por Merten [20, 21].
[14] Llamado por Massé [23] *flujo cuasi normal*.
[15] También conocida como *profundidad característica*, la cual fue aplicada por primera vez a canales uniformes por Mouret [12] y estudiada después por Lazard [30].

debe ser horizontal en el momento de cruzar el perfil transicional. Como el perfil transicional se define mediante la condición de que $Q_n = Q_c$, su posición se fija por las características del canal pero, a diferencia de los perfiles normal y crítico, es independiente del cambio en el caudal.

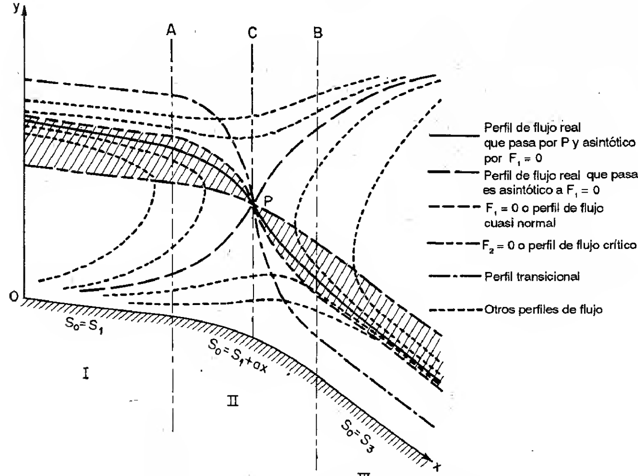


Figura 9-9. Estudio del perfil de flujo en un canal de pendiente variable.

En esta etapa del análisis debe tratar de verse con claridad las diferencias entre los perfiles transicional, normal y crítico.

En el punto singular, $y = y_c$; es decir, el perfil de flujo pasa a través de la profundidad crítica. Por consiguiente, existe aquí una sección crítica.

La pendiente de la superficie del agua en el punto singular es igual al valor limitante de la expresión indeterminada $dy/dx = ^0/_0$, si ésta es convergente. Mediante cálculo diferencial, puede evaluarse este valor límite mediante

$$\underset{\text{lím } x \to x_c}{\frac{dy}{dx}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \left(\frac{dF_1}{dF_2}\right)_c = \left(\frac{dF_1/dx}{dF_2/dx}\right)_c \qquad (9\text{-}23)$$

El análisis anterior puede ilustrarse mediante un ejemplo simple. Considere un canal rectangular ancho (figura 9-9) en el cual el flujo cambia de subcrítico a supercrítico de acuerdo con el cambio en pendiente desde una pendiente subcrítica S_1 en el tramo I a una pendiente supercrítica S_3 en el tramo III. La pendiente en el tramo intermedio II es variable y puede expresarse por $S_0 = S_1 + ax$, en la cual a es un coeficiente. En algún lugar del tramo II, en el cual $S_0 = S_c$, existe una sección crítica. Esta sección puede determinarse mediante la solución simultánea de $F_1 = 0$

y $F_2 = 0$. Gráficamente, esta sección se localiza en la intersección de las curv $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$. Puede demostrarse que la profundidad crítica es

$$y_c = \frac{g^3 n^6}{11\alpha^3 S_c^3} \qquad (9\text{-}2$$

Considerando un ancho unitario del canal, la pendiente crítica es constante través de la longitud del canal; por consiguiente, el perfil $F_2 = 0$ es equidistante des el fondo del canal. En el tramo I el flujo es subcrítico; por tanto, el perfil $F_1 = 0$ del localizarse por encima de $F_2 = 0$. En el tramo III el flujo es supercrítico y el per $F_1 = 0$ debe localizarse por debajo de $F_2 = 0$. El perfil de flujo bajo consideración muestra mediante la línea continua en el área sombreada entre $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$ en figura 9-9.

Como el perfil transicional se define mediante $Q_n = Q_c$, puede demostrar que esta ecuación es

$$y = \frac{g^3 n^6}{11\alpha^3 (S_1 + ax)^3} \qquad (9\text{-}2$$

En la sección crítica, donde $S_1 + ax = S_c$, la anterior ecuación se convierte la ecuación (9-24).

Para determinar la pendiente de la superficie del agua en el punto singular pa este ejemplo mediante la ecuación (9-23), puede obtenerse la siguiente ecuaci (utilizando la ecuación de Manning):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c^2 - \frac{10 S_0}{9}\left(\frac{dy}{dx}\right)_c - \frac{y_c}{3}\left(\frac{dS_0}{dx}\right)_c = 0 \qquad (9\text{-}2$$

Esta ecuación tiene dos raíces con signos opuestos. La raíz negativa definirá un perf de flujo que pasa por el punto singular P con una profundidad decreciente en dirección del flujo. Como el flujo en el presente problema cambia de subcrítico supercrítico, este perfil es en efecto el perfil del flujo bajo consideración. En $X = \pm$ este perfil es asintótico al perfil de flujo cuasi normal, o $F_1 = 0$. La otra raíz de ecuación (9-26) definirá un perfil de flujo que también pasa por P pero no asintótico a $F_1 = 0$. Otros perfiles, los cuales no pasan por P, intersecarán el perf transicional con una pendiente horizontal, pasa por $F_1 = 0$ con un resalto hidráuli y se vuelven asintóticos a los dos perfiles que pasan por P.

El perfil de flujo que pasa por P pero no es asintótico a $F_1 = 0$ no es el perf del flujo bajo consideración. Sin embargo, tal perfil de flujo puede convertirse realidad bajo otras circunstancias. En la figura 9-10, por ejemplo[16], P representa punto singular; APB es el perfil que pasa por P y es asintótico a $F_1 = 0$; CPD es perfil que pasa por P pero no es asintótico a $F_1 = 0$; y EFG y HI son otros perfil que no pasan por P. La compuerta de aguas arriba se ha ajustado para dar el perf supercrítico EFG, y la compuerta de aguas abajo para dar el perfil subcrítico HI. L

[16] Este ejemplo fue sugerido por F. F. Escoffier del U. S. Army Corps of Engineers. Para propósit de simplicidad, la curva para $F1 = 0$ no se muestra en la figura 9-10.

transición de uno a otro ocurre por intermedio del resalto hidráulico GH. La compuerta de aguas arriba se sube lentamente para hacer que el perfil EF se aproxime al CP como un límite. A medida que esto ocurre, el embalse se ajusta para mantener el caudal constante. Al mismo tiempo, la compuerta de aguas abajo se baja para hacer que el perfil HI se aproxime a PD como un límite. A medida que estas operaciones ocurren, se obliga a que el resalto GH se mueva hacia aguas arriba hasta que su altura se reduce a cero. De este modo el perfil CDP se realiza. Sin embargo, tal perfil es inestable debido a que cualquier pequeño imcremento en el perfil PD generará un cambio del perfil CP al perfil AP y el espacio entre los dos se llenará de agua.

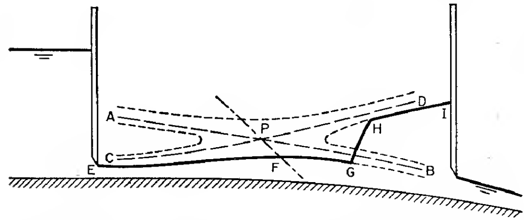


Figura 9-10. Ilustración de los perfiles de flujo definidos mediante un punto singular.

Una solución general de la condición $dy/dx = F_1/F_2 = 0/0$ para cualquier canal puede conseguirse matemáticamente mediante el método de puntos singulares [31]. El resultado producirá cuatro tipos de perfil de flujo que en teoría pueden desarrollarse alrededor del punto singular[17], y se conocen como tipo *silla de montar*, tipo *nodal*, tipo *espiral* y tipo *vórtice*, como se muestra en la figura 9-11, donde los perfiles se grafican con la ordenada Y que representa la distancia por encima de un nivel de referencia horizontal, y la abscisa X que representa la distancia a lo largo de ese mismo nivel de referencia.

Los posibles perfiles de flujo presentados en el ejemplo de la figura 9-9 son del tipo silla de montar. En este caso, el perfil de flujo que pasa por P y es asintótico a $F_1 = 0$ indica un flujo continuo que cambia de subcrítico a supercrítico en un canal con un lecho ligeramente convexo ($S_1 < S_c < S_3$).

En el tipo nodal, el perfil de flujo que pasa por P y es asintótico a $F_1 = 0$ indica un flujo continuo que cambia de supercrítico a subcrítico en un canal con un lecho ligeramente cóncavo ($S_1 > S_c > S_3$).

En el tipo espiral, el perfil de flujo que pasa por P y es asintótico a $F_1 = 0$ indica un flujo discontinuo[18] que cambia de supercrítico a subcrítico en un canal con un lecho ligeramente cóncavo ($S_1 > S_c > S_3$).

[17] Para estudios adicionales, *véanse* [23] y [28].
[18] Aquí el flujo normal aguas arriba cambia a flujo normal aguas abajo en una transición abrupta formada por un resalto hidráulico.

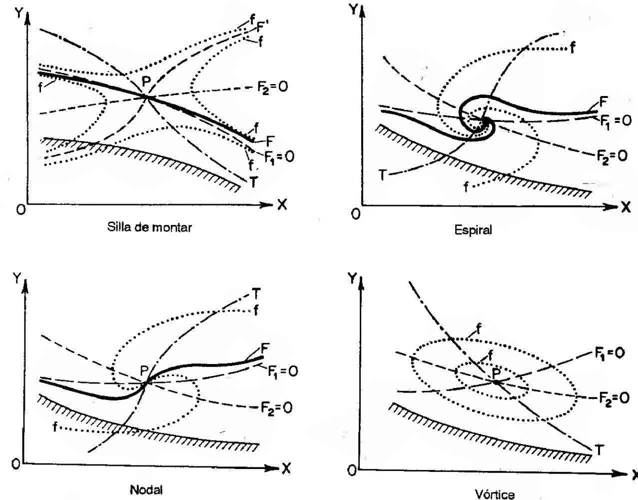


Figura 9-11. Perfiles de flujo alrededor de un punto singular. P = punto singular; F = perfil de flujo que pasa por P y es asintótico a $F_1 = 0$; F' = perfil de flujo que pasa por P pero no es asintótico a $F_1 = 0$; f = otros perfiles de flujo; F_1 = perfil de flujo cuasi normal; F_2 = perfil de flujo crítico; y T = perfil transicional.

En el tipo vórtice, el perfil de flujo que pasa porel punto singular, es este mismo punto y no tiene significado hidráulico. Escoffier [28] ha dado una solución general para el perfil transicional en los cuatro tipos.

9-7. Profundidad transicional. Algo adicional puede decirse acerca de la profundidad transicional[19], la cual se ha definido como la profundidad para la cual $Q_n = Q_c$, $y_n = y_c$ y la pendiente del perfil de flujo es horizontal, o $dy/dx = S_0$. Iguale el lado derecho de la ecuación (9-13) a S_0 y simplifique la ecuación; entonces

$$\frac{K_n}{K} = \frac{Z_c}{Z} \qquad (9\text{-}27)$$

Sean $K_n = Q/\sqrt{S_0}$, $K = 1.49AR^{2/3}/n$, $Z_c = Q/\sqrt{g}$ y $Z = A\sqrt{D}$. Entonces, la anterior ecuación se convierte en

$$2.22R^{4/3}S_0 = n^2gD \qquad (9\text{-}28)$$

Esta es una condición teórica para el establecimiento de la profundidad transicional. Indica que la profundidad transicional depende sólo de la geometría del canal, de la rugosidad y de la pendiente. Esta ecuación no contiene el caudal; por consiguiente, la profundidad transicional es independiente del caudal real.

[19] *Véanse* [12], [19], [28] a [30] y [32].

Es lógico decir que existe cierto caudal Q_t que ocurre con la profundidad transicional Y_t. Este caudal puede llamarse *caudal transicional.* De acuerdo con la definición de la profundidad transicional, el caudal transicional debería ser un caudal normal y al mismo tiempo un caudal crítico. Con referencia a la curva de pendiente crítica analizada en el ejemplo 6-5 (figuras 6-8 y 9-12), el caudal transicional puede representarse por un punto en la curva. Es evidente que en esta curva, para una pendiente S_0 determinada, la cual es mayor que la pendiente límite S_L, existen dos caudales críticos posibles, los cuales son Q_a y Q_b y a la vez son caudales transicionales. El caudal real se designa mediante Q y la pendiente crítica correspondiente mediante S_c.

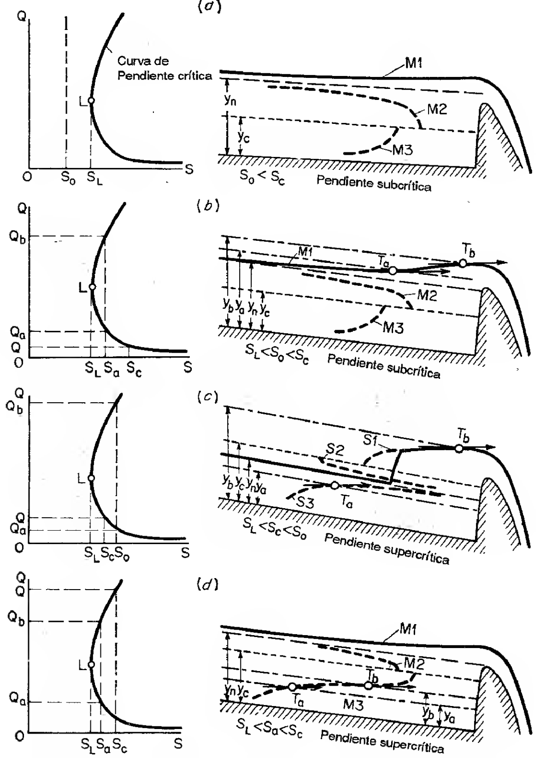


Figura 9-12. Perfiles de flujo explicados mediante una curva de pendiente crítica.

Para propósitos de análisis, tome el caso del remanso por detrás de una presa como ejemplo. Cuando $S_0 < S_L$ (figura 9-12*a*), en apariencia el flujo es siempre

subcrítico y el correspondiente perfil de remanso es de tipo $M1$. Cuando $S_0 > S_L$, la condición depende de la relación de S_0 a S_L, como sigue.

A. Cuando la pendiente es cercana a la pendiente límite. En este caso, la condición dependerá de la magnitud del caudal real Q con respecto a los caudales de transición mayores y menores Q_a y Q_b, respectivamente.

Si $Q < Q_a$ (figura 9-12*b*), entonces $S_0 < S_c$ y $y_c < y_n < y_a < y_b$. Como $S_0 < S_c$, el flujo es subcrítico y el perfil debería ser del tipo $M1$. Sin embargo, el perfil contendrá dos puntos T_a y T_b para los cuales la pendiente es horizontal. Entre estos dos puntos en apariencia existe un punto de inflexión. Las profundidades en los dos puntos son las profundidades transicionales y_a y y_b.

Si $Q_a < Q < Q_b$ (figura 9-12*c*), entonces $S_0 > S_c$ y $y_a < y_n < y_c < y_b$. Como $S_0 > S_c$, los perfiles y el flujo son de tipo S. Sin embargo, existe un punto T_b donde la pendiente es horizontal en el perfil $S1$ y un punto T_a donde la pendiente es horizontal en el perfil $S3$.

Si $Q_a < Q < Q_b$ (figura 9-12*d*) entonces $S_0 > S_c$ y $y_a < y_b < y_c < y_n$. Las profundidades transicionales intersecarán sólo el perfil $M3$, y el perfil de remanso será un perfil común tipo $M1$.

B. Cuando la pendiente está muy alejada de la pendiente límite. En este caso, Q_a y y_a son relativamente muy pequeños y su existencia es insignificante. Si $Q > Q_b$, el flujo será subcrítico y el perfil será del tipo $M1$. Si $Q < Q_b$, el flujo será supercrítico y el perfil será del tipo $S1$.

C. Cuando la pendiente es muy grande. En este caso, se considera que el caudal transicional Q_b es tan grande que excede el caudal máximo esperado (*véase* figura 6-8). Por tanto, el flujo es supercrítico y el perfil es del tipo $S1$. El punto más alto del perfil $S1$ se localiza muy cerca del extremo de aguas abajo.

El análisis anterior fue desarrollado para el caso en el cual el punto L de la pendiente límite se encuentra por debajo de la curva del caudal máximo esperado (figura 6-8*a*) y en el cual las secciones de canal son rectangulares, trapezoidales o de formas similares. Si el punto L se localiza por encima de la curva de máximo caudal esperado (figura 6-8*b*), la profundidad de flujo transicional será mayor que la profundidad máxima esperada y $y_b > y_m$, y el caudal transicional mayor será mayor que el caudal máximo esperado o $Q_b > Q_m$. Sin embargo, el análisis anterior permanece válido siempre y cuando el caudal real Q no exceda de Q_m. Si Q excede Q_m, el análisis no tiene sentido práctico. Del mismo modo, los perfiles de flujo permanecen iguales, pero la parte útil de los perfiles será aquélla para profundidades menores que Y_m.

PROBLEMAS

9-1. Demuestre que la pendiente de la superficie de agua S_w de un flujo gradualmente variado es igual a la suma de la pendiente de energía S y la pendiente debida al cambio de velocidad $d(\alpha V^2/2g)/dx$.

9-2. Demuestre que la ecuación de flujo gradualmente variado se reduce a la de flujo uniforme si $dy/dx = 0$.

9-3. Demuestre la ecuación (9-14).

9-4. Demuestre la ecuación (9-15).

9-5. Demuestre la ecuación (9-16).
9-6. Demuestre las ecuaciones (9-17) y (9-18).
9-7. Esquematice los posibles perfiles de flujo en los canales mostrados en la figura 9-13.

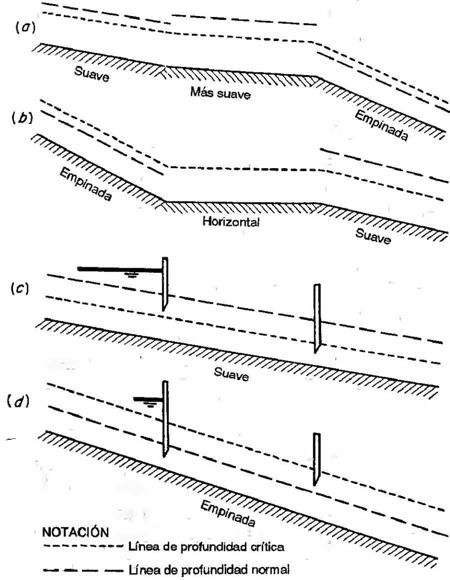


Figura 9-13. Canales del problema 9-7. La escala vertical está exagerada.

9-8. Un canal rectangular (figura 9-14) de 20 pies de ancho consta de tres tramos con pendientes diferentes. El canal tiene un coeficiente de rugosidad $n = 0.015$ y conduce un caudal de 500 pies³/s. Determine:

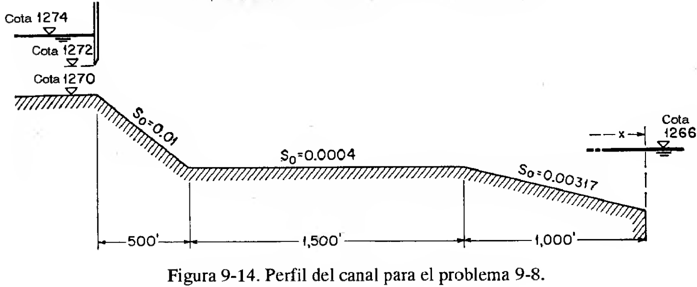


Figura 9-14. Perfil del canal para el problema 9-8.

a. Las profundidades normal y crítica en cada tramo.
b. Los posibles perfiles de flujo.
c. La distancia x desde el extremo de salida del canal hasta el punto donde termina la curva de remanso. Se supone que la curva de remanso es una línea horizontal.

9-9. Demuestre las ecuaciones (9-24) a (9-26).

9-10. En un canal rectangular ancho ocurre un cambio en la pendiente desde 0.0016 a 0.0064 (figura 9-9). La longitud de transición es 10 pies y la pendiente en el tramo de transición es $S_0 = 0.0016 + 0.00048x$, donde x es la distancia medida desde el inicio del cambio. El canal conduce un caudal de 100 pies³/s por unidad de ancho. Suponga que $\alpha = 1$ y $n = 0.02$.
a. Determine la sección de control.
b. Calcule la pendiente del perfil de flujo en la sección de control.
c. Construya los perfiles transicional, normal y crítico.
d. Construya el perfil real y varios perfiles de flujo adicionales.

9-11. Demuestre que la ecuación de flujo gradualmente variado para el flujo en un canal rectangular de ancho b variable puede expresarse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f + (\alpha Q^2 y/gA^3)(db/dx)}{1 - \alpha Q^2 b/gA^3} \qquad (9\text{-}29)$$

Toda la notación ha sido definida previamente.

REFERENCIAS

1. J. B. Bélanger, "Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes" ("Essay on the numerical solution of some problems relative to the steady flow of water"), Carilian-Goeury, Paris, 1828.
2. J. A. Ch. Bresse, *Cours de mécanique appliquée*, 2ª parte, "Hydraulique" (*Course in applied mechanics*, Parte 2, "Hydraulics"), Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
3. Boris A. Bakhmeteff, *Hydraulics of open channels*, apéndice I, "Historical and bibliographical notes", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932, pp. 299-301.
4. Charles Jaeger. "Steady flow in open channels: the problem of Boussinesq", *Journal*, Vols. 29-30, *Institution of Civil Engineers*, London, noviembre de 1947-octubre de 1948, pp. 338-348.
5. Charles Jaeger, *Engineering Fluid Mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1956, pp. 93-97.
6. F. Bettes, "Non-uniform flow in channels", *Civil Engineering and Public Works Review*, Vol. 52, Nº 609, London, marzo de 1957, pp. 323-324; Nº 610, abril de 1957, pp. 434-436.
7. J. Allen, "Streamline and turbulent flow in open channels", *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Ser. 7, Vol. 17, junio de 1934, pp. 1081-1112.
8. Hunter Rouse y Merit P. White, "Discussion on varied flow in open channels of adverse slope", por Arthur E. Matzke, *Transactions*, Vol. 102, *American Society of Civil Engineers*, 1937, pp. 671-676.
9. Sherman M. Woodward y Chesley J. Posey, *Hydraulics of steady flow in open channels*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941, p. 70.
10. Ivan M. Nelidov, "Discussion on surface curves for steady nonuniform flow", por Robert B. Jansen, *Transactions*, Vol. 17, American Society of Civil Engineers, 1952, pp. 1098-1102.
11. Dwight F. Gunder, "Profile curves for open-channel flow", *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 481-488.
12. G. Mouret, *Hydraulique: cours de mécanique appliquée* (*Hydraulics: course in applied mechanics*), L'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1922-1923, pp. 447-458; revisado como *Hydraulique générale* (*General hydraulics*), curso de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1927-1928.

13. A. Merten, "Recherches sur la forme des axes hydrauliques dans un lit prismatique" ("Studies on the form of flow profiles in a prismatic channel"), *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Gand*, Vol. 5, Ser. 3, Ghent, Belgium, 1906.
14. M. Boudin, "De l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique et des dispositifs réalisant, en pratique, ses formes diverses" ("The flow profiles of water in a prismatic channel and actual dispositions in various forms"), *Annales des travaux publiques de Belgique*, Vol. 20, Brussels, 1861-1862, pp. 397-555.
15. Pierre Koch, "Justification de l'étude rationnelle du remous dans les aqueducs de forme circulaire, ovoide ou analogue" ("Justification of the rational study of backwater in circular conduits of ovoid or similar shape"), *Annales des ponts et chaussées*, septiembre-octubre de 1933, pp. 153-202.
16. L. Gherardelli, "Sull'equazione del moto permanente in alvei prismatici" ("On the equation for steady flow in prismatic channels"), *L'Energia elettrica*, Vol. 28, Nº 4, Milano de abril de 1951, pp. 185-189.
17. Gianni Formica, "Nota sui profili di rigurgito delle correnti permanenti gradualmente variate defluenti in gallerie cilindriche" ("Note on backwater curves of gradually varied steady flow in cylindrical closed conduits"), *L'Energia elettrica*, Vol. 29, Nº 8, Milano, agosto de 1952, pp. 480-491; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 97*, p. 14.
18. R. Silber, "Sur la forme des courbes des remous en galerie couverte" ("On backwater curves in closed conduit"), extraído de *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 236, junio 22 de 1953, pp. 2377-2379.
19. R. Silber, *Étude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières* (*Study and outline of steady flow in open channels*), Dunod, Paris, 1954.
20. A. Merten, "Théorémes fondamentaux d'hydraulique fluviale" ("Fundamental theorems of fluvial hydraulics"), *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Gand*, Ser. 5, Vol. 5, Nº 2, Ghent, Belgium, 1912, pp. 206-210.
21. L. J. Tison, *Cours d'hydraulique* (*Hydraulics*), Parte II, Université de Gand, Ghent, Belgium, 1953, pp. 170-182.
22. H. Poineaté, "Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle" ("Memoir on the curves defined by a differential equation"), *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Vol. 7, Paris, 1881, pp. 375-422.
23. Pierre Massé, "Ressaut et ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable" ("Hydraulic jump and flow profile in channels of variable slope"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 4, Nº 19, Paris, 1938, enero, pp. 7-11, y Nº 20, abril, pp. 61-64.
24. Charles Jaeger, "Erweiterung der Boussinesqschen Theorie des Abflüsses in offenen Gerinnen und der Abflüsse über abgerundete Wehre" ("Extension of the Boussinesq theory of flow in open channels and over a round-crested weir"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 35, Nº 4, Munich, abril 15 de 1940, pp. 83-86.
25. Giulio De Marchi, "Sul cambiamento di regime di una correnti lineare a pelo lihero in un alvea di sezione costante" ("On the transition between supercritical and subcritical conditions in free-surface gradually varied flow in a cylindrical channel"), *L'Energia elettrica*, Vol. 27, Nº 3, Milano, marzo de 1950, pp. 125-132; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 82*, Milano, 1950.
26. Masashi Hom-ma, "General hydraulics" (en japonés), Vol. 1 de *Applied hydraulics*, editado por Masashi Hom-ma y Tojiro Ishihara, Maruzen, Tokyo, 1958, pp. 108-111.
27. Masahi Hom-ma y Sukeyuki Shima, "On the flow in a gradually diverged open channel", *The Japan Science Review*, Series I, Vol. 2, Nº 3, Tokyo, 1952, pp. 253-260.
28. Francis F. Escoffier, "Transition profiles in nonuniform channels", *Transactions*, Vol. 123, *American Society of Civil Engineers*, 1958, pp. 43-56.
29. Yoshiaki Iwasa, "Hydraulic significance of transitional behaviours of flows in channel transitions and controls", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. XX, Nº 4, Japan, octubre de 1958, pp. 237-276.

30. Achille Lazard, "Contribution à l'étude théorique du mouvement graduellement varié en hydraulique" ("Contribution to the theoretical study of gradually varied flow in hydraulics"), *Annales des ponts et chaussées*, Vol. 117, Nº 2, marzo-abril de 1947, pp. 185-219.
31. Theodore von Kármán y Maurice A. Biot, *Mathematical methods in engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940, pp. 150-158.
32. E. Crausse, *Hydraulique des canaux découverts en régime permanent* (*Hydraulics of open channels with steady flow regime*), Éditions Eyrolles, Paris, 1951.

CAPÍTULO 10

MÉTODOS DE CÁLCULO

El cálculo de los perfiles de flujo gradualmente variado involucra en esencia la solución de la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado. El principal objetivo del cálculo es determinar la forma del perfil de flujo. Clasificados de manera amplia, existen tres métodos de cálculo: método de integración gráfica, método de integración directa y método de paso. El desarrollo y el procedimiento de varios de los métodos comunes se describirán en este capítulo.

10-1. Método de integración gráfica Este método tiene como objetivo integrar la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado mediante un procedimiento gráfico. Considere dos secciones de canal (figura 10-1*a*) localizadas a unas distancias x_1 y x_2 respectivamente desde un origen escogido y con las profundidades de flujo y_1 y y_2 correspondientes. La distancia a lo largo del fondo del canal es

$$x = x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy}\, dy \quad (10\text{-}1)$$

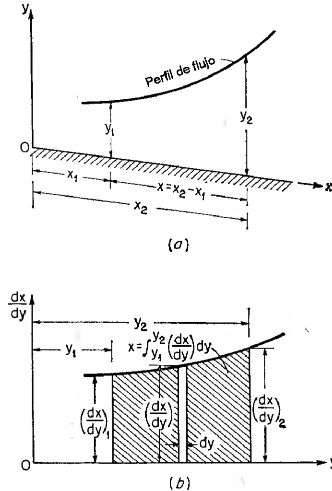


Figura 10-1. Principio del método de integración gráfica.

Suponga varios valores de y y calcule los valores correspondientes de dx/dy, el cual es el recíproco del lado derecho de la

ecuación de flujo gradualmente variado, es decir de la ecuación (9-13). Luego se construye una curva de y contra dx/dy (figura 10-1*b*). De acuerdo con la ecuación (10-1), es claro que el valor de x es el área sombreada formada por la curva, el eje y y las ordenadas de dx/dy correspondientes a y_1 y y_2. Luego puede medirse esta área y determinarse el valor de x.

Este método tiene una aplicación amplia. Se aplica al flujo en canales prismáticos y no prismáticos de cualquier forma y pendiente. El procedimiento es sencillo y fácil de seguir. Sin embargo, puede volverse muy complicado cuando se aplica a problemas reales. A continuación se da un ejemplo simple como ilustración.

Ejemplo 10-1. Un canal trapezoidal con $b = 20$ pies, $z = 2$, $S_0 = 0.0016$ y $n = 0.025$ conduce un caudal de 400 pies³/s Calcule el perfil del remanso creado por una presa que embalsa el agua hasta una profundidad de 5 pies inmediatamente detrás de la presa. Se supone que el extremo de aguas arriba del perfil es igual a una profundidad 1% mayor que la profundidad normal. El coeficiente de energía es $\alpha = 1.10$.

Solución. A partir de las soluciones de los ejemplos 4-2 y 6-2, las propiedades crítica y normal son $y_c = 2.22$ pies y $y_n = 3.36$ pies, respectivamente. Como y_n es mayor que y_c y el flujo empieza con una profundidad mayor que y_n, el perfil es de tipo *M*1. El factor de sección es $Z_c = 400/\sqrt{g/\alpha} = 74.0$ y la conductividad es $K_n = 400/\sqrt{0.0016} = 10{,}000$.

Para efectos de simplicidad, el fondo del canal en el sitio de la presa se escoge como el origen y el valor de x se toma como positivo en la dirección de aguas arriba. El cálculo de dx/dy mediante la ecuación (9-13) se da en la tabla 10-1 para varios valores de y variando desde 5 pies hasta 1% mayor que y_n o 3.40 pies. Por ejemplo, cuando $y = 5.00$ pies, los valores en las otras columnas de la tabla son

$$T = 40.00 \text{ pies}$$
$$A = 150.00 \text{ pies}^2$$
$$R = 3.54 \text{ pies}$$
$$R^{2/3} = 2.323$$
$$K = \frac{1.49AR^{2/3}}{n} = \frac{1.49 \times 150.00 \times 2.323}{0.025} = 20{,}800$$
$$Z = \sqrt{\frac{A^3}{T}} = \sqrt{\frac{150.00^3}{40.00}} = 290.2$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{S_0}\frac{1-(Z_c/Z)^2}{1-(K_n/K)^2} = \frac{1}{0.0016}\frac{1-(74.0/290.2)^2}{1-(10{,}000/20{,}800)^2} = 760$$

Luego se grafican los valores de y contra los valores correspondientes de dx/dy (figura 10-2). Los incrementos en área ΔA se miden con planímetro y se relacionan en la tabla. De acuerdo con la ecuación (10-1), los valores acumulados de ΔA deben dar la longitud x del perfil de flujo. Por último el perfil del remanso se obtiene al graficar y contra x (figura 10-3).

Nótese que cuando la profundidad de flujo se aproxima a la profundidad normal, el área incremental varía tanto con el cambio en el valor de y que se vuelve muy difícil de medir con el planímetro. En este caso el área puede calcularse suponiendo que es trapezoidal. Por ejemplo, el área incremental entre $y = 3.42$ y $y = 3.40$ es $\Delta A = (7{,}930 + 10{,}760)(3.42 - 3.40)/2 = 187$.

Tabla 10-1. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-1 mediante integración gráfica.
$Q = 400$ pies³/s $n = 0.025$ $S_0 = 0.0016$ $y_c = 2.22$ pies $y_n = 3.36$ pies $\alpha = 1.10$

y	T	A	R	$R^{2/3}$	K	Z	dx/dy	ΔA	x
5.00	40.00	150.00	3.54	2.323	20,800	290.2	760		
4.80	39.20	142.08	3.43	2.274	19,230	270.4	792	155	155
4.60	38.40	134.32	3.31	2.221	17,770	251.5	836	163	318
4.40	37.60	126.72	3.19	2.167	16,360	232.3	913	175	493
4.20	36.80	119.28	3.08	2.117	15,050	214.5	1,000	191	684
4.00	36.00	112.00	2.96	2.062	13,750	197.5	1,140	214	898
3.80	35.20	104.88	2.84	2.006	12,550	181.0	1,430	257	1,155
3.70	34.80	101.38	2.77	1.972	11,910	173.0	1,750	159	1,314
3.60	34.40	97.92	2.71	1.944	11,350	165.0	2,260	201	1,515
3.55	34.20	96.21	2.68	1.929	11,060	161.1	2,770	126	1,641
3.50	34.00	94.50	2.65	1.916	10,800	157.3	3,480	156	1,797
3.47	33.88	93.48	2.63	1.904	10,600	155.2	4,520	120	1,917
3.44	33.76	92.45	2.61	1.894	10,440	153.0	5,990	158	2,075
3.42	33.68	91.80	2.60	1.890	10,340	151.7	7,930	139	2,214
3.40	33.60	91.12	2.59	1.886	10,230	150.0	10,760	187	2,401
3.36	33.44	89.78	2.56	1.872	10,000	147.0			

10-2. Método de integración directa. La ecuación diferencial de flujo gradualmente variado no puede expresarse explícitamente en términos de y para todos los tipos de secciones transversales de canal; por consiguiente una integración directa y exacta de la ecuación es casi imposible. Se han hecho muchos intentos para resolver la ecuación para algunos casos especiales o para introducir suposiciones que hacen manejable la ecuación en términos de integración matemática. La tabla 10-2 relaciona muchos de los métodos de integración directa existentes, ordenados cronológicamente. A pesar de que la lista es incompleta, da una idea general del desarrollo del método de integración directa. Nótese que la mayor parte de los primeros métodos fueron desarrollados para canales con una sección transversal específica pero las soluciones posteriores, desde la de Bakhmeteff, fueron diseñadas para canales de todas las formas. La mayor parte de los primeros métodos utilizan la ecuación de Chézy, en tanto que los últimos métodos utilizan la ecuación de Manning.

En el método de Bakhmeteff [8] la longitud de canal bajo consideración se divide en tramos cortos. El cambio en la pendiente crítica dentro del rango pequeño de variación de la profundidad en cada tramo se supone constante[1] y la integración se lleva a cabo mediante pasos cortos con la ayuda de una función de flujo variado.

[1] La ecuación (9-14) se utiliza en el método de Bakhmeteff. Se supone que el coeficiente r en esta ecuación es constante dentro del tramo. Por consiguiente, puede demostrarse que la relación del cambio en la energía cinética con respecto a la pendiente de fricción, o r en la ecuación (9-14), se supone constante en cada tramo. Como un incremento o un descenso en la profundidad cambiará estos dos factores en la misma dirección, la relación es relativamente estable y puede suponerse constante para propósitos prácticos.

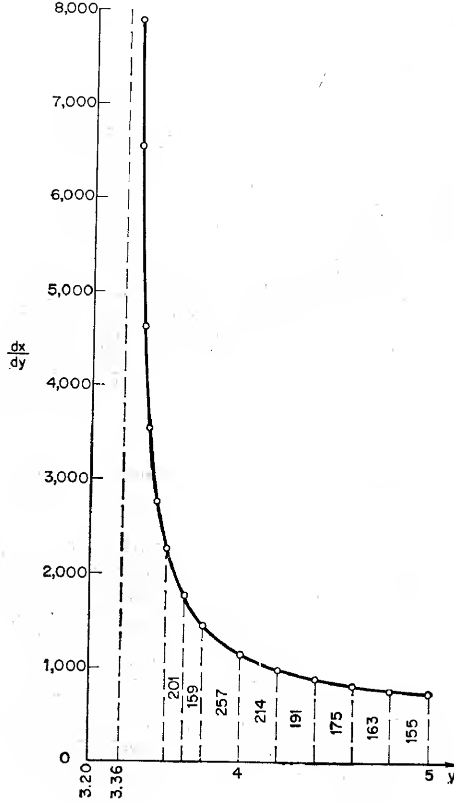


Figura 10-2. Una curva de y *versus* dx/dy

En un intento por mejorar el método de Bakhmeteff, Mononobe [13] introdujo dos suposiciones para los exponentes hidráulicos. Mediante estas suposiciones los efectos de cambio de velocidad y de altura de fricción se tienen en cuenta en su totalidad sin necesidad de dividir la longitud del canal en tramos pequeños. Luego, el método de Mononobe permite un cálculo más directo y preciso en el cual los resultados pueden obtenerse sin el recurso de pasos sucesivos. Al aplicar este método a problemas prácticos, la primera suposición (véase tabla 10-2) no es muy satisfactoria en muchos casos. Otra desventaja de este método puede existir en la dificultad de utilizar las tablas acompañantes, las cuales no son suficientemente exactas para propósitos prácticos.

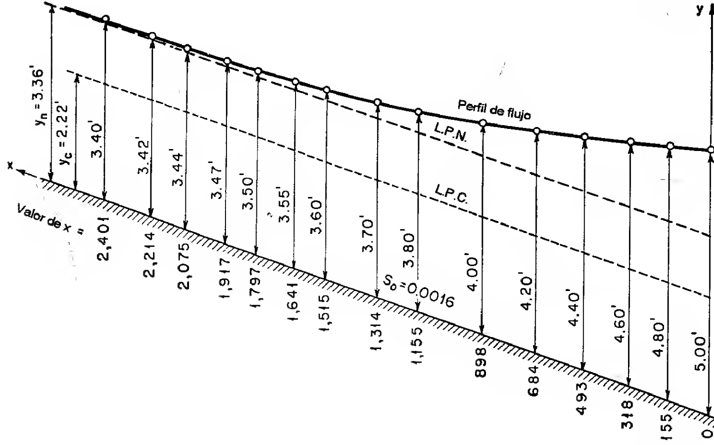


Figura 10-3. Un perfil *M*1 calculado mediante el método de integración gráfica.

Más tarde, Lee [14] y von Seggern [16] sugirieron nuevas suposiciones que arrojaron soluciones más satisfactorias. Von Seggern introdujo una nueva función de flujo variado en adición a la función utilizada por Bakhmeteff. Luego, en este método se necesita una tabla adicional para la nueva función. Sin embargo, en el método de Lee no se requiere una nueva función.

El método [18] descrito aquí es el resultado de un estudio sobre muchos de los métodos existentes. Mediante este método, los exponentes hidráulicos se expresan en términos de la profundidad de flujo. A partir de las ecuaciones (6-10) y (4-6), $K_n^2 = C_1 y_n^N$, $K^2 = C_1 y^N$, $Z_c^2 = C_2 y_c^M$ y $Z^2 = C_2 y^M$, donde C_1 y C_2 son coeficientes. Si estas expresiones se sustituyen en la ecuación (9-13), la ecuación de flujo gradualmente variado se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(y_n/y)^N}{1-(y_c/y)^M} \tag{10-2}$$

Sea $u = y/y_n$; la ecuación anterior puede expresarse para dx como

$$dx = \frac{y_n}{S_0}\left[1 - \frac{1}{1-u^N} + \left(\frac{y_c}{y_n}\right)^M \frac{u^{N-M}}{1-u^N}\right] du \tag{10-3}$$

Esta ecuación puede integrarse para la longitud x del perfil de flujo. Como el cambio de profundidad en un flujo gradualmente variado por lo general es pequeño, puede suponerse que los exponentes hidráulicos son constantes dentro del rango de los límites de integración. En un caso donde los exponentes hidráulicos sean notoriamente dependientes de y dentro de los límites de un tramo determinado, el tramo

Tabla 10-2. Métodos existentes para la integración de la ecuación de flujo gradualmente variado

Año de publicación	Investigador	Tipo de canal	Efecto del cambio en energía cinética	Ecuación de velocidad	Suposiciones para exponentes hidráulicos	Referencia
1848	Dupuit	Rectángulo ancho	Ignorado	Chézy	$N = 3, M = 3$	[1]
1860	Bresse	Rectángulo ancho	Considerado	Chézy	$N = 3, M = 3$	[2]
1875	Grashof	Rectángulo ancho	Considerado	Chézy	$N = 3, M = 3$	[3]
1880	Rühlmann	Rectángulo ancho	Ignorado	Chézy	$N = 4, M = 4$	[4]
1898	Tolkmitt	Parábola ancha	Considerado	Chézy	$N = 3, M = 3$	[5]
1900	Masoni	Rectángulo común	Considerado	Chézy	$K^2 \propto y^N$	[6]
1912 (1932)	Bakhmeteff	Todas las formas	Considerado por pasos	Chézy	$N = 3.5, M = 3$	[7, 8]
1914	Schaffernak-Ehrenberger	Rectángulo ancho	Ignorado	$Cy^{0.75}S^{0.5}$ 23.78$y^{0.776}S^{0.458}$ 22.11$y^{0.58}S^{0.43}$	$N = 3.552, M = 3$	[9]
1921	Baticle	Trapecio aprox.	Ignorado	Chézy	$K^2 = z^5 = A^2R_1$ donde z es una variable y dy/dz = const	[10]
1928	Kozeny	Rectángulo ancho	Considerado	$Cy^{0.7}S^{0.5}$	$N = 3.4, M = 3$	[11]
1930	Schoklisch	Rectángulo ancho	Ignorado	CR^mS^p	$N = 2 + 2m, M = 3$	[12]
1938	Mononobe	Todas las formas	Considerado	$CR^mS^{0.5}$	$P \propto y^{\text{const}}, A^2 \propto y^{\text{const}}$	[13]
1947	Lee	Todas las formas	Considerado	Manning	$K^2 \propto yN, A^2 \propto y^{\text{const}}$	[14, 15]
1950	Von Seggern	Todas las formas	Considerado	Manning	$K^2 \propto y^N, Z^2 \propto y^M$	[16]
1954	Keifer-Chu	Circular, pero el método puede extenderse a otras formas	Considerado	Manning	Ninguna	[17]

debe ser subdividido para la integración; luego, los exponentes hidráulicos en cada tramo subdividido pueden suponerse constantes. Al integrar la ecuación (10-3),

$$x = \frac{y_n}{S_0}\left[u - \int_0^u \frac{du}{1-u^N} + \left(\frac{y_c}{y_n}\right)^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N}\, du\right] + \text{const.} \tag{10-4}$$

La primera integral del lado derecho de la ecuación anterior se designa mediante $F(u,N)$, o

$$F(u,N) = \int_0^u \frac{du}{1-u^N} \tag{10-5}$$

la cual se conoce como *función de flujo variado*.

La segunda integral de la ecuación (10-4) también puede expresarse en la forma de la función de flujo variado. Sea $v = u^{N/J}$ y $J = N/(N - M + 1)$; esta integral puede transformarse en

$$\int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N}\,du = \frac{J}{N}\int_0^v \frac{dv}{1-v^J} = \frac{J}{N}F(v,J) \tag{10-6}$$

donde

$$F(v,J) = \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} \tag{10-7}$$

Ésta es una función de flujo variado parecida a $F(u,N)$, excepto que las variables u y N se remplazan por v y J, respectivamente[2].

Utilizando la notación para funciones de flujo variado, la ecuación (10-4) puede escribirse como

$$x = \frac{y_n}{S_0}\left[u - F(u,N) + \left(\frac{y_c}{y_n}\right)^M \frac{J}{N}F(v,J)\right] + \text{const.} \tag{10-8}$$

o

$$x = A[u - F(u,N) + BF(v,J)] + \text{const.} \tag{10-9}$$

donde

$$A = \frac{y_n}{S_0}, \quad B = \left(\frac{y_c}{y_n}\right)^M \frac{J}{N}, \quad u = \frac{y}{y_n}, \quad v = u^{N/J}, \quad J = \frac{N}{N-M+1}$$

y donde $F(u,N)$ y $F(v,J)$ son funciones de flujo variado.

Mediante la ecuación (10-9), la longitud del perfil del flujo entre dos secciones consecutivas 1 y 2 es igual a

$$\begin{aligned} L &= x_2 - x_1 \\ &= A\{(u_2 - u_1) - [F(u_2,N) - F(u_1,N)] + B[F(v_2,J) - F(v_1,J)]\} \end{aligned} \tag{10-10}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las secciones 1 y 2, respectivamente.

La ecuación (10-10) contiene funciones de flujo variado y su solución puede simplificarse mediante la *tabla de funciones de flujo variado*, la cual se da en el apéndice D[3]. Esta tabla da los valores $F(u,N)$ para N, que varía de 2.2 a 9.8. Al

[2] Esta transformación también fue llevada a cabo de manera independiente por Levi [19].

[3] La preparación de esta tabla fue llevada a cabo por primera vez durante 1914-1915 por el Research Board del entonces Russian Reclamation Service, bajo la dirección de Boris A. Bakhmeteff, entonces profesor de hidráulica general y avanzada en el Instituto Politécnico Emperador Pedro el Grande, en San Petersburgo, Rusia. Se dice que el trabajo involucró un procedimiento largo y tedioso [8]. En la conmoción generada durante la Revolución Rusa en 1917, la tabla así calculada dejó de estar disponible; más tarde la tarea de calcularla de nuevo fue hecha por el profesor Kholodovsky y parcialmente por el profesor Pestrečov. Esta tabla era más precisa y conpleta, y cubría un rango de N desde 2.8 hasta 5.4. Fue publicada en 1932 [8] cuando Bakhmeteff se convirtió en profesor de ingeniería civil en la Columbia University. Entre tanto, en la URSS en 1928, la tabla anterior, copiada a mano alzada, se publicó en una segunda edición de [7] con valores de N iguales a 2.0, 2.5, 3.0, 3.25, 3.5, 3.75, 4.0, 4.5, 5.0 y 5.5. Los métodos para el cálculo de la tabla para la función del flujo variado se explican en las páginas 303-305 del libro de Bakhmeteff [8]. En ese libro hay un error de impresión; es decir, debe colocarse un signo negativo al frente de todo el elemento del lado derecho de la ecuación impresa cerca del final de la página 305. La tabla D-1 dada en el apéndice D es una extensión de la tabla de Bakhmeteff a casi el triple de su tamaño original. El autor la preparó en 1952-1954 para propósitos de enseñanza en la Universidad de Illinois y se publicó en 1955 [18].

remplazar los valores de u y N por los valores correspondientes de v y J, esta tabla también da los valores de $F(v, J)$.

Cuando se calcula un perfil de flujo, primero se analiza el flujo en el canal (sección 9-5) y luego se divide el canal en cierto número de tramos. Después se calcula la longitud de cada tramo mediante la ecuación (10-10) a partir de profundidades conocidas o supuestas en los extremos del tramo. El procedimiento del cálculo es como sigue:

1. Calcule la profundidad normal y_n y la profundidad crítica y_c a partir de los datos Q y S_0 (*véanse* secciones 6-6 y 4-4).
2. Determine los exponentes hidráulicos N y M para una profundidad de flujo promedio estimada en cada tramo bajo consideración (*véanse* secciones 6-3 y 4-3). Se supone que la sección de canal bajo consideración tiene exponentes hidráulicos casi constantes.
3. Calcule J a partir de $J = N/(N - M + 1)$.
4. Calcule los valores de $u = y/y_n$ y $v = u^{N/J}$ *en las dos secciones extremas de cada tramo.*
5. A partir de la función de flujo variado dada en la tabla del apéndice D, encuentre los valores de $F(u,N)$ y $F(v, J)$.
6. Calcule la longitud del tramo a partir de la ecuación (10-10).

El procedimiento anterior se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 10-2. Con referencia al canal descrito en el ejemplo 10-1, calcule la longitud de la urna de remanso que se extiende desde el sitio de presa hasta una sección aguas arriba donde la profundidad de flujo es 1% mayor que la profundidad normal.

Solución. Los datos dados son Q = 400 pies³/s, b = 20 pies, z = 2, S_0 = 0.0016, α = 1.10 y n = 0.025.

1. A partir del ejemplo 6-2, y_n = 3.36 pies. A partir del ejemplo 4-2 con α = 1.10, y_c = 2.22 pies.

2. La profundidad en el extremo de aguas abajo del perfil de remanso es y_2 = 5 pies. En el extremo de aguas arriba la profundidad es $y_1 = 1.01 \times 3.36 = 3.40$ pies. La profundidad promedio puede tomarse como 4.20 pies y y/b = 0.21. A partir de las figuras 6-2 y 4-2, los exponentes hidráulicos correspondientes son N = 3.65 y M = 3.43.

3. El valor de J = 3.65/(3.65 − 3.43 + 1) = 2.99.

4. Para cada sección se calculan los valores de u y v, como se da en las columnas 2 y 3 de la siguiente tabla:

y	u	v	$F(u,N)$	$F(v,J)$
5.00	1.488	1.625	0.148	0.213
3.40	1.012	1.015	1.025	1.293
Dif....	0.476	...	−0.877	−1.080

5. Las funciones de flujo variado $F(u,N)$ y $F(v,J)$ se obtienen de la tabla del apéndice D y se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla anterior.

6. En la ecuación (10-9), $A = y_n/S_0 = 2{,}100$ y $B = (y_c/y_n)^M J/N = 0.197$. Por consiguiente, la longitud del perfil de remanso es

$$L = 2{,}100[0.476 - (-0.877) + 0.197 \times (-1.080)] = 2{,}395 \text{ pies}$$

Ejemplo 10-3. El agua fluye por debajo de una compuerta deslizante hacia un canal trapezoidal con $b = 20$ pies, $z = 2$, $S_0 = 0.0036$, $\alpha = 1.10$ y $n = 0.025$. La compuerta deslizante se regula para descargar 400 pies³/s con una profundidad igual a 0.55 pies en la vena contracta. Calcule el perfil de flujo. Si en el extremo de aguas abajo ocurre un resalto hidráulico, que inicia con una profundidad de 1.6 pies, determine la distancia desde la vena contracta hasta el pie del resalto.

Solución. A partir de los datos dados, $y_n = 2.67$ pies y $y_c = 2.22$ pies. Como $y_n > y_c$, la pendiente del canal es suave. Como la profundidad del flujo que sale de la compuerta deslizante es menor que la profundidad crítica, el perfil de flujo es del tipo $M3$.

Al considerar una profundidad promedio de 1.61 pies, los exponentes hidráulicos son $N = 3.43$ y $M = 3.17$. Luego, $J = 2.72$, $N/J = 1.26$ y $(y_c/y_n)^M J/N = 0.442$.

La tabla 10-3 muestra el cálculo del perfil de flujo. Por conveniencia en la interpolación de los valores de $F(u,N)$ de la tabla de función de flujo variado, los valores de u se asignan a intervalos regulares. Los valores de x por consiguiente se calculan mediante la ecuación (10-8), en la cual se supone que la constante es igual a cero. La última columna da la longitud del perfil medida desde la sección bajo consideración hasta el extremo de aguas abajo, donde en teoría el perfil termina en la profundidad crítica.

Tabla 10-3. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-3 mediante el método de integración directa

$Q = 400$ pies³/s $n = 0.025$ $S_0 = 0.0036$ $\alpha = 1.10$ $y_c = 2.22$ pies $y_n = 2.67$ pies

y	u	v	$F(u,N)$	$F(v,J)$	x	L
2.22	0.831	0.792	0.979	0.962	206	0
2.14	0.800	0.755	0.917	0.888	204	2
1.87	0.700	0.638	0.756	0.699	188	18
1.60	0.600	0.525	0.627	0.552	161	45
1.33	0.500	0.420	0.511	0.431	134	72
1.07	0.400	0.315	0.404	0.319	102	104
0.80	0.300	0.219	0.301	0.219	71	135
0.53	0.200	0.132	0.200	0.132	43	163
0.27	0.100	0.055	0.100	0.055	18	188
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0	206

En la figura 10-4 se muestra el perfil de flujo calculado. El perfil real entre la apertura de la compuerta deslizante y el perfil calculado es incierto y por consiguiente se ajusta al ojo. La distancia desde la apertura de la compuerta hasta la sección de la vena contracta se conoce como *distancia de contracción*. Para una compuerta deslizante con borde delgado se supone que esta distancia es igual a casi la altura de la apertura de la compuerta (sección 15-7). Si un resalto hidráulico empieza a una profundidad de 1.6 pies, la distancia desde el resalto hasta la vena contracta sería de alrededor de 130 pies, tal como se muestra.

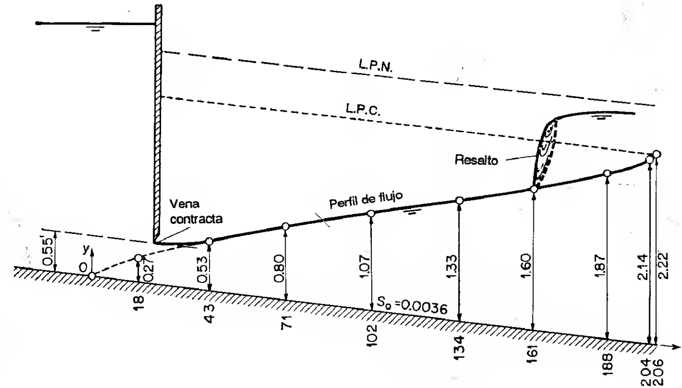


Figura 10-4. Un perfil $M3$ calculado mediante el método de integración directa.

Ejemplo 10-4. Determine el perfil de flujo en un canal rectangular ancho, utilizando la ecuación de Chézy.

Solución. Para un canal rectangular ancho, la figura 4-2 da $M = 3$ y la ecuación (6-49) da $N = 3$. Por consiguiente, $J = 3$, $v = u$ y la ecuación (10-8) se convierte en

$$x = \frac{y_n}{S_0}\left[u - \left(1 - \frac{y_c^3}{y_n^3}\right)F(u,3)\right] + \text{const.} \tag{10-11}$$

donde $F(u,3)$ puede calcularse de la tabla para la función de flujo variado del apéndice D. Matemáticamente, $F(u,3)$ es integrable, o

$$F(u,3) = \int_0^u \frac{du}{1-u^3} = \tfrac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cot^{-1}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \tag{10-12}$$

Esta integración fue llevada a cabo por primera vez por Bresse [2]. La determinación de un perfil de flujo utilizando esta solución, por consiguiente, es ampliamente conocida como *método de Bresse*.

Las profundidades crítica y normal en un canal rectangular ancho pueden expresarse, respectivamente, por

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \tag{10-13}$$

y

$$y_n = \sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2 S_0}} \tag{10-14}$$

donde q es el caudal por unidad de ancho del canal. Luego,

$$\frac{y_c^3}{y_n^3} = \frac{C^2 S_0}{g} \tag{10-15}$$

Al sustituir esta expresión para y_c^3/y_n^3, la ecuación (10-11) también puede escribirse como

$$x = \frac{y_n}{S_0}\left[u - \left(1 - \frac{C^2 S_0}{g}\right) F(u,3)\right] + \text{const.} \tag{10-16}$$

o

$$x = A[u - BF(u,3)] + \text{const.} \tag{10-17}$$

donde $A = y_n/S_0$ y $B = 1 - C^2S_0/g$.

La longitud del perfil de flujo entre dos secciones consecutivas con profundidades y_1 y y_2 es

$$L = A\{(u_2 - u_1) - B[F(u_2,3) - F(u_1,3)]\} \tag{10-18}$$

Ejemplo 10-5. Resuelva el ejemplo 10-2 utilizando el método de Bresse.

Solución. El método de Bresse se dedujo primordialmente para un canal rectangular de ancho infinito. Cuando este método se aplica a canales con otras formas de sección transversal la solución es muy aproximada.

Como la profundidad de flujo varía de 5.00 pies a 3.40 pies, puede suponerse un valor promedio de $y = 4.20$ pies para la evaluación del C de Chézy. Para un canal rectangular ancho, la ecuación (5-7) da $C = 75.6$. Como $y_n = 3.36$ pies y $S_0 = 0.0016$, $A = 2{,}100$ y $B = 3.40$, la ecuación (10-17) da

$$x = 2{,}100[u - 0.715F(u,3)] + \text{const.} \tag{10-19}$$

Al suponer que en la ecuación (10-19) la constante es igual a cero, el cálculo de x es como sigue:

y	u	$F(u,3)$	x
5.00	1.488	0.260	2,720
3.40	1.012	1.360	80

Por consiguiente, la longitud de la curva de remanso es igual a 2,720 – 80 = 2,640 pies, alrededor del 10% mayor que los valores determinados por los métodos previos.

Canales con pendientes desfavorables. Cuando el procedimiento anterior se aplica a canales de pendientes adversas, la pendiente del fondo del canal puede tomarse como negativa. Luego la ecuación (9-3) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-S_0 - S}{1 + \alpha\, d(V^2/2g)/dy} \tag{10-20}$$

La ecuación correspondiente para el perfil de flujo es

$$x = -\frac{y_n}{S_0}\left[u - \int_0^u \frac{du}{1+u^N} - \left(\frac{y_c}{y_n}\right)^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1+u^N}\,du\right] + \text{const.} \tag{10-21}$$

donde u es la relación de y con respecto al valor absoluto de y_n y las funciones de flujo variado para pendientes adversas son

$$F(u,N)_{-S_0} = \int_0^u \frac{du}{1+u^N} \tag{10-22}$$

y

$$F(v,J)_{-S_0} = \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1+u^N}\,du = \frac{J}{N}\int_0^v \frac{dv}{1+v^J} \tag{10-23}$$

donde $v = u^{N/J}$ y $J = N/(N - M + 1)$. Para evaluar estas funciones se ha preparado una tabla [18][4], la cual es la tabla D2 del apéndice D. De acuerdo con esto, la longitud del perfil de flujo entre dos secciones 1 y 2 puede expresarse mediante la ecuación (10-10), donde $A = -y_n/S_0$, $B = -(y_c/y_n)^M J/N$ y las funciones de flujo variado se remplazan por aquéllas correspondientes a pendientes adversas.

Ejemplo 10-6. Deduzca una expresión para el perfil de flujo en un canal horizontal.

Solución. Para canales horizontales, $S_0 = 0$, y la ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(Q/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} \tag{9-19}$$

Debido a que la pendiente crítica S_c se define como la pendiente que producirá un caudal Q con una profundidad normal igual a la profundidad crítica y_c (sección 6-7), el caudal puede expresarse como

$$Q = K_c\sqrt{S_c} \tag{10-24}$$

Al sustituir la ecuación (10-24) en la ecuación (9-19) y al hacer que $(K_c/K)^2 = (y_c/y)^N$, $(Z_c/Z)^2 = (y_c/y)^M$ y $p = y/y_c$,

$$\frac{dy}{dx} = S_c\frac{p^{M-N}}{1 - p^M} \tag{10-25}$$

Al integrar y al resolver para x,

$$x = \frac{y_c}{S_c}\left(\frac{p^{N-M+1}}{N-M+1} - \frac{p^{N+1}}{N+1}\right) + \text{const.} \tag{10-26}$$

Esta ecuación puede utilizarse para el cálculo de la longitud del perfil de flujo en un canal horizontal.

Canales con exponentes hidráulicos variables. Nótese que la suposición de exponentes hidráulicos constantes utilizada en el análisis anterior es satisfactoria en la mayor parte de los canales rectangulares y trapezoidales. Tal como se escribió en las secciones 4-3 y 6-3, los exponentes hidráulicos pueden variar de manera apreciable con respecto a la profundidad de flujo cuando la sección de canal tiene cambios abruptos en su geometría o tiene una clave que se cierra gradualmente. En tales casos la longitud del canal debe dividirse en cierto número de tramos para cada uno de los cuales los exponentes hidráulicos sean prácticamente constantes.

Con referencia a la figura 10-5, se supone que los exponentes hidráulicos en el rango de profundidad de y_1 a y_2 en un tramo son constantes. Sea N_n el valor N correspondiente a la profundidad normal y_n; sea N el promedio del valor de N para el rango de y_1 a y_2; sea M_c el valor de M correspondiente a la profundidad crítica y_c y sea M el promedio de los valores de M para el rango de y_1 a y_2. Luego la ecuación (9-13) puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = S_0\frac{1 - y_n^{N_n}/y^N}{1 - y_c^{M_c}/y^M} \tag{10-27}$$

[4] Algunas tablas de funciones de flujo variado para pendientes adversas con rangos limitados del exponente hidráulico N han sido preparadas por Matzke [20] y otros [21].

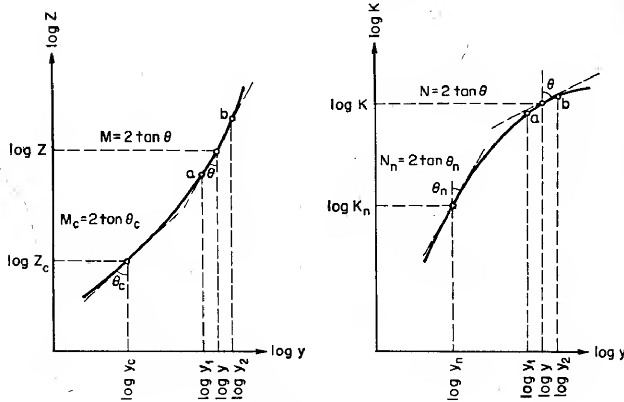


Figura 10-5. Gráficas logarítmicas de profundidad contra Z y M, respectivamente, para exponentes hidráulicos variables.

Sea $u = y/y_n^{N_n/N}$ y, por consiguiente, $dy = y_n^{N_n/N}du$. Luego la ecuación (10-27) puede reducirse a

$$dx = \frac{y_n^{N_n/N}}{S_0}\left[1 - \frac{1}{1-u^N} + \left(\frac{y_c^{M_c/M}}{y_n^{N_n/N}}\right)^M \frac{u^{N-M}}{1-u^N}\right] du \qquad (10\text{-}28)$$

Al seguir un procedimiento de integración y transformación similar al aplicado en la solución de la ecuación (10-3),

$$x = \frac{y_n^{N_n/N}}{S_0}\left[u - F(u,N) + \left(\frac{y_c^{M_c/M}}{y_n^{N_n/N}}\right)^M \frac{J}{N} F(v,J)\right] + \text{const.} \qquad (10\text{-}29)$$

donde $u = y/y_n^{N_n/N}$, $v = u^{N/J}$, $J = N/((N - M + 1)$ y $F(u,N)$ y $F(v, J)$ son funciones de flujo variado. Si los exponentes hidráulicos son constantes, $N_n = N$ y $M_c = M$, obviamente la ecuación (10-29) se convierte en la ecuación (10-8).

La longitud del perfil entre dos secciones consecutivas con profundidades y_1 y y_2 puede calcularse mediante la ecuación (10-10) excepto donde $A = y_n^{N_n/N}/S_0$ y $B = (y_c^{M_c/M}/y_n^{N_n/N})^M J/N$.

Canales con claves que se cierran gradualmente. Para canales con claves que se cierran gradualmente, los exponentes hidráulicos son variables cerca de la clave y el método propuesto antes puede utilizarse. Para unos resultados más acertados, sin embargo, la integración de la ecuación dinámica puede llevarse a cabo mediante un procedimiento de integración numérica. Keifer y Chu [17] han aplicado un procedimiento como éste a conductos circulares.

Sea Q_0 el caudal en un conducto circular, que fluye lleno con una profundidad igual al diámetro d_0 del conducto y que tiene un gradiente de energía igual a la pendiente del fondo S_0, y sea K_0 la conductividad correspondiente. Luego,

$$Q_0 = K_0\sqrt{S_0} \qquad (10\text{-}30)$$

Para un flujo uniforme en el conducto circular con un caudal igual a Q del flujo real, la ecuación (9-11) da

$$Q = K_n\sqrt{S_0} \qquad (10\text{-}31)$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores puede desarrollarse lo siguiente:

$$\left(\frac{K_n}{K}\right)^2 = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^2\left(\frac{K_0}{K}\right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2\left(\frac{K_0}{K}\right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 f_1\left(\frac{y}{d_0}\right) \qquad (10\text{-}32)$$

donde evidentemente $(K_0/K)^2$ es una función de y/d_0 y, por consiguiente, puede representarse mediante $f_1(y/d_0)$.

A partir de las ecuaciones (9-4) y (9-7) puede esribirse lo siguiente:

$$\left(\frac{Z_c}{Z}\right)^2 = \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} = \frac{\alpha Q^2}{d_0^5}\frac{T/d_0}{g(A/d_0^2)^3} = \frac{\alpha Q^2}{d_0^5} f_2\left(\frac{y}{d_0}\right) \qquad (10\text{-}33)$$

donde $(T/d_0)/g(A/d_0^2)^3$ es obviamente una función de y/d_0 y, por consiguiente, puede representarse mediante $f_2(y/d_0)$.

Al sustituir las ecuaciones (10-32) y (10-33) en la ecuación (9-13) y al simplificar,

$$dx = \frac{d_0}{S_0}\left[\frac{1 - (\alpha Q^2/d_0^5)f_2(y/d_0)}{1 - (Q/Q_0)^2 f_1(y/d_0)}\right] d\left(\frac{y}{d_0}\right) \qquad (10\text{-}34)$$

Al integrar,

$$x = \frac{d_0}{S_0}\left[\int_0^{y/d_0}\frac{d(y/d_0)}{1 - (Q/Q_0)^2 f_1(y/d_0)} - \frac{\alpha Q^2}{d_0^5}\int_0^{y/d_0}\frac{f_2(y/d_0)\, d(y/d_0)}{1 - (Q/Q_0)^2 f_1(y/d_0)}\right] + \text{const.} \qquad (10\text{-}35)$$

o

$$x = -\frac{d_0}{S_0}\left(X - \frac{\alpha Q^2}{d_0^5}Y\right) + \text{const} \qquad (10\text{-}36)$$

donde

$$X = F_1\left(\frac{y}{d_0}, \frac{Q}{Q_0}\right) = \int_0^{y/d_0}\frac{-d(y/d_0)}{1 - (Q/Q_0)^2 f_1(y/d_0)} \qquad (10\text{-}37)$$

y

$$Y = F_2\left(\frac{y}{d_0}, \frac{Q}{Q_0}\right) = \int_0^{y/d_0}\frac{-f_2(y/d_0)\, d(y/d_0)}{1 - (Q/Q_0)^2 f_1(y/d_0)} \qquad (10\text{-}38)$$

Éstas son las funciones de flujo variado para conductos circulares, las cuales dependen de y/d_0 y Q/Q_0, y pueden evaluarse mediante un procedimiento de integración numérica, como la regla de Simpson. En el apéndice E se da una tabla

de estas funciones para pendientes positivas[5], la cual fue preparada por Keifer y Chu.

La longitud del perfil de flujo entre dos secciones consecutivas de profundidades y_1 y y_2, respectivamente, en un conducto circular puede expresarse como

$$L = A[(X_2 - X_1) - B(Y_2 - Y_1)] \tag{10-39}$$

donde $A = -d_0/S_0$ y $B = \alpha Q^2/d_0^5$.

10-3. Método del paso directo. En general, un método de paso se caracteriza por dividir el canal en tramos cortos y llevar a cabo los cálculos paso a paso desde un extremo del tramo hasta el otro. Existe una gran variedad de métodos de paso. Algunos métodos parecen ser superiores a otros en ciertos aspectos, pero no se ha encontrado que uno de éstos sea mejor para todas las aplicaciones. El método del paso directo[6] es un método de paso simple aplicable a canales prismáticos.

La figura 10-6 ilustra un tramo de canal corto de longitud Δx. Al igualar las alturas totales en los extremos de las secciones 1 y 2, puede escribirse lo siguiente:

$$S_0 \Delta x + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + S_f \Delta x \tag{10-40}$$

Al resolver para Δx,

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S_f} = \frac{\Delta E}{S_0 - S_f} \tag{10-41}$$

donde E es la energía específica o, al suponer $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{10-42}$$

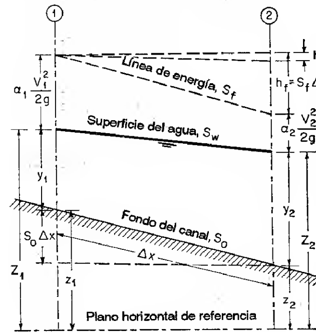


Figura 10-6. Tramo de canal para la deducción de los métodos de paso.

En las ecuaciones anteriores, y es la profundidad de flujo, V es la velocidad media, α es el coeficiente de energía, S_0 es la pendiente de fondo y S_f es la pendiente de fricción. El valor promedio de S_f se denota mediante $\bar{S}_f$. Cuando se utiliza la ecuación de Manning, la pendiente de fricción se expresa mediante

$$S_f = \frac{n^2V^2}{2.22R^{4/3}} \tag{9-8}$$

[5] Si $S_0 = 0$, entonces $Q_0 = 0$, $Q/Q_0 = \infty$ y las funciones de flujo variado no tienen sentido. Si S_0 es negativo, la ecuación (10-30) muestra que Q_0^2 es negativo. Debido a que el caudal real Q debe ser positivo, $(Q/Q_0)^2$ se vuelve negativo. Luego el procedimiento de integración debe hacerse para valores negativos de $(Q/Q_0)^2$ en las dos funciones de flujo variado.

[6] Sugerido por primera vez por el ingeniero polaco Charnomskiĭ [22] en 1914 y luego por Husted [23] en 1924.

El método del paso directo se basa en la ecuación (10-41), como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10-7. Calcule el perfil de flujo requerido en el ejemplo 10-1 mediante el método del paso directo.

Solución. Con los datos dados en el ejemplo 10-1, los cálculos de paso se llevan a cabo tal como se muestra en la tabla 10-4. Los valores de cada columna de la tabla se explican como sigue:

Columna 1. Profundidad de flujo en pies, escogida arbitrariamente desde 5.00 hasta 3.40 pies.

Columna 2. Área mojada en pies^2 correspondiente a la profundidad y de la columna 1.

Columna 3. Radio hidráulico en pies correspondiente a y en la columna 1.

Columna 4. Potencia 4/3 del radio hidráulico.

Columna 5. Velocidad media en pies/s obtenida al dividir 400 pies^3/s por el área mojada de la columna 2.

Columna 6. Altura de velocidad en pies.

Columna 7. Energía específica en pies obtenida al sumar la altura de velocidad de la columna 6 a la profundidad de flujo de la columna 1.

Columna 8. Cambio en la energía específica en pies, igual a la diferencia entre el valor de E de la columna 7 y el correspondiente al paso anterior.

Columna 9. Pendiente de fricción calculada mediante la ecuación (9-8) con $n = 0.025$ y con V tal como se da en la columna 5 y con $R^{4/3}$ en la columna 4.

Columna 10. Pendiente de fricción promedio entre los pasos, igual a la media aritmética de la pendiente de fricción que ha sido calculada en la columna 9 y la correspondiente al paso anterior.

Columna 11. Diferencia entre la pendiente de fondo 0.0016 y la pendiente de fricción promedio.

Columna 12. Longitud en pies del tramo entre los pasos consecutivos, calculada mediante la ecuación (10-41) o al dividir el valor de ΔE de la columna 8 por el valor de la columna 11.

Columna 13. Distancia desde la sección bajo consideración hasta el sitio de presa. Ésta es igual a la suma acumulada de los valores de la columna 12 calculados para los pasos previos.

El perfil de flujo calculado de esta manera es idéntico al obtenido por el método de integración gráfica (figura 10-3).

Ejemplo 10-8. Un tubo de alcantarilla en concreto reforzado de 72 pulg y 250 pies de largo, está colocado en una pendiente de 0.02 con una salida libre. Calcule el perfil de flujo si la alcantarilla descarga 252 pies^3/s, y $n = 0.012$ y $\alpha = 1.0$.

Solución. A partir de los datos dados, $y_c = 4.35$ pies y $y_c = 2.60$ pies. Como $y_c > y_n$, la pendiente del canal es empinada. Como se muestra en la figura 10-7, la sección de control se localiza a la entrada; el agua entrará en la alcantarilla con la profundidad erítica y de ahí en adelante fluirá con una profundidad menor que y_c pero mayor que y_n. El perfil de flujo es del tipo $S2$.

La tabla 10-5 muestra los cálculos del perfil de flujo, los cuales son explicativos por sí mismos. El perfil calculado se muestra en la figura 10-7. En esta figura también se grafica la línea de energía indicando la variación de energía a lo largo de la alcantarilla. El cálculo se llevó a cabo excediendo la longitud de la alcantarilla, de tal manera que la profundidad de flujo en la salida pueda interpolarse. Esta profundidad es 2.81 pies y la correspondiente velocidad de salida es 19.4 pies/s. Nótese que si el tubo estuviera fluyendo lleno en la descarga, esta velocidad de salida sería sólo de 10 pies/s.

Tabla 10-4. Cálculo del perfil de flujo mediante el método del paso directo para el ejemplo 10-7.
Q = 400 pies³/s n = 0.025 S_0 = 0.0016 α = 1.10 y_c = 2.22 pies y_n = 3.36 pies

y (1)	A (2)	R (3)	$R^{2/3}$ (4)	V (5)	$\alpha V^2/2g$ (6)	E (7)	ΔE (8)	S_f (9)	$\bar{S}_f$ (10)	$S_0 - \bar{S}_f$ (11)	Δx (12)	x (13)
5.00	150.00	3.54	5.40	2.667	0.1217	5.1217	......	0.000370				
4.80	142.08	3.43	5.17	2.819	0.1356	4.9356	0.1861	0.000433	0.000402	0.001198	155	155
4.60	134.32	3.31	4.94	2.979	0.1517	4.7517	0.1839	0.000507	0.000470	0.001130	163	318
4.40	126.72	3.19	4.70	3.156	0.1706	4.5706	0.1811	0.000598	0.000553	0.001047	173	491
4.20	119.28	3.08	4.50	3.354	0.1925	4.3925	0.1781	0.000705	0.000652	0.000948	188	679
4.00	112.00	2.96	4.25	3.572	0.2184	4.2184	0.1741	0.000850	0.000778	0.000822	212	891
3.80	104.88	2.84	4.02	3.814	0.2490	4.0490	0.1694	0.001020	0.000935	0.000665	255	1,146
3.70	101.38	2.77	3.88	3.948	0.2664	3.9664	0.0826	0.001132	0.001076	0.000524	158	1,304
3.60	97.92	2.71	3.78	4.085	0.2856	3.8856	0.0808	0.001244	0.001188	0.000412	196	1,500
3.55	96.21	2.68	3.72	4.158	0.2958	3.8458	0.0398	0.001310	0.001277	0.000323	123	1,623
3.50	94.50	2.65	3.66	4.233	0.3067	3.8067	0.0391	0.001382	0.001346	0.000254	154	1,777
3.47	93.48	2.63	3.63	4.278	0.3131	3.7831	0.0236	0.001427	0.001405	0.000195	121	1,898
3.44	92.45	2.61	3.59	4.326	0.3202	3.7602	0.0229	0.001471	0.001449	0.000151	152	2,050
3.42	91.80	2.60	3.57	4.357	0.3246	3.7446	0.0156	0.001500	0.001486	0.000114	137	2,187
3.40	91.12	2.59	3.55	4.388	0.3292	3.7292	0.0154	0.001535	0.001518	0.000082	188	2,375

Tabla 10-5. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-8 mediante el método del paso directo.
Q = 252 pies³/s n = 0.012 S_0 = 0.02 α = 1.0 y_c = 4.35 pies y_n = 2.60 pies

y/D	y	A	R	$R^{2/3}$	V	$\alpha V^2/2g$	E	ΔE	S_f	$\bar{S}_f$	$S_0 - \bar{S}_f$	Δx	x
0.725	4.35	21.95	1.794	2.180	11.48	2.048	6.398		0.00392				
0.70	4.20	21.13	1.777	2.154	11.93	2.211	6.411	0.013	0.00429	0.00411	0.01589	0.8	0.8
0.65	3.90	19.45	1.728	2.073	12.96	2.609	6.509	0.098	0.00525	0.00477	0.01523	6.4	7.2
0.60	3.60	17.71	1.666	1.976	14.23	3.145	6.745	0.236	0.00666	0.00596	0.01404	16.8	24.0
0.55	3.30	15.93	1.590	1.855	15.85	3.901	7.201	0.456	0.00880	0.00773	0.01227	37.2	61.2
0.50	3.00	14.13	1.500	1.717	17.85	4.947	7.947	0.746	0.01202	0.01041	0.00959	77.8	139.0
0.48	2.88	13.42	1.460	1.656	18.76	5.465	8.345	0.398	0.01378	0.01290	0.00710	56.1	195.1
0.47	2.82	13.06	1.440	1.626	19.30	5.785	8.605	0.260	0.01486	0.01432	0.00568	45.8	240.9
0.46	2.76	12.70	1.420	1.596	19.85	6.119	8.879	0.274	0.01600	0.01543	0.00457	60.0	300.9

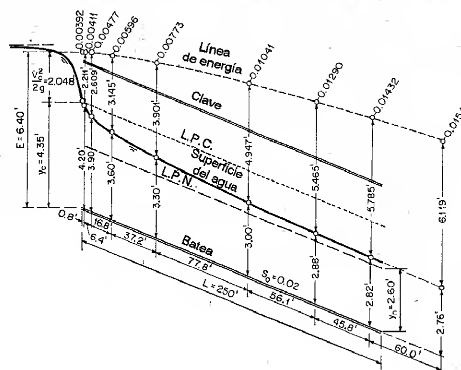


Figura 10-7. Un perfil $S2$ calculado mediante el método del paso directo.

Nótese que en el método del paso directo o en el método del paso estándar que se describirá en la siguiente sección, los pasos del cálculo deben llevarse a cabo hacia aguas arriba si el flujo es subcrítico o hacia aguas abajo si el flujo es supercrítico. Los pasos de cálculo llevados en la dirección contraria tienden inevitablemente a un resultado que diverge del perfil de flujo correcto.

10-4. Método del paso estándar. Este método también es aplicable a canales no prismáticos. En canales no prismáticos los elementos hidráulicos no son independientes de la distancia a lo largo del canal. En canales naturales, por lo general es necesario llevar a cabo estudios de campo para recolectar los datos requeridos en todas las secciones consideradas en el cálculo. Este cálculo se lleva a cabo mediante pasos de estación a estación en las cuales se han determinado las características hidráulicas. En tales casos la distancia entre las estaciones es conocida y el procedimiento es determinar la profundidad de flujo en las estaciones. Tal procedimiento a menudo se lleva a cabo mediante un proceso de ensayo y error.

Para explicar este método es conveniente referir la posición de la superficie del agua con respecto a un nivel de referencia horizontal. En la figura 10-6 las superficies del agua por encima del nivel de referencia en las dos secciones extremas son

$$Z_1 = S_0 \Delta x + y_1 + z_2 \qquad (10\text{-}43)$$

y

$$Z_2 = y_2 + z_2 \qquad (10\text{-}44)$$

La pérdida por fricción es

$$h_f = S_f \Delta x = \tfrac{1}{2}(S_1 + S_2)\,\Delta x \qquad (10\text{-}45)$$

donde la pendiente de fricción S_f se toma como el promedio de las pendientes en las dos secciones extremas o como S_f.

Al sustituir las anteriores expresiones en la ecuación (10-40), puede escribirse lo siguiente:

$$Z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f + h_e \qquad (10\text{-}46)$$

donde h_e se añade para tener en cuenta las pérdidas por remolinos (*eddies*), las cuales pueden ser muy importantes en canales no prismáticos. No existe un método racional disponible para evaluar las pérdidas por remolino. Éstas dependen sobre todo del cambio en la altura de velocidad y pueden expresarse como parte de él, o $k(\Delta\, \alpha V^2/2g)$, donde k es un coeficiente. Para tramos gradualmente convergentes y divergentes, k = 0 a 0.1 y 0.2, respectivamente. Para expansiones y contracciones abruptas, k es alrededor de 0.5. Para canales prismáticos y regulares, las pérdidas por remolino son prácticamente cero, o $k = 0$. Por conveniencia en el cálculo, algunas veces h_e puede considerarse parte de la pérdida de fricción y el n de Manning debe incrementarse de manera apropiada para el cálculo de h_f, luego h_e es cero en el cálculo.

Las alturas totales en las dos secciones extremas son

$$H_1 = Z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \qquad (10\text{-}47)$$

y

$$H_2 = Z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \qquad (10\text{-}48)$$

Por consiguiente, la ecuación (10-46) se convierte en

$$H_1 = H_2 + h_f + h_e \qquad (10\text{-}49)$$

Ésta es la ecuación básica que define el procedimiento del método del paso estándar.

El método del paso estándar es muy apropiado para el cálculo en canales naturales. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se utilizará un canal prismático con el fin de simplificar la ilustración y permitir la comparación con los resultados obtenidos por los otros métodos que han sido descritos. Más adelante se mostrará un ejemplo de la aplicación a canales naturales (sección 10-6).

Ejemplo 10-9. Calcule el perfil de flujo requerido en el ejemplo 10-1, mediante el método del paso estándar. Suponga que las estaciones a lo largo del canal están fijas en las distancias determinadas en la solución del ejemplo 10-7. La elevación en el sitio de presa es 600 pies s.n.m.

Solución. Los pasos de cálculo se ordenan en forma tabular, como se muestra en la tabla 10-6. Los valores de cada columna en la tabla se explican como sigue:

Columna 1. sección identificada por un número de estación, tal como "Estación 1 + 55". La localización de las estaciones está fija en las distancias determinadas en el ejemplo 10-7 con el fin de comparar el procedimiento con el método del paso directo.

Columna 2. Elevación de la superficie del agua en la estación. Inicialmente se introduce un valor de prueba en esta columna; éste será aceptado o rechazado con base en los cálculos hechos en las siguientes columnas de la tabla. Para el primer paso esta elevación debe darse o suponerse. Como la elevación del sitio de presa es 600 pies s.n.m. y la altura de la presa es 5 pies, la primera entrada es 605.00 pies s.n.m. Cuando el valor de prueba del segundo paso ha sido verificado, se convierte en la base para la verificación del valor de prueba en el siguiente paso y así sucesivamente.

Columna 3. Profundidad de flujo en pies, correspondiente a la elevación de la superficie del agua de la columna 2. Por ejemplo, la profundidad de flujo en la estación 1 + 55 es igual a la elevación de la superficie del agua menos la elevación en el sitio de presa menos (distancia desde el sitio de presa multiplicada por la pendiente del lecho), o 605.048 – 600.000 – 155 × 0.0016 = 4.80 pies.

Columna 4. Área mojada correspondiente a y de la columna 3.

Columna 5. Velocidad media igual al caudal dado de 400 pies³/s dividido por el área mojada de la columna 4.

Columna 6. Altura de velocidad en pies, correspondiente a la velocidad de la columna 5.

Columna 7. Altura total calculada mediante la ecuación (10-47), igual a la suma de Z de la columna 2 y la altura de velocidad de la columna 6.

Columna 8. Radio hidráulico en pies, correspondiente a y de la columna 3.

Columna 9. Potencia 4/3 del radio hidráulico.

Columna 10. Pendiente de fricción calculada mediante la ecuación (9-8), con n = 0.025, V de la columna 5 y $R^{4/3}$ de la columna 9.

Tabla 10-6. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-9 mediante el método del paso estándar
$Q = 400$ pies³/s $n = 0.025$ $S_0 = 0.0016$ $\alpha = 1.10$ $h_e = 0$ $y_c = 2.22$ pies $y_n = 3.36$ pies

Estación (1)	Z (2)	y (3)	A (4)	V (5)	$\alpha V^2/2g$ (6)	H (7)	R (8)	$R^{4/3}$ (9)	S_f (10)	$\bar{S}_f$ (11)	Δx (12)	h_f (13)	h_e (14)	H (15)
0 + 00	605.000	5.00	150.00	2.667	0.1217	605.122	3.54	5.40	0.000370	....	...	.....	...	605.122
1 + 55	605.048	4.80	142.08	2.819	0.1356	605.184	3.43	5.17	0.000433	0.000402	155	0.062	0	605.184
3 + 18	605.109	4.60	134.32	2.979	0.1517	605.261	3.31	4.92	0.000507	0.000470	163	0.077	0	605.261
4 + 91	605.186	4.40	126.72	3.156	0.1706	605.357	3.19	4.70	0.000598	0.000553	173	0.096	0	605.357
6 + 79	605.286	4.20	119.28	3.354	0.1925	605.479	3.08	4.50	0.000705	0.000652	188	0.122	0	605.479
8 + 91	605.426	4.00	112.00	3.572	0.2184	605.644	2.96	4.25	0.000850	0.000778	212	0.165	0	605.644
11 + 46	605.633	3.80	104.88	3.814	0.2490	605.882	2.84	4.02	0.001020	0.000935	255	0.238	0	605.882
13 + 04	605.786	3.70	101.38	3.948	0.2664	606.052	2.77	3.88	0.001132	0.001076	158	0.170	0	606.052
15 + 00	605.999	3.60	97.92	4.085	0.2856	606.285	2.71	3.78	0.001244	0.001188	196	0.233	0	606.285
16 + 23	606.146	3.55	96.21	4.158	0.2958	606.442	2.68	3.72	0.001310	0.001277	123	0.157	0	606.442
17 + 77	606.343	3.50	94.50	4.233	0.3067	606.650	2.65	3.66	0.001382	0.001346	154	0.208	0	606.650
18 + 98	606.507	3.47	93.48	4.278	0.3131	606.820	2.63	3.63	0.001427	0.001405	121	0.170	0	606.820
20 + 50	606.720	3.44	92.45	4.326	0.3202	607.040	2.61	3.59	0.001471	0.001449	152	0.220	0	607.040
21 + 87	606.919	3.42	91.80	4.357	0.3246	607.244	2.60	3.57	0.001500	0.001486	137	0.204	0	607.244
23 + 75	607.201	3.40	91.12	4.388	0.3292	607.530	2.59	3.55	0.001535	0.001518	188	0.286	0	607.530

Columna 11. Pendiente de fricción promedio a través del tramo entre las secciones de cada paso, aproximadamente igual a la media aritmética de la pendiente de fricción que se acaba de calcular en la columna 10 y la correspondiente al paso anterior.

Columna 12. Longitud del tramo entre las secciones, igual a la diferencia de los números de estación entre las estaciones.

Columna 13. Pérdidas por fricción en el tramo, iguales al producto de los valores de las columnas 11 y 12.

Columna 14. Pérdidas por remolino del tramo, iguales a cero.

Columna 15. Elevación de la altura total en pies. Ésta se calcula mediante la ecuación (10-49), es decir, sumando los valores de h_f y h_e en las columnas 13 y 14 con la elevación del extremo más bajo del tramo, el cual se encuentra en la columna 15 del tramo anterior. Si el valor que se obtiene de esta manera no es lo suficientemente parecido al de la columna 7, se supone un nuevo valor de prueba para la elevación de la superficie del agua, y así sucesivamente, hasta que estos dos valores sean lo suficientemente cercanos. El valor que produce este resultado es la elevación correcta de la superficie del agua. Luego el cálculo puede continuar con el siguiente paso. El perfil de flujo calculado es prácticamente idéntico al obtenido mediante el método de integración gráfica que se muestra en la figura 10-3.

10-5. Cálculo de una familia de perfiles de flujo. En las secciones anteriores se describieron métodos para determinar un perfil de flujo único. Con frecuencia, varios perfiles de flujo, o una familia de perfiles de flujo, se desean para diferentes condiciones de nivel y caudal. Un ejemplo de este tipo de problema es la determinación de la altura económica de una presa, donde la profundidad inicial es indeterminada, y por consiguiente debe calcularse cierto número de perfiles de flujo para el mismo caudal con diferentes elevaciones iniciales supuestas. Otro ejemplo es el seguimiento de los perfiles de flujo en una corriente tributaria para los diferentes niveles y caudales en el río principal, o un río con un estuario de mareas para diferentes elevaciones de mareas, o para un canal que conecta dos embalses con niveles cambiantes en éstos y diferentes caudales. Los siguientes son algunos métodos para ahorrar tiempo que pueden ayudar en el cálculo de una familia de perfiles de flujo.

A. Curvas de elementos geométricos. Cuando se desea cierto número de perfiles de flujo para diferentes condiciones de nivel y caudal, lo mejor es construir curvas que muestren los elementos geométricos e hidráulicos (figuras 10-8 y 10-9) requeridos en el cálculo. Puede ahorrarse un tiempo sustancial en el cálculo mediante la interpolación de valores en estas curvas, siempre y cuando las curvas no se extiendan sin necesidad por fuera del rango de variación de la elevación esperada de la superficie del agua.

Cuando el caudal de flujo en un canal varía, tanto la altura de velocidad como la pendiente de fricción cambiarán y la elevación de la superficie del agua se afectará. Por consiguiente, para uso general en el cálculo, puede graficarse la altura de velocidad en una escala logarítmica contra la elevación de la superficie del agua (figura 10-8) y la pendiente de fricción en escala logarítmica contra la elevación de la superficie del agua (figura 10-9). A partir de la ecuación de Manning y de la continuidad de flujo, puede demostrarse que tanto la altura de velocidad como la pendiente de fricción varían con el cuadrado del caudal. Por consiguiente, una vez que en las figuras 10-8 y 10-9 han sido calculadas las curvas para determinado valor de Q, por ejemplo 400 pies³/s, pueden obtenerse las curvas para otros caudales, por ejemplo 200 y 800 pies³/s, mediante el desplazamiento horizontal de las curvas (figura 10-8) o de la escala de las abscisas (figura 10-9). La distancia a la cual la curva o la escala de las abscisas debe desplazarse la determina el cuadrado de la relación del caudal nuevo con respecto al caudal original.

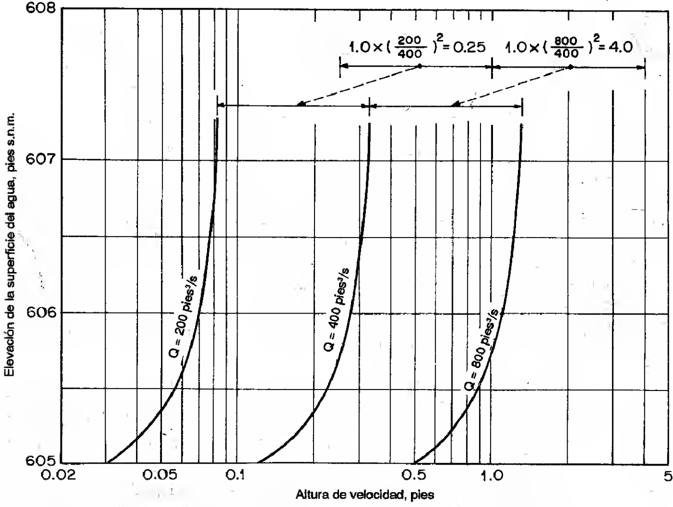


Figura 10-8. Gráfica de altura de velocidad contra elevación de la superficie de agua.

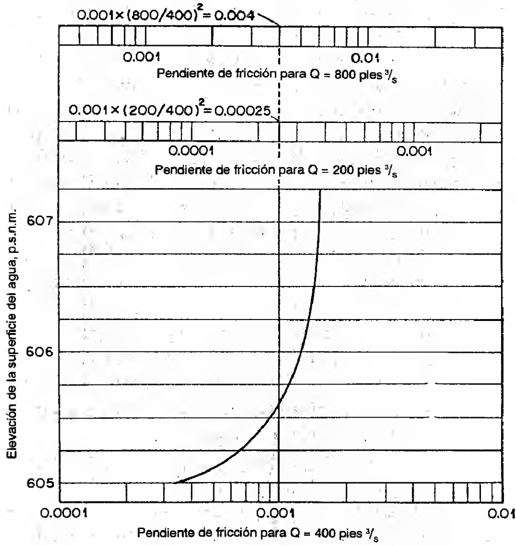


Figura 10-9. Gráfica de pendiente de fricción contra elevación de la superficie del agua.

B. El diagrama de Leach. Cuando se requiere un gran número de perfiles flujo para el mismo caudal pero diferentes niveles, puede utilizarse con much ventajas un diagrama desarrollado por Leach [24]. Tal diagrama (figura 10-1 puede prepararse después de que se han calculado, mediante cualquier métoc varios perfiles de flujo dentro de un rango esperado. En el diagrama cada cur representa la relación entre las elevaciones de la superficie del agua en las seccion inicial y final de cada tramo. Por ejemplo, cuando la elevación en la sección 1 gráfica contra la elevación en la sección 2 para el primer tramo 1-2, entonces obtiene la curva para el tramo 1-2 mostrada en la figura. Para simplificar identificación de las curvas, las abscisas representan las elevaciones en las seccion identificadas con números impares y las elevaciones en las secciones de númer pares en las ordenadas. Con un diagrama preparado de esta manera, puede determ narse el perfil de flujo para cualquier elevación inicial supuesta. Al tomar elevación inicial como 605.00 y al seguir la línea punteada en la dirección marcac por las flechas, las elevaciones de la superficie del agua en las secciones subsecue tes, pueden obtenerse con facilidad. El diagrama se construye para un caudal de 4(pies³/s. Para cualquier otro caudal bajo investigación debe emplearse un diagran diferente.

C. El método de Ezra. El diagrama de Leach se recomienda si se requiere perfiles de flujo para el mismo caudal pero con diferentes valores iniciales de nive Cuando se desean los perfiles de flujo para diferentes caudales y para diferente niveles iniciales, puede utilizarse un método desarrollado por Ezra [25]. Métod similares también han sido desarrollados por otros [26-28].

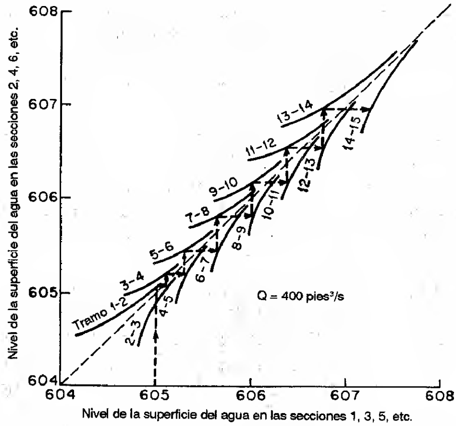


Figura 10-10. Diagrama de Leach para el cálculo de perfil de flujo cuando se requiere un gran númer de perfiles de flujo para el mismo caudal.

Al sustituir la ecuación (10-45) en la ecuación (10-46), puede escribirse la siguiente ecuación:

$$Z_1 + F(Z_1) = Z_2 + F(Z_2) + h_e \tag{10-50}$$

donde

$$F(Z_1) = \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \tfrac{1}{2} S_1 \Delta x \tag{10-51}$$

y

$$F(Z_2) = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \tfrac{1}{2} S_2 \Delta x \tag{10-52}$$

Mediante la ecuación (9-8),

$$S_1 = \frac{n^2 V_1^2}{2.22 R_1^{4/3}} \tag{10-53}$$

y

$$S_2 = \frac{n^2 V_2^2}{2.22 R_2^{4/3}} \tag{10-54}$$

o mediante la ecuación (9-10),

$$S_1 = \left(\frac{Q}{K_1}\right)^2 \tag{10-55}$$

y

$$S_2 = \left(\frac{Q}{K_2}\right)^2 \tag{10-56}$$

Nótese que las funciones $F(Z_1)$ y $F(Z_2)$ son directamente proporcionales a los cuadrados de las velocidades o del caudal Q. Para cualquier otro caudal Q_x, los valores correspondientes de estas ecuaciones pueden obtenerse multiplicando dichas funciones por un factor (Q_x/Q^2).

El método de Ezra da una solución gráfica de la ecuación (10-50). Existen dos partes principales en esta solución:

1. CÁLCULO Y CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS $Z + F(Z)$. Para cada sección escogida en el canal bajo consideración, se seleccionan algunos valores de la elevación de la superficie del agua, y se determinan y tabulan todos los elementos geométricos necesarios A y R para cada tramo correspondiente a estas elevaciones de la superficie del agua. Este procedimiento es el mismo que en el método del paso estándar.

Para determinados valores de Q y n, se determinan valores de $\alpha V^2/2g$ y S_f en cada una de las secciones para cada una de las elevaciones seleccionadas. En canales artificiales prismáticos la pendiente de fricción S_f puede calcularse mediante las ecuaciones (10-53) y (10-54). En canales irregulares el valor de K se determina primero y luego se cálcula el valor de S_f, mediante las ecuaciones (10-55) y (10-56). Esto se mostrará en el ejemplo 10-12.

Para cada sección se calculan los valores correspondientes de $F(Z)$ mediante las ecuaciones (10-51) y (10-52). Nótese que es necesario calcular dos valores, $F(Z_1)$ y $F(Z_2)$ para cada sección. En el cálculo de $F(Z_1)$ de la sección, el valor de Δx es el valor Δx_d medido hacia aguas abajo desde la sección. En el cálculo de $F(Z_2)$, el valor de Δx es el valor de Δx_u medido hacia aguas arriba desde la sección. En el cálculo esta regla asegura que los valores de Δx sean comunes para las secciones en cada extremo de cualquier tramo porque, tal como se mostrará, se utiliza el mismo valor de Δx en ambos lados de la ecuación (10-50). En otras palabras, en cada sección $Z_1 = Z_2 = Z$.

Ahora, para cada sección con $Z = Z_1 = Z_2$, se calculan los valores de $Z_1 + F(Z_1)$ y $Z_2 + F(Z_2)$ y se grafican curvas de $Z_1 + F(Z_1)$ y $Z_2 + F(Z_2)$ contra Z para cada sección (figura 10-14).

2. DETERMINACIÓN DE LAS ELEVACIONES DE LA SUPERFICIE DEL AGUA. El efecto de las pérdidas por remolino puede incluirse en el valor del coeficiente de rugosidad n, como se describió en la sección 10-4; por consiguiente, el término h_e de la ecuación (10-50) es cero. El valor resultante de $Z_2 + F(Z_2)$ para una sección aguas abajo es, por consiguiente, igual a $Z_1 + F(Z_1)$ para la siguiente sección aguas arriba del mismo tramo, y viceversa.

Para flujo subcrítico, el perfil de flujo se determina en una dirección hacia aguas arriba. Comenzando con una determinada elevación de la superficie del agua en la sección de aguas abajo, se obtiene el valor de $Z_2 + F(Z_2)$ mediante la curva $Z_2 + F(Z_2)$ apropiada. Entrando a la curva $Z_1 + F(Z_1)$ para la siguiente sección aguas arriba, con este valor se determina directamente la elevación de superficie de agua correspondiente. Este procedimiento se repite de sección a sección, obteniendo el perfil de flujo deseado.

Para flujo supercrítico el perfil de flujo se calcula en una dirección hacia aguas abajo. Comenzando con el valor de $Z_1 + F(Z_1)$ en la sección inicial y llevando este valor a la curva $Z_2 + F(Z_2)$ para la siguiente sección aguas abajo, se determina la correspondiente elevación de la superficie del agua.

Si las pérdidas por remolino no se incluyen en el coeficiente de rugosidad, el término h_e puede expresarse como $k(\alpha V^2/2g)$, donde k es un coeficiente descrito en la sección 10-4. Por consiguiente, el procedimiento de cálculo debe modificarse.

Primero que todo, es necesario graficar curvas de $k(\alpha V^2/2g)$ contra la elevación Z para cada sección.

Para flujo subcrítico las elevaciones de la superficie del agua para dos secciones consecutivas se determinan en una dirección hacia aguas arriba mediante el procedimiento descrito antes para $h_e = 0$. Luego se obtienen valores de $k(\alpha V^2/2g)$ de las curvas graficadas de $k(\alpha V^2/2g)$ para estas elevaciones. La diferencia $k\,\alpha(V_1^2/2g - V_2^2/2g)$, o h_e en el tramo, se suma al valor de $Z_2 + F(Z_2)$ correspondiente a la sección más baja de las dos. El valor resultante se lleva a la curva $Z_1 + F(Z_1)$ correspondiente a la sección más alta, y se determina la elevación de la superficie del agua corregida correspondiente.

Para flujo supercrítico el procedimiento es similar. Sin embargo, el perfil de flujo debe calcularse en una dirección hacia aguas abajo y la corrección por pérdidas de remolinos debe restarse del valor de $Z_1 + F(Z_1)$, antes de que este valor se lleve a la curva de $Z_2 + F(Z_2)$.

La aplicación del método de Ezra se ilustrará en los ejemplos de la sección 10-8.

10-6. Método del paso estándar para canales naturales. Para flujo en la mayor parte de los canales naturales con niveles normales, el perfil de flujo en tramos cortos está muy cerca de ser un flujo uniforme pero levemente modificado por irregularidades locales en el canal. Para un flujo en apariencia gradualmente variado, puede obtenerse una solución aproximada mediante el método de integración directa o el método del paso directo, suponiendo un canal prismático con una sección con las características geométricas e hidráulicas promedio del canal natural. Para una solución práctica y precisa, sin embargo, se recomienda el método del paso estándar.

El método del paso estándar tiene muchas ventajas obvias en su aplicación a canales naturales. Cuando la altura de velocidad es pequeña el método de paso puede llevarse a cabo aun en la dirección equivocada sin arrojar errores serios, a pesar de que siempre es recomendable llevar a cabo los cálculos hacia aguas arriba si el flujo es subcrítico y hacia aguas abajo si el flujo es supercrítico. La elevación de la superficie de agua en la sección inicial, donde debe empezar el cálculo de un perfil de flujo, puede ser desconocida en un canal natural; el uso de paso del cálculo con respecto a este problema ofrece una ventaja especial. Si el paso de cálculo empieza con una elevación supuesta que es incorrecta para determinado caudal, el perfil de flujo resultante se hará cada vez más correcto con cada paso de cálculo, siempre y cuando éstos se lleven en la dirección correcta. Por consiguiente, si no se conoce una elevación en el tramo bajo consideración o cerca de él, puede suponerse una elevación arbitraria para una sección distante suficientemente lejos, ya sea arriba o abajo de la sección inicial. Una vez que el paso de cálculo ha sido llevado a cabo hasta la sección inicial las elevaciones serán correctas. Puede hacerse una verificación llevando a cabo los mismos cálculos con otra elevación supuesta en la sección distante. La elevación calculada en la sección inicial es la elevación correcta si el segundo valor calculado coincide con el primer valor. Los dos valores a menudo coinciden si la distancia desde la sección distante hasta la sección inicial es suficiente.

Para calcular un perfil de flujo por lo general se requiere la siguiente información:

1. El caudal para el cual se desea el perfil del flujo.

2. La elevación de la superficie de agua en la sección de control. Si ésta no se encuentra disponible, los cálculos pueden empezar utilizando una elevación supuesta en una sección lo suficientemente lejos de la sección inicial a través de la cual se desea el perfil.

3. Los elementos geométricos en varias secciones de canal a lo largo del tramo para todas las profundidades de flujo dentro del rango esperado. Estos datos pueden obtenerse mediante un trabajo hidrográfico o de mapas de niveles del fondo del canal. En la tabla 10-7 se muestra un método conveniente para registrar estos datos. En la tabla las secciones transversales se identifican por número y milla de río en conformidad con el mapa mostrado en la figura 10-11. Otros datos incluyen la longitud del tramo entre secciones, el ancho del canal, el perímetro mojado y el área mojada. La columna para anotaciones se da con el fin de indicar los aspectos límites de la sección transversal, como las pendientes laterales, siendo posible estimar el área mojada y el perímetro mojado dentro de un rango moderado de elevaciones de la superficie del agua.

Tabla 10-7. Tabulación de los datos para los ríos Missouri y Kansas en Kansas City, Missouri*

Sec. No. † (1)	Milla de río (2)	Tramo, pies (3)	Elev. S.A., pies s.n.m. (4)	Área mojada (5)	De la estación (6)	A la estación (7)	Ancho, pies (8)	Perímetro mojado, pies (9)	Área, pies² (10)	Anotaciones (11)
Río Missouri										
1	377.58	.....	7.45.1	Sobre la banca izquierda	0 + 35	5 + 05	470	470	2,650	Jarillón 1 en 3
				Canal	5 + 05	13 + 90	885	900	31,900	Banca 1 en 1
		1,060								
2	377.78	.....	745.3	Sobre la banca izquierda	0 + 62	2 + 40	178	181	1,190	Jarillón 1 en 4
				Canal	2 + 40	14 + 97	1,260	1,260	32,500	Banca 1 en 5
		8.45								
3	377.94	.....	745.5	Sobre la banca izquierda	0 + 61	1 + 50	89	92	580	Jarillón 1 en 4
				Canal	1 + 50	16 + 72	1,520	1,550	38,300	Banca 1 en 4
		2,060								
4	378.33	.....	745.9	Canal	2 + 91	23 + 72	2,080	2,110	48,500	Jarillón 1 en 4 Banca 1 en 4½
		1,690								
5	378.65	.....	746.2	Sobre la banca izquierda	4 + 62	1 + 80	720	720	3,020	Jarillón 1 en 4
				Canal	11 + 80	32 + 24	2,040	2,080	47,300	Banca 1 en 1
		1,580								
6	378.95	.....	746.2	Sobre la banca izquierda	4 + 62	11 + 80	720	720	3,020	Jarillón 1 en 4
				Canal	11 + 80	32 + 24	2,040	2,080	47,300	Banca 1 en 1
		2,430								
7	379.41	.....	746.9	Dique izquierdo	0 + 61	9 + 24	880	880	8,270	Jarillón 1 en 4
				Canal	9 + 40	22 + 35	1,300	1,320	34,700	Jarillón 1 en 3
Río Kansas										
1K	0.00	1,430→ 298	757.0	Canal	.....	.....	840	860	29,400	Jarillón 1 en 3 a ambos lados
2K	0.056		757.0	Canal	.....	.....	840	860	29,400	Jarillón 1 en 3 a ambos lados
Río Missouri										
10	383.54	.....	750.3	Sobre la banca izquierda	32 + 80	44 + 50	1,170	1,180	12,900	Jarillón 1 en 3
				Canal	44 + 50	57 + 40	1,290	1,310	34,600	
				Dique	57 + 40	62 + 29	490	490	5,700	Jarillón 1 en 4
		2,430								
Puente	384.00	.....	750.3	Sobre la banca izquierda	.....	.....	560	640	5,010	1 superficie de jarillón, 3 superficies de pilares.
				Canal	.....	.....	1,400	1,580		7 superficies de pilares.
				Sobre la banca derecha	.....	.....	125	130		Banca 1 en 4
		8,290								
11	385.57	.....	751.6	Sobre la banca izquierda	59 + 60	81 + 10	2,159	2,150	13,900	Jarillón 1 en 3
				Canal	81 + 10	89 + 32	820	840	22,300	Banca 1 en 1

* U. S. Army Corps of Engineers [29]
† *Véase* figura 10-11 para la localización de las secciones transversales.
→ Distancia aguas arriba de la sección 5.

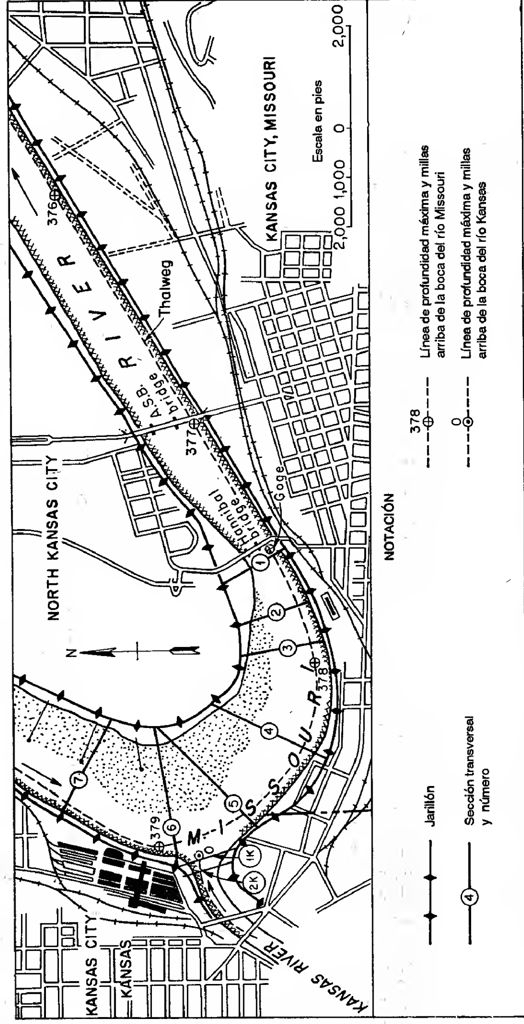


Figura 10-11. Mapa índice para los ríos Missouri y Kansas en Kansas City, Missouri (*U. S. Army Corps of Engineers*).

Si se contemplan perfiles de flujo para caudales diferentes, será conveniente construir curvas de elementos geométricos (figura 10-12) e interpolar sus valores correspondientes a diferentes elevaciones.

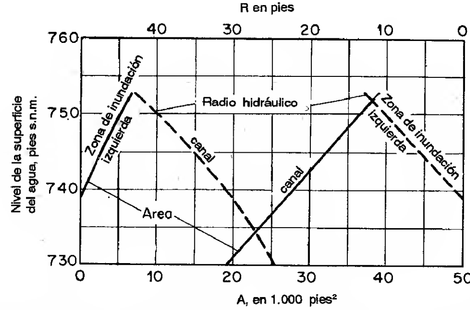


Figura 10-12.*A* y *R versus* elevación de la superficie de agua para la sección de canal No. 1 del río Missouri en Kansas City Missouri (*U. S. Army Corps of Engineers*).

4. La rugosidad del canal y las pérdidas por remolino en varias secciones. Para el cálculo de perfiles de flujo, a medida que el *n* de Manning es menor, mayor será el perfil, y viceversa. Por consiguiente debe seleccionarse el menor valor posible de *n* para el cálculo si se requiere conocimiento acerca del perfil de flujo más largo posible. Este conocimiento es importante en ciertos problemas de ingeniería, como la determinación del efecto de remanso debido a una presa.

Por otro lado, cuando se requiere conocer cuál es el perfil de flujo más corto posible, debe utilizarse el valor de *n* más grande posible, por ejemplo en el problema de mejoramiento de un canal para la navegación. Como la profundidad de navegación debe ser mayor que cierto valor mínimo, el menor perfil posible indicará la menor profundidad de flujo en una determinada sección de canal. Las pérdidas por remolino pueden estimarse por separado e incluirse en el cálculo. Sin embargo, algunas veces es conveniente aumentar el valor de con el fin de cubrir los efectos de tales pérdidas.

Ejemplo 10-10. Calcular el perfil de flujo en el río Missouri cerca de Kansas City, Missouri, para un caudal de diseño de 431,000 pies^3/s En la figura 10-11 se muestra el plano que indica la localización de las secciones transversales. Los elementos geométricos de estas secciones transversales se muestran en la tabla 10-7 para determinadas elevaciones de la superficie de agua. Para otras elevaciones los elementos geométricos deben estimarse a partir de estos datos[7].

Solución. Los cálculos se tabulan tal como se muestra en la tabla 10-8. Los encabezamientos de cada columna de la tabla se explican a continuación.

[7] El plano y los datos utilizados en este ejemplo se obtuvieron de [29]. Sin embargo, algunos valores numéricos han sido modificados para ajustarse al propósito presente.

Tabla 10-8. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-10 mediante el método del paso estándar (ríos Missouri y Kansas en Kansas City, Missouri)

Sec. No. (1)	Sub-sec. (2)	Milla de río (3)	Z (4)	A (5)	P (6)	R (7)	$R^{2/3}$ (8)	n (9)	K (10)	$\frac{K^3}{A^2}$ (11)	α (12)	V (13)	$\alpha \frac{V^2}{2g}$ (14)	H (15)	S_f (16)	$\bar{S}_f$ (17)	Δx (18)	h_f (19)	h_e (20)	H (21)
1	C.P.	377.58	752.25	38,600	910	42.4	12.2	0.025	280.5 × 10⁵	148.3 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	6,060	497	12.2	5.3	0.050	9.6 × 10⁵	0.2 × 10¹¹										
				44,660	.....	....	....	.....	290.1 × 10⁵	148.5 × 10¹¹	1.213	9.65	1.76	754.01	0.000220	....	.....	....	0	754.01
2	C.P.	377.78	752.69	41,600	1,310	31.8	10.1	0.025	250.5 × 10⁵	91.0 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	2,580	210	12.3	5.4	0.050	4.2 × 10⁵	0.1 × 10¹¹										
				44,180	.....	....	....	.....	254.7 × 10⁵	91.1 × 10¹¹	1.078	9.76	1.59	754.28	0.000287	0.000254	1,060	0.27	0	754.28
3	C.P.	377.94	753.37	50,300	1,570	32.0	10.1	0.025	303.0 × 10⁵	109.9 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	1,400	123	11.4	5.1	0.050	2.1 × 10⁵	0.0										
				51,700	.....	....	....	.....	305.1 × 10⁵	109.9 × 10¹¹	1.035	8.34	1.12	754.49	0.000200	0.000244	845	0.21	0	754.49
4	C.P.	378.33	754.15	65,400	2,170	30.2	9.7	0.025	387.0 × 10⁵	....	1.000	6.59	0.68	754.83	0.000130	0.000165	2,060	0.34	0	754.83
5	C.P.	378.65	754.41	64,200	2,100	30.6	9.8	0.025	375.0 × 10⁵	128.0 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	9,040	754	12.0	5.2	0.050	14.0 × 10⁵	0.3 × 10¹¹										
				73,240	.....	....	....	.....	389.0 × 10⁵	128.3 × 10¹¹	1.167	5.88	0.63	755.04	0.000123	0.000127	1,690	0.21	0	755.04
	Sección de balance 350,000 pies³/s del Alto Missouri 81,000 pies³/s del río Kansas																			
1K	Desembocadura del río Kansas, Q = 81.000 pies³/s																			
	C.P.	......	755.06	27,700	844	32.8	10.3	0.025	170.3 × 10⁵	64.5 × 10¹¹	1.000	2.93	0.13	755.19	0.000023	0.000073	1,430	0.10	0.05	755.19
6	Río Missouri, Q = 350,000pies³/s																			
	C.P.	378.95	754.80	64,900	2,100	30.9	9.8	0.025	379.0 × 10⁵	129.3 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	9,300	755	12.4	5.4	0.050	14.9 × 10⁵	0.3 × 10¹¹										
				74,200	.....	....	....	.....	393.9 × 10⁵	129.6 × 10¹¹	1.168	4.72	0.40	755.20	0.000078	0.000101	1,580	0.16	0	755.20
7	Procedimiento hacia arriba del río Missouri																			
	C.P.	379.41	754.78	45,100	1,330	34.0	10.5	0.025	282.2 × 10⁵	110.6 × 10¹¹										
	Z.I.	......	......	15,400	914	16.9	6.6	0.040	37.9 × 10⁵	2.3 × 10¹¹										
				60,500	.....	....	....	.....	320.1 × 10⁵	112.9 × 10¹¹	1.261	5.79	0.66	755.44	0.000120	0.000099	2,430	0.24	0	755.44

C.P. = Canal principal
Z.I. = Zona de inundación izquierda

Columna 1. Número de la sección en conformidad con el plano de la figura 10-11.

Columna 2. Subsecciones, para las cuales C.P. designa las secciones del canal principal y Z.I. indica las secciones en la zona de inundación izquierda.

Columna 3. Número de millas del río hacia aguas arriba de la boca del río Missouri.

Columna 4. Elevación de la superficie del agua. La elevación inicial de 752.25 pies en la sección 1 fue estimada a partir de la curva de calibración en la estación de aforo de Kansas City, localizada en el puente Hannibal en la milla 377.58 del río Missouri.

Columna 5. Área mojada. Por ejemplo, la sección 1 se subdivide en áreas de la zona de inundación izquierda y del canal principal. En la elevación 752.25 pies el área se determina para cada subárea utilizando la tabla 10-7 o una curva preparada como la mostrada en la figura 10-12.

Columna 6. Perímetro mojado. Para la elevación 752.25 en la sección 1, el perímetro mojado se determina a partir de la tabla 10-7 o de la figura 10-12.

Columna 7. Radio hidráulico, obtenido al dividir el área de la columna 5 por el perímetro mojado de la columna 6.

Columna 8. Potencia 2/3 del radio hidráulico de la columna 7.

Columna 9. Valor del n de Manning. Se supone que las pérdidas generales debidas a contracciones, expansiones y curvas se incluyen en las pérdidas por fricción calculadas a partir de los valores de n seleccionados.

Columna 10. La conductividad $K = 1.49AR^{2/3}/n$.

Columna 11. El valor de K^3/A^2.

Columna 12. Coeficiente de energía para una distribución de velocidades no uniforme. Desde la columna 5 hasta la columna 12 el procedimiento de cálculo es igual al descrito en la sección 6-5. Los coeficientes para las secciones subdivididas de canal se suponen iguales a la unidad.

Columna 13. Velocidad media, la cual es igual al caudal de la sección de 431,000 pies³/s dividido por el área de la columna 5. Arriba de la sección 5, el caudal se divide entre el río Missouri (350,000 pies³/s) y el río Kansas (81,000 pies³/s). Las velocidades deben ser calculadas para los caudales divididos. La división de caudales se basa en un estudio hidrológico de las cuencas de drenaje de los dos ríos.

Columna 14. Altura de velocidad.

Columna 15. Altura total, la cual es igual a la suma de la elevación de la columna 4 y de la altura de velocidad de la columna 14.

Columna 16. Pendiente de fricción, la cual es igual a $(Q/K)^2$. El valor K es el valor total para la sección bajo consideración. Luego, para la sección 1, $S_f = [431{,}000/(290.1 \times 10^5)]^2 = 0.000220$.

Columna 17. Pendiente de fricción promedio a través del tramo entre dos secciones, es decir, la media aritmética de la pendiente de fricción que acaba de ser calculada en la columna 16 y la correspondiente al paso anterior.

Columna 18. Longitud del tramo entre las secciones del río, es decir, la diferencia del número de millas entre las secciones convertidas a pies.

Columna 19. Pérdidas por fricción en el tramo, es decir, el producto de la pendiente de la columna 17 y la longitud del tramo de la columna 18.

Columna 20. Pérdidas por remolino en el tramo. Las pérdidas generales se incluyen en las pérdidas por fricción calculadas en la columna 19. Sin embargo, en la entrada del río Kansas en el río Missouri se espera una pérdida adicional por remolinos en la confluencia. Ésta se estima como el 10% del incremento en la altura de velocidad, o $0.10 \times (0.63 - 0.13) = 0.05$ pies.

Columna 21. Altura total, la cual se obtiene sumando las pérdidas h_f de la columna 19 y h_e de la columna 20 a la altura total en la misma columna para la sección previa. Si la elevación aquí obtenida no es muy cercana a la encontrada en la columna 15, de nuevo debe suponerse la elevación de la superficie de agua de la columna 4 hasta que se alcance el nivel de exactitud deseado.

Para los cálculos de las elevaciones de la superficie de agua en las secciones 1K, 2K, 6 y 7, *véase* la sección 11-10.

10-7. Método de nivel-caída-caudal para canales naturales. Cuando se dispone de perfiles de flujo en una corriente en su estado natural, sin efectos de remanso, para un cierto número de caudales puede utilizarse el método de nivel-caída-caudal; este método tiene las ventajas de simplicidad y economía [29]. Algunos métodos similares han sido desarrollados por otros investigadores [30-34][8].

La pendiente de fricción S_f en un tramo corto de longitud L puede expresarse como

$$S_f = \frac{F + h_{v2} - h_{v1}}{L} \qquad (10\text{-}57)$$

donde F es la caída en la superficie del agua y $h_{v2} - h_{v1}$ es el cambio en la altura de velocidad. Si $h_{v2} - h_{v1}$ es cero o insignificante, entonces $S_f = F/L$, y el caudal normal para un flujo uniforme mediante la ecuación de Manning es

$$Q = \frac{1.49}{n} A R^{2/3} \left(\frac{F}{L}\right)^{1/2} \qquad (10\text{-}58)$$

Para un flujo gradualmente variado con un efecto de remanso que tenga un caudal Q_x y una correspondiente F_x en el mismo tramo, puede suponerse que una forma similar a la ecuación (10-58), es

$$Q_x = \frac{1.49}{n} A R^{2/3} \left(\frac{F_x}{L}\right)^{1/2} \qquad (10\text{-}59)$$

donde los cambios en la altura de velocidad debidos al efecto de remanso también son insignificantes. A partir de las ecuaciones (10-58) y (10-59),

$$F_x = \left(\frac{Q_x}{Q/\sqrt{F}}\right)^2 \qquad (10\text{-}60)$$

donde $Q/\sqrt{F}$ se conoce como *caudal para una caída de 1 pie*[9]. Esta ecuación puede utilizarse para el cálculo del perfil de flujo si se conoce la relación nivel-caída-caudal para flujo uniforme en el tramo.

La relación nivel-caída-caudal para un tramo seleccionado puede determinarse a partir de los registros de niveles y caudales observados (tabla 10-9). Los niveles o elevaciones de la superficie del agua en la sección inicial en el tramo se grafican como ordenadas, y los valores correspondientes de $Q/\sqrt{F}$ se grafican como abscisas, obteniéndose una *curva nivel versus* $Q/\sqrt{F}$ (figura 10-13). Cuando se da cualquier elevación de la superficie del agua en la sección inicial del tramo, el correspondiente valor de $Q/\sqrt{F}$ puede leerse de la curva, y se calcula la caída para un caudal Q_x mediante la ecuación (10-60). La caída calculada, cuando se suma a la elevación de la superficie del agua en la sección inicial del tramo da la elevación de la superficie del agua en la sección final del tramo, que es también la elevación de la superficie del agua en la sección inicial para el siguiente tramo. El procedimiento se repite para cada tramo hasta que se completa el perfil de flujo requerido.

[8] La referencia [30] describe el llamado *método de Grimm*. Éste requiere un cálculo de prueba que, sin embargo, puede evitarse utilizando nomogramas, tal como el sugerido por Steinberg [31].

[9] En un método similar desarrollado por Rakhmanoff [34] se utiliza un término F/Q^2 en lugar de $Q/\sqrt{F}$. Este término tiene la naturaleza de un factor de resistencia y, por consiguiente, ha recibido el nombre de *módulo de resistencia* dado por Pavlovskiĭ [21, p. 115].

Tabla 10-9. Datos y cálculos para la curva nivel *versus* $Q/\sqrt{F}$ utilizada en el ejemplo 10-11 (río Missouri en Kansas City, Missouri, secciones 1 a 5)

Nivel de la superficie del agua, pies s.n.m.		Caída, pies	Caudal, pies³/s	$\frac{Q}{\sqrt{F}}$
sección 1	Sección 5			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
724.8	725.7	0.9	33,600	35,400
725.3	726.2	0.9	36,100	38,000
729.6	730.2	0.6	66,100	85,300
727.4	728.3	0.9	69,500	73,200
727.8	728.8	1.0	76,000	76,000
730.2	731.2	1.0	97,200	97,200
730.8	731.7	0.9	105,000	111,000
731.3	732.3	1.0	113,000	113,000
734.6	735.6	1.0	141,000	141,000
735.8	736.7	0.9	157,000	165,000
736.6	737.7	1.1	164,000	156,000
745.0	746.6	1.6	326,000	258,000
722.2	723.1	0.8	22,900	25,600
724.6	725.6	1.0	45,400	45,400
725.0	726.0	1.0	49,900	49,900
725.3	726.4	1.1	52,300	49,800

La curva nivel *versus* $Q/\sqrt{F}$ por lo general se construye como una curva promedio para diferentes condiciones en el río, como aumentos o descensos de nivel, lechos fluctuantes de la corriente, efectos de viento, crecimiento acuático, hielo y flujo sobre las bancas. Debido a estas condiciones variables, algunas veces los puntos graficados se dispersan; luego debe dibujarse una línea suave a través de los puntos, teniendo en cuenta las condiciones variables, que representan las condiciones promedio del canal. Cuando se cuenta con suficientes mediciones deben rechazarse los datos dudosos. En general, debe darse mayor peso a las mediciones más recientes, debido a que reflejan los cambios recientes en el canal. Otros factores que deben considerarse para la construcción de la curva son la exactitud relativa de las mediciones de caudales individuales, las condiciones de flujo durante las mediciones (si el flujo crece, desciende o permanece estable), las condiciones que afectan la relación nivel-caída-caudal, como cambios en la rugosidad del canal, rompimiento de jarillones y cambios de controles en el canal, y la existencia de un flujo de entrada lateral sustancial entre las estaciones.

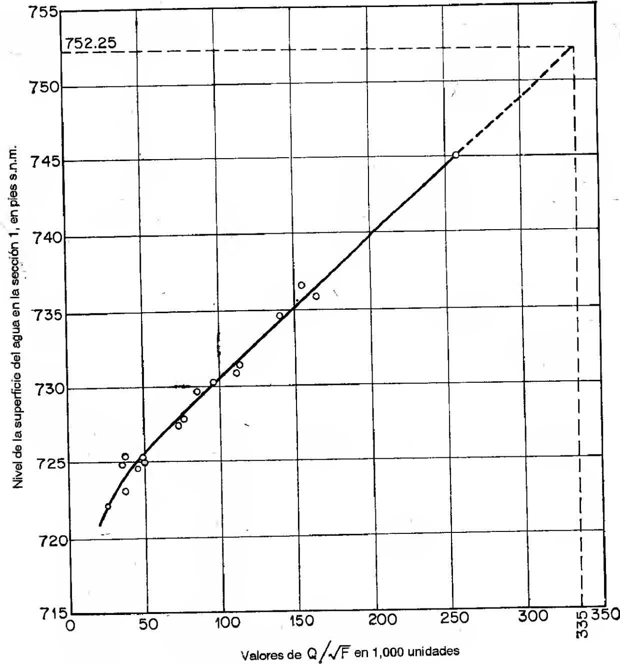


Figura 10-13. Curva nivel *versus* $Q/\sqrt{F}$ para el ejemplo 10-11.

La curva nivel *versus* $Q\sqrt{F}$ puede extrapolarse hacia arriba o hacia abajo del rango de los datos observados extendiendo la curva en sus extremos de acuerdo con la tendencia general de la curvatura. Sin embargo, cualquier cambio abrupto en los elementos hidráulicos de la sección de canal producirán un cambio correspondiente en la curvatura de la misma. En este caso, debe hacerse una corrección para el cambio, si se conoce, para la extrapolación de la curva.

Este método se utiliza con todas sus ventajas cuando se desea un cierto número de caudales correspondiente a niveles conocidos, o viceversa, en una corriente. Teniendo en cuenta las condiciones variables, pueden obtenerse resultados satisfactorios para tramos largos de ríos de 50 a 100 millas desde la estación de medición. La información requerida por el método a menudo es menos costosa que la requerida por el método del paso estándar. Sin embargo, por lo general esta ventaja se pierde debido a la inexactitud de los resultados, porque en este método se ignora el efecto del cambio en la altura de velocidad. Por esta razón el método de nivel-caída-caudal es más satisfactorio para problemas en los cuales la velocidad se encuentra muy por debajo de la velocidad crítica y decrece en la dirección aguas abajo.

Ejemplo 10-11. Calcular la elevación de la superficie del agua en la sección 1 del río Missouri mostrada en el ejemplo 10-10 mediante el método de nivel-caída-caudal. El tramo desde la sección 1 hasta la sección 5 se toma como el primer tramo. Las elevaciones de la superficie del agua se encuentran disponibles en registros de nivel para medidores localizados en las secciones 1 y 5. Los caudales se han observado en el puente A. S. B. localizado alrededor de unos 3,000 pies aguas abajo de la sección 1. Estos datos están tabulados en la tabla 10-9[10].

Solución. Los datos y los cálculos para el nivel *versus* el caudal correspondiente a una curva de 1 pie de caída se dan en la tabla 10-9, la cual contiene los siguientes encabezamientos:

Columna 1. Registro de las elevaciones de la superficie del agua en la sección 1.

Columna 2. Registro de las elevaciones de la superficie del agua en la sección 5.

Columna 3. Caída en pies, que es igual a la diferencia entre las elevaciones de las columnas 2 y 1.

Columna 4. Caudales en pies³/s observados en el puente A. S. B.

Columna 5. Caudal por cada pie de caída, o $Q/\sqrt{F}$, donde Q es el caudal de la columna 4 y F es la caída de la columna 3.

A partir de las elevaciones de la superficie del agua en la sección 1, como se relacionan en la columna 1 de la tabla, y los valores correspondientes de $Q/\sqrt{F}$ de la columna 5 se construye la curva de nivel *versus* $Q/\sqrt{F}$ (figura 10-13).

Para una elevación de la superficie del agua de 752.25 se obtiene un valor de $Q/\sqrt{F}$ = 335,000 mediante extrapolación. A partir de la ecuación (10-60) la caída entre las secciones 1 y 5 es igual a $(431{,}000/335{,}000)^2 = 1.65$ pies. Al sumar este valor a la elevación de la sección 1, la elevación de la superficie de agua requerida en la sección 5 es 753.90. Ésta es alrededor de medio pie menor que la elevación calculada mediante el método del paso estándar; la diferencia es causada sobre todo por no haber considerado cambios en la altura de velocidad en este método.

Los cálculos pueden continuar para tramos subsecuentes. Una tabulación, como la mostrada en la tabla 10-10, se sugiere para el cálculo si se requiere un perfil de flujo completo.

Tabla 10-10. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-11 mediante el método de nivel-caída-caudal (río Mossouri en Kansas City, Missouri, secciones 1 a 5, Q_x = 431,000 pies³/s

Sec. No.	Milla de río	Longitud del tramo	Nivel de la superficie del agua, pies s.n.m.	$Q/\sqrt{F}$	$F_x = \frac{Q_x^2}{(Q/\sqrt{F})^2}$
1	377.58	......	752.25	335,000	1.65
			1.65		
5	378.65	5,655	753.90	......	......
......	......	......	Para continuar si se desea.		

Si se desea, pueden obtenerse las elevaciones de la superficie de agua en las secciones intermedias 2 a 4 rompiendo el tramo 1-5 en cuatro tramos pequeños. Las elevaciones del perfil en las secciones intermedias pueden obtenerse mediante interpolación. Las curvas nivel *versus* $Q/\sqrt{F}$ pueden dibujarse para cada sección y los cálculos pueden llevarse a cabo para los tramos subdivididos.

[10] Este ejemplo fue tomado de [29] con modificaciones.

10-8. Método de Ezra para canales naturales. Si se desean los perfiles de flujo para cierto número de caudales o niveles, puede utilizarse el método nivel-caída-caudal con todas sus ventajas para una solución simple y económica pero aproximada. Sin embargo, si se requiere una solución precisa, incluidos los efectos de cambio en la altura de velocidad y las pérdidas por remolino, el método de Ezra descrito en la sección 10-5 debe arrojar resultados más satisfactorios.

Ejemplo 10-12. Determine las elevaciones de la superficie de agua en las secciones 1 a 5 del río Missouri en Kansas City, Missouri, como se describe en el ejemplo 10-10. Los datos requeridos para el cálculo por el método de Ezra se dan en la tabla 10-7. El caudal es 431,000 pies³/s. La elevación de la superficie de agua inicial en la sección 1 es 752.25. Se supone que las pérdidas por remolino se incluyen en las pérdidas por fricción.

Solución. El primer paso es calcular el valor de $Z + F(Z)$ a partir de los datos conocidos. Los cálculos se tabulan en la tabla 10-11 con los siguientes encabezamientos de columna.

Columna 1. Número de la sección de canal
Columna 2. Número de millas en el río
Columna 3. Longitud del tramo en pies. El valor superior en es la longitud del tramo aguas abajo de la sección seleccionada, y el valor inferior es la longitud del tramo aguas arriba.
Columna 4. Elevaciones de la superficie del agua. Se dan tres elevaciones para cada sección. Por lo general se seleccionan por lo menos tres elevaciones para cada sección con el fin de dar por lo menos tres puntos para graficar cada curva $Z + F(Z)$.
Columnas 5 a 14. Estas columnas corresponden exactamente a aquéllas de la tabla 10-8 para el método del paso estándar. Los valores de la fila superior para cada elevación corresponden al canal principal y aquéllos de la fila inferior corresponden al flujo en la zona de inundación izquierda.
Columna 15. Pendiente de fricción, la cual es igual a $(Q/K)^2$, donde Q = 431,000 pies³/s y K corresponde a la columna 10.
Columna 16. Valor de $-S_1\Delta x_d/2$, donde S_1 es el valor de la columna 15 y Δx_d es el valor superior de la columna 3.
Columna 17. Valor de $S_2\Delta x_u/2$, donde S_2 es el valor de la columna 15 y Δx_u es el valor inferior de la columna 3.
Columna 18. Valor de $F(Z_1)$, que es igual a la suma del valor de la columna 14 y el valor de la columna 16.
Columna 19. Valor de $F(Z_2)$, que es igual a la suma del valor de la columna 14 y el valor de la columna 17.
Columna 20. Suma de los valores de Z de la columna 4 y de $F(Z_1)$ de la columna 18.
Columna 21. La suma de los valores de Z de la columna 4 y de $F(Z_2)$ de la columna 19.

El segundo paso es graficar curvas de $Z + F(Z)$ contra Z para cada una de las secciones transversales, utilizando los valores de las columnas 4, 20 y 21 de la tabla 10-11. Las curvas resultantes se muestran en la figura 10-14.

El tercer paso es determinar las elevaciones de la superficie del agua a partir de las curvas $Z + F(Z)$. En la sección 1, para una elevación inicial de la superficie del agua de 752.25, el valor de $Z_2 + F(Z_2)$ en la curva apropiada (figura 10-14) es 754.14. Llevando este valor a la curva $Z_1 + F(Z_1)$ correspondiente a la siguiente sección 2 hacia aguas arriba, el valor de la elevación de la superficie de agua correspondiente es 752.72. Continuando el procedimiento para otras secciones, los valores se calculan en la dirección mostrada por la línea punteada de la figura 10-14. En la tabla 10-12 se tabulan los resultados de la determinación de la elevación en la superficie del agua. Éstos son muy parecidos a los obtenidos mediante el método del paso estándar.

Tabla 10-11. Cálculo de $Z_1 + F(Z_1)$ y $Z_2 + F(Z_2)$ para el ejemplo 10-12 (río Missouri en Kansas City, Missouri; Q = 431,000 pies³/s)

Sec. No.	Milla de río	Δx_d / Δx_u	Z	A	P	R	$R^{2/3}$	n	K	$\frac{K^3}{A^2}$	α	V	$\alpha\frac{V^2}{2g}$	S_f	$-\frac{1}{2}S_1\Delta x_d$	$\frac{1}{2}S_2\Delta x_u$	$F(Z_1)$	$F(Z_2)$	$Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
1	377.58	....	752.0	38,100	910	41.9	12.06	0.025	274 × 10⁵	142 × 10¹¹										
		1,060	....	6,000	496	12.1	5.27	0.050	9 × 10⁵	0										
				44,100					283 × 10⁵	142 × 10¹¹	1.22	9.77	1.81	0.000232	......	0.12	....	1.93	......	753.93
			753.0	39,000	911	42.8	12.24	0.025	284 × 10⁵	150 × 10¹¹										
				6,500	499	13.0	5.53	0.050	11 × 10⁵	0										
				45,500					295 × 10⁵	150 × 10¹¹	1.21	9.48	1.69	0.000213	......	0.11	....	1.80	......	754.80
			754.0	39,900	912	43.7	12.41	0.025	295 × 10⁵	162 × 10¹¹										
				7,000	502	13.9	5.78	0.050	12 × 10⁵	0										
				46,900					307 × 10⁵	162 × 10¹¹	1.23	9.19	1.61	0.000197	......	0.10	....	1.71	......	755.71
2	377.78	1,060	752.0	41,000	1,320	31.0	9.87	0.025	241 × 10⁵	83 × 10¹¹										
		845		2,500	209	12.0	5.24	0.050	4 × 10⁵	0										
				43,500					245 × 10⁵	83 × 10¹¹	1.07	9.91	1.63	0.000311	−0.17	0.13	1.46	1.76	753.46	753.73
			753.0	42,300	1,325	32.0	10.08	0.025	254 × 10⁵	92 × 10¹¹										
				2,700	213	12.5	5.39	0.050	4 × 10⁵	0										
				45,000					258 × 10⁵	92 × 10¹¹	1.08	9.58	1.54	0.000280	−0.15	0.12	1.39	1.66	754.39	754.66
			754.0	43,600	1,330	32.8	10.25	0.025	267 × 10⁵	100 × 10¹¹										
				2,900	217	13.4	5.64	0.050	5 × 10⁵	0										
				46,500					272 × 10⁵	100 × 10¹¹	1.08	9.27	1.44	0.000252	−0.13	0.11	1.31	1.55	755.31	755.55

Tabla 10-11. Cálculo de $Z_1 + F(Z_1)$ y $Z_2 + F(Z_2)$ para el ejemplo 10-12 *(continuación)*

Sec. No.	Milla de río	Δx_d Δx_u	Z	A	P	R	$R^{2/3}$	n	K	$\frac{K^2}{A^3}$	α	V	$\alpha \frac{V^2}{2g}$	S_f	$-\frac{1}{2}S_1 \Delta x_d$	$\frac{1}{2}S_2 \Delta x_u$	$F(Z_1)$	$F(Z_2)$	$Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
3	377.94	845	752.0	48,300	1,577	30.6	9.78	0.025	281×10^5	95×10^{11}										
		2,060		1,200	120	10.0	4.64	0.050	2×10^5	0										
				49,500					283×10^5	95×10^{11}	1.03	8.70	1.21	0.000232	−0.10	0.24	1.11	1.45	753.11	753.45
			753.0	49,900	1,581	31.5	9.97	0.025	297×10^5	105×10^{11}										
				1,300	124	10.5	4.80	0.050	2×10^5	0										
				51,200					299×10^5	105×10^{11}	1.03	8.42	1.13	0.000208	−0.09	0.21	1.04	1.34	754.04	754.34
			754.0	51,400	1,585	32.5	10.18	0.025	312×10^5	115×10^{11}										
				1,400	128	11.0	4.95	0.050	2×10^5	0										
				52,800					314×10^5	115×10^{11}	1.04	8.17	1.08	0.000189	−0.08	0.19	1.00	1.27	755.00	755.27
4	378.33	2,060	752.0	61,400	2,163	28.4	9.31	0.025	344×10^5	....	1.00	7.02	0.77	0.000157	−0.16	0.13	0.61	0.90	752.61	752.90
		1,690	753.0	63,500	2,172	29.2	9.48	0.025	360×10^5	....	1.00	6.78	0.71	0.000144	−0.15	0.12	0.56	0.83	753.56	753.83
			754.0	65,700	2,181	30.1	9.68	0.025	380×10^5	....	1.00	6.57	0.67	0.000128	−0.13	0.11	0.54	0.78	754.54	754.78
5	378.65	1.690	752.0	59,100	2,084	28.5	9.33	0.025	330×10^5	103×10^{11}										
				7,200	745	9.8	4.58	0.050	10×10^5	0										
				66,300					340×10^5	103×10^{11}	1.15	6.50	0.76	0.000160	−0.14	....	0.62	....	752.62	
			753.0	61,200	2,085	29.3	9.50	0.025	347×10^5	112×10^{11}										
				7,900	749	10.6	4.83	0.050	11×10^5	0										
				69,100					358×10^5	112×10^{11}	1.17	6.23	0.70	0.000145	−0.12	....	0.58	....	753.58	
			754.0	63,300	2,087	30.3	9.72	0.025	367×10^5	123×10^{11}										
				8,700	753	11.6	5.12	0.050	12×10^5	0										
				72,000					379×10^5	123×10^{11}	1.17	5.99	0.65	0.000129	−0.11	....	0.54	....	754.54	

Tabla 10-12. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-12 mediante el método de Ezra (río Missouri en Kansas City, Missouri; Q = 431,000 pies³/s)

Sec. no.	Milla de río	$Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$	Elevación de la superficie de agua **Z**, pies s.n.m
1	377.58	......	754.14	752.25
2	377.78	754.14	754.41	752.72
3	377.94	754.41	754.68	753.38
4	378.33	754.68	754.93	754.15
5	378.65	754.93	......	754.43

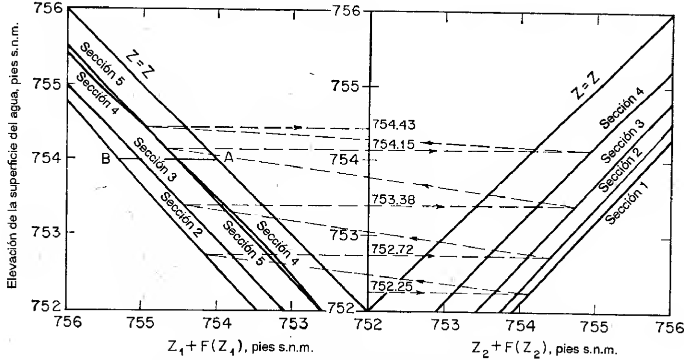


Figura 10-14. Curvas de $Z + F(Z)$ para el ejemplo

Ejemplo 10-13. Resuelva el problema del ejemplo 10-12 para un caudal de 500,000 pies³/s La elevación de la superficie del agua inicial correspondiente a la sección 1 se estimó de la curva de calibración y es igual a un valor de 752.30.

Solución. Los valores de $F(Z_1)$ y $F(Z_2)$ para Q = 500,000 pies³/s pueden obtenerse multiplicando los valores correspondientes de la tabla 10-11 por $(500{,}000/431{,}000)^2 = 1.34$. Los valores así obtenidos se tabulan en las columnas 3 y 4 de la tabla 10-13, respectivamente, y los valores de $Z_1 + F(Z_1)$ y $Z_2 + F(Z_2)$ en las columnas 5 y 6, respectivamente.

Luego se grafican las curvas $Z + F(Z)$ (figura 10-15). Éstos también se obtienen mediante un método gráfico simple. En la figura 10-14 pueden dibujarse líneas rectas $Z = Z$ en las curvas $Z + F(Z)$. Por ejemplo, con referencia a la curva para la sección 2, la intersección AB entre la línea $Z = Z$ y la curva $Z + F(Z)$ es igual a $F(Z)$ para Q = 431,000 pies³/s en la elevación de la superficie del agua 754.00. Esta intersección multiplicada por 1.34 da la intersección correspondiente $A'B'$ en la figura 10-15 para la misma elevación pero diferente caudal. De esta manera el punto B' y, por consiguiente, las curvas $Z + F(Z)$ para Q = 500,000 pies³/s pueden graficarse. A partir de estas curvas se determinan las elevaciones de la superficie de aguas requeridas, como se muestra en la tabla 10-14.

Tabla 10-13. Cálculo de $Z + F(Z)$ para el ejemplo 10-13 (río Missouri en Kansas City, Missouri; Q = 500,000 pies³/s)

Sec. No.	Z	$F(Z_1)$	$F(Z_2)$	$Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	752	....	2.59	......	754.59
	753	....	2.41	......	755.41
	754	....	2.29	......	756.29
2	752	1.96	2.36	753.96	754.36
	753	1.86	2.22	754.86	755.22
	754	1.78	2.08	755.78	756.08
3	752	1.49	1.94	753.49	753.94
	753	1.40	1.80	754.40	754.80
	754	1.34	1.70	755.34	755.70
4	752	0.82	1.21	752.82	753.21
	753	0.75	1.11	753.75	754.11
	754	0.73	1.05	754.73	755.05
5	752	0.83	....	752.83	......
	753	0.78	....	753.78	......
	754	0.73	....	754.73	......

Tabla 10-14. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-13 mediante el método de Ezra, pérdidas por remolinos incluidas en las pérdidas por fricción (río Missouri en Kansas City, Missouri; Q = 500,000 pies³/s)

Sec. No.	No. de Milla de río	$Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$	Elevación de la superficie de agua Z, pies s.n.m
1	377.58		754.83	752.30
2	377.78	754.83	755.20	752.97
3	377.94	755.20	755.56	753.84
4	378.33	755.56	755.83	754.80
5	378.65	755.83		755.18

Ejemplo 10-14. Resuelva el problema del ejemplo 10-12 tratando por separado las pérdidas por remolino. Se supone que los valores del coeficiente de rugosidad n no incluyen los efectos por pérdidas de remolinos y que estos últimos se calculan como el 50% del cambio en la altura de velocidad cuando ésta decrece hacia aguas abajo o como el 10% del incremento en la altura de velocidad cuando ésta crece hacia aguas abajo.

Solución. Las curvas $Z + F(Z)$ construidas para el ejemplo 10-12 (figura 10-14) también son aplicables a esta solución. El cálculo para la determinación de la elevación de la superficie del agua se tabula en la tabla 10-15, en la cual los números entre paréntesis indican el orden de los pasos de cálculo. Las curvas de 0.5 $\alpha V^2/2g$ y 0.1 $\alpha V^2/2g$ se grafican después (figura 10-16). Estas curvas se utilizan para corregir pérdidas por remolinos, como se explicó antes (sección 10-5).

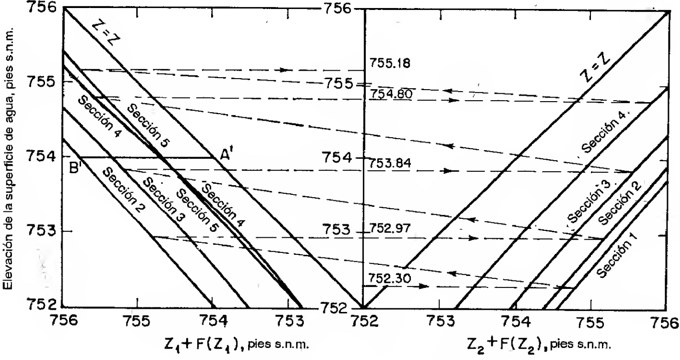


Figura 10-15. Curvas de $Z + F(Z)$ para el ejemplo 10-13

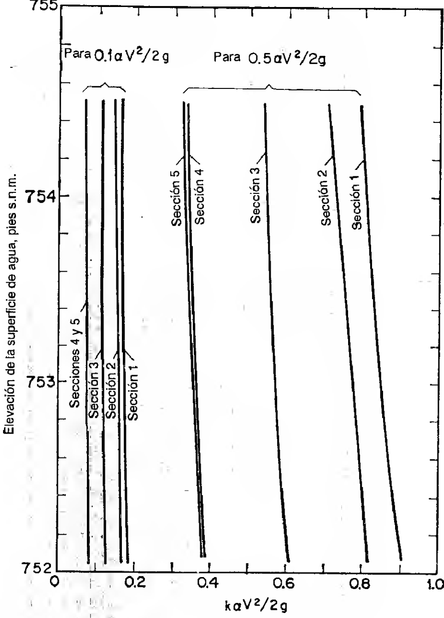


Figura 10-16. Corrección de pérdidas por remolinos para ser aplicada a $Z_2 + F(Z_2)$

Tabla 10-15. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 10-14 mediante el método de Ezra, que trata por separado las pérdidas por remolinos (río Missouri en Kansas City, Missouri; Q = 431,000 pies³/s)

Sec. No.	Milla de río	$Z_1 + F(Z_1)$	Corregido $Z_1 + F(Z_1)$	$Z_2 + F(Z_2)$	$0.5\alpha \frac{V^2}{2g}$	$0.1\alpha \frac{V^2}{2g}$	h_e	$Z_2 + F(Z_2) + h_e$	Valor de prueba de Z	Valor corregido de Z
1	377.58	....	....	(2) 754.14	(3) 0.89	(4) 0.18	....	(12) 754.16	(1)* 752.25	(5) 752.25
2	377.78	(6) 754.14	(13) 754.16	(8) 754.42	(9) 0.78	(10) 0.16	(11) 0.02	(21) 754.47	(7) 752.72	(14) 752.74
3	377.94	(15) 754.42	(22) 754.47	(17) 754.71	(18) 0.56	(19) 0.11	(20) 0.05	(30) 754.75	(16) 753.40	(23) 753.45
4	378.33	(24) 754.71	(31) 754.75	(26) 754.93	(27) 0.34	(28) 0.07	(29) 0.04	(38) 754.94	(25) 754.18	(32) 754.22
5	378.65	(33) 754.93	(39) 754.94	....	(35) 0.32	(36) 0.06	(37) 0.01	....	(34) 754.43	(40) 754.44

* Los números en paréntesis indican el orden de los pasos de cálculo

Empezando en la sección 1 con una elevación de la superficie del agua de 752.25 (*véase* paso 1 en la tabla 10-15), el valor de $Z_2 + F(Z_2)$ en la curva $Z_2 + Z(Z_2)$ para la sección 1 es 754.14 (*véase* paso 2). Los valores correspondientes de $0.5\,\alpha V^2/2g$ y $0.1\,\alpha V^2/2g$ se encuentran en la figura 10-16, y son 0.89 (*véase* paso 3) y 0.18 (*véase* paso 4), respectivamente. Llevando el valor de 754.14 a la curva $Z_1 + F(Z_1)$ para la siguiente sección 2 aguas arriba (*véase* paso 6), la elevación de la superficie de agua correspondiente es 752.72 (*véase* paso 7) y el valor de $0.5\,\alpha V^2/2g$ es 0.78 (*véase* paso 9) y el de $0.1\,\alpha V^2/2g$ es 0.16 (*véase* paso 10). Como la velocidad aumenta hacia aguas abajo (o disminuye hacia aguas arriba), la pérdida por remolinos es 0.18 – 0.16 = 0.02 (*véase* paso 11). Con el fin de incluir el efecto de estas pérdidas por remolino se suma 0.02 a 754.14 (*véase* paso 12) el cual fue el valor encontrado previamente para $Z_2 + F(Z_2)$ en la sección 1. El valor resultante es 754.16 (*véase* paso 13). Con referencia a la curva $Z_1 + F(Z_1)$ para la sección 2 con este valor, la elevación de la superficie de agua es 752.74 (*véase* paso 14).

Al repetir el procedimiento anterior y al corregir las respectivas pérdidas por remolino se obtiene la elevación de la superficie del agua para todas las secciones dentro del tramo.

PROBLEMAS

10-1. Demuestre que el perfil de flujo en un canal horizontal ancho puede expresarse como

$$x = \frac{\alpha C^2}{g}\left(y - \frac{y^4}{4y_c^3}\right) + \text{const.} \qquad (10\text{-}61)$$

donde C es el factor de resistencia de Chézy.

10-2. Demuestre que la condición para la existencia de un punto de inflexión en el perfil de flujo puede expresarse como

$$Mu^N - N\left(\frac{y_n}{y_c}\right)^M u^M + N - M = 0 \qquad (10\text{-}62)$$

10-3. Complete el cálculo del perfil de flujo del ejemplo 10-2.

10-4. Complete el cálculo del perfil de flujo del ejemplo 10-5 y compare el resultado con el del problema 10-3.

10-5. Demuestre que el perfil de flujo en un canal rectangular sin fricción puede expresarse eomo:

$$x = \frac{y}{2S_0}\left[2 - 3\frac{y_c}{y} + \left(\frac{y_c}{y}\right)^3\right] + \text{const.} \qquad (10\text{-}63)$$

10-6. Resuelva el ejemplo 10-1 suponiendo que α = 1.0 y examine el efecto del valor de α en la forma del perfil de flujo. Utilice:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-7. Calcule el perfil de flujo en el canal descrito en el ejemplo 10-1 si S_0 = 0.0169. Suponga que el perfil empieza en el sitio de presa con una profundidad de 5 pies y termina aguas arriba con una profundidad crítica. Utilice:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-8. Una caída libre en lugar de la presa controla la profundidad en el extremo de aguas abajo del canal descrito en el ejemplo 10-1. Calcule el perfil de flujo desde el control hasta una sección aguas arriba donde la profundidad de flujo es 1% menor que la profundidad normal, mediante:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa

c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-9. Si la pendiente de un canal que tiene las propiedades de sección descritas en el ejemplo 10-1 tiene un quiebre que cambia de 0.0016 en el lado de aguas arriba a 0.0169 en el lado de aguas abajo, calcule el perfil de flujo en el lado de aguas abajo desde el quiebre hasta una sección donde la profundidad es 1% mayor que la profundidad normal. Utilice:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-10. Si la pendiente de un canal que tiene las propiedades de sección descritas en el ejemplo 10-1 tiene un quiebre que cambia de 0.0169 en el lado de aguas arriba a 0.0016 en el lado de aguas abajo, calcule el perfil de flujo en el lado de aguas abajo desde el sitio del quiebre hasta una sección crítica. Se supone que el flujo en el canal de aguas arriba es uniforme. Utilice:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-11. Resuelva el ejemplo 10-3 si $S_0 = 0.0016$, mediante:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-12. Resuelva el ejemplo 10-3 si $S_0 = 0.0169$, mediante:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-13. Resuelva el ejemplo 10-3 si $S_0 = 0$, mediante:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-14. Si el canal descrito en el problema 10-8 es horizontal, calcule el perfil de flujo desde la sección de control hasta una sección aguas arriba donde la profundidad del flujo es 10 pies. Utilice:

a. El método de integración gráfica
b. El método de integración directa
c. El método del paso directo
d. El método del paso estándar

10-15. Resuelva el problema 10-14 si $S_0 = -0.0016$.

10-16. Resuelva el ejemplo 10-8 si $\alpha = 1.10$.

10-17. Resuelva el ejemplo 10-8 mediante el método de integración numérica, utilizando la tabla para la función de flujo variado (apéndice D).

10-18. Un vertedero trapezoidal prismático en tierra con pendientes laterales de 3:1 descarga 1,500 pies³/s. El fondo del vertedero es horizontal y tiene 200 pies de largo y 75 pies de ancho en el tramo entre una sección de control crítica aguas abajo y el embalse aguas arriba. Se estima que el *n* de Manning es 0.035. Mediante cualquiera de los métodos dados en este capítulo, determinar:

a. El perfil de flujo entre el embalse y la sección de control.
b. La pérdida por fricción a través de vertedero medida en pies.
c. La elevación del nivel del embalse.

10-19. Un vertedero trapezoidal prismático en tierra con pendientes laterales de 3:1 y un ancho en la base de 75 pies descarga 1,500 pies³/s. El fondo del vertedero es horizontal aguas arriba de una sección de control crítica a lo largo de una distancia de 90 pies y una pendiente adversa de 10:1 a lo largo de una distancia de 100 pies aguas arriba del embalse. El *n* de Manning es 0.035. Mediante cualquiera de los métodos dados en este capítulo, determinar:

a. El perfil de flujo en el vertedero.
b. La línea de energía en el vertedero

10-20. Resolver el problema del ejemplo 10-10 mediante el método del paso estándar, para un caudal de diseño de 500,000 pies³/s.

10-21. Lleve a cabo el cálculo del ejemplo 10-11 rompiendo el tramo 1-5 en cuatro tramos cortos correspondientes a las secciones intermedias.

10-22. Resuelva el problema del ejemplo 10-11 mediante el método nivel-caída-caudal para un caudal de diseño de 500,000 pies³/s.

10-23. Resuelva el ejemplo 10-1 mediante el método nivel-caída-caudal.

10-24. Resuelva el ejemplo 10-1 mediante el método de Ezra.

10-25. Resuelva el ejemplo 10-1 utilizando el método de Ezra si $Q = 500$ pies³/s.

REFERENCIAS

1. A. J. E. J. Dupuit, *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux* (*Theoretical and practical studies on flow of water*), 2ª ed. Paris, 1863.
2. J. A. Ch. Bresse, *Cours de mécanique appliquée*, 2ª parte, "Hydraulique" (*Course in applied mechanics*, Parte 2, "Hydraulics"), Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
3. F. Grashof, *Theoretische Maschinenlehre* (*Theoretical course on machines*), Vol. 1, Leipzig, 1875.
4. M. Rühlmann, *Hydromechanik* (*Hydromechanics*), Hahnsche Buchhandlung, 1ª ed., Leipzig, 1857; 2ª ed. Hanover, 1880.
5. G. Tolkmitt, *Grundlagen der Wasserbaukunst* (*Fundamentals of hydraulic engineering*), Ernst & Sohn, Berlin, 1898.
6. U. Masoni, *Corso di Idraulica Teorica e Pratica* (*Course of theoretical and practical hydraulics*), 2ª ed., Naples, 1900.
7. Boris A. Bakhmeteff, *O Neravnomernom Dvizhenii Zhidkosti v Otkrytom Rusle* (*Varied flow in open channels*), St. Petersburg, Russia, 1912.
8. Boris A. Bakhmeteff, *Hydraulics of open channels*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932.
9. Philipp Forchheimer, *Hydraulik* (*Hydraulics*), 1ª ed., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1914.
10. E. Baticle, "Nouvelle méthode pour la détermination des courbes de remous" ("New method for the determination of backwater curves"), *Le Génie civil*, Vol. 79, Nº 23, diciembre 3 de 1921, pp. 488-492; Nº 24, diciembre 10 de 1921, pp. 515-516.
11. Josef Kozeny, "Berechnung der Senkungskurve in regelmässigen breiten Gerinnen" ("Computation of surface curve in uniform broad channels"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 23, Nº 16, Munich, agosto 15 de 1928, pp. 232-234.
12. Armin Schoklitsch, *Wasserbau* (*Hydraulic structures*), Vol. 1, traducido del alemán por Samuel Shulits, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1934, p. 105.
13. Nagaho Mononobe, "Back-water and drop-down curves for uniform channels", *Transactions*, Vol. 103, *American Society of Civil Engineers*, 1938, pp. 950-989.
14. Ming Lee, "Steady gradually varied flow in uniform channels on mild slopes", tesis de Ph.D., University of Illinois, Urbana, 1947.
15. Ming Lee, Harold E. Babbitt, y E. Robert Baumann, "Gradually varied flow in uniform channels on mild slopes", *University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin Series Nº 404*, Vol. 50, Nº 28, noviembre de 1952.
16. M. E. von Seggern, "Integrating the equation of nonuniform flow", *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 71-88.

17. Clint J. Keifer y Henry Hsien Chu, "Backwater functions by numerical integration", *Transactions*, Vol. 120, American Society of Civil Engineers, 1955, pp. 429-442.
18. Ven Te Chow, "Integrating the equation of gradually varied flow", artículo 838, *Proceedings*, Vol. 81, *American Society of Civil Engineers*, noviembre de 1955, pp. 1-32. Análisis por Clint J. Keifer y Henry Hsien Chu, Robert Y. D. Chun, Masashi Hom-ma, Allan Newman, y Steponas Kolupaila, artículo 955, *Journal, Hydraulics Division*, Vol. 82, Nº HY2, abril de 1956, pp. 51-60; correcciones en p. 60. Análisis por R. Silvester y Alfred S. Harrison, artículo 1010, Vol. 82, Nº HY3, junio de 1956, pp. 13-21. Análisis por el autor, artículo 1177, Vol. 83, Nº HY1 de febrero de 1957, pp. 9-22.
19. I. I. Levi, "Gidravlicheskie pokazateli rusla i ikh prilozhenie k teorii neravnomernogo dvizheniia zhidkosti v otkrytykh kanalakh i ruslakh" ("The hydraulic exponents of channels and their application to the theory of nonuniform flow in open channel"), *Vestnik Irrigatsii* (*Herald of Irrigation*), Tashkent, URSS, Nº 2, 1925, pp. 35-49.
20. Arthur E. Matzke, "Varied flow in open channels of adverse slope", *Transactions*, Vol. 102, *American Society of Civil Engineers*, 1937, pp. 651-660.
21. M. D. Chertousov, *Gidravlika: Spetsialnyl Kurs* (*Hydraulics, special course*), Gosenergoizdat, Moscow, 1957.
22. V. J. Charnomskiî, "Zadachi na ustanovivsheiesia neravnomernoie techenie vody v otkrytykh ruslakh s priamolineinym i trapetsoidalnym poperechnym secheniem" ("Problems on steady nonuniform flow of water in open channels with straight-lined trapezoidal cross section"), *Trudy Varshavskago Politekhnicheskago Instituta*, Warsaw, 1914.
23. Alva G. Husted, "New method of computing backwater and drop-down curves", *Engineering News-Record*, Vol. 92, Nº 17, abril 24 de 1924, pp. 719-722.
24. H. R. Leach, "New methods for the solution of backwater problems", *Engineering News-Record*, Vol. 82, Nº 16, abril de 1919, pp. 768-770.
25. Arthur A. Ezra, "A direct step method for computing water-surface profiles", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 453-462.
26. Francis F. Escoffier, "Graphic calculation of backwater eliminates solution by trial", *Engineering News-Record*, Vol. 136, Nº 26, junio 27 de 1946, p. 71.
27. N. Raytchine y P. Chatelain, "Détermination graphique de la ligne d'eau et calcul des remous" ("Graphical determination of backwater curves"), *La Houille blanche*, año 5, Nº 3, Grenoble, mayo-junio de 1950, pp. 373-379.
28. Josef Frank, "Graphische Berechnung von Wasserspiegel-Linien" ("Graphical calculation of water flow profiles"), *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 102, Nº 6, Zürich, agosto 5 de 1933, pp. 65-71.
29. "Hydrologic and hydraulic analysis: computation of backwater curves in river channels", *Engineering Manual for Civil Works Construction*, Parte CXIV, Capítulo 9, *U.S. Army Corps of Engineers*, mayo de 1952.
30. C. I. Grimm, "Backwater slopes above dams", *Engineering News-Record*, Vol. 100, Nº 23, junio 7 de 1928, p. 902.
31. I. H. Steinberg, "The nomograph as an aid in computing backwater curves", *Civil Engineering*, Vol. 9, Nº 6, junio de 1939, pp. 365-366.
32. Sherman M. Woodward y Chester J. Posey, *Hydraulics of Steady Flow in Open Channels*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941, pp. 103-107.
33. L. E. Jones, "The $Q/\sqrt{F}$ technique in open channel hydraulics", *Proceedings of the 2d. Midwestern Conference of Fluid Mechanics, The Ohio State University, Engineering Experiment Station, Bulletin 149*, septiembre de 1952, pp. 81-87.
34. A. N. Rakhmanoff, "O postroenii krivykh svobodnoî poverkhnosti dlia estestvennykh vodotokov pri ustanovivshemsia dvizhenii" ("On the construction of curves of free surface for natural streams at steady flow"), *Izvestiia Nauchno*, Melioratsionnogo Instituta (*Transactions*, Scientific Institute of Reclamation), Nº 21, 1930.
35. J. Chabert, *Calcul des courbes de remous* (*Calculations of Backwater Curves*), Éditions Eyrolles, Paris, 1955. Esta referencia ofrece varios métodos de cálculo del perfil de flujo, incluidos algunos que no se estudian en este libro.

CAPÍTULO 11

PROBLEMAS PRÁCTICOS

11-1. Entrega de un canal con flujo subcrítico. Cuando un canal conecta dos embalses que tienen niveles variables, el caudal en el canal bajo diferentes condiciones de niveles en los embalses se conoce como *entrega* del canal; este problema fue estudiado por Bakhmeteff [1]. Bakhmeteff ha tratado este tema para canales prismáticos con flujo subcrítico bajo tres casos generales. Los casos se clasifican de acuerdo con la condición de tres variables: la profundidad de flujo y_1 en el extremo de aguas arriba del canal, la profundidad de flujo y_2 en el extremo de aguas abajo del canal, y el caudal Q en el canal.

A. Caso de y_1 constante. En este caso el nivel del agua en el extremo de aguas arriba del canal no cambia (figura 11-1). Se supone que la profundidad y_1 permanece constante, debido a un nivel A de embalse constante; en tanto que y_2, determinado por el nivel B, fluctúa. En la figura 11-1 también se muestran los perfiles de flujo para diferentes condiciones de y_2 y los caudales Q correspondientes. La relación entre y_2 y Q se conoce como *curva de entrega* $Q = f(y_2)$. Las diferentes condiciones de flujo pueden describirse como siguen.

1. FLUJO UNIFORME. Cuando $y_2 = y_1 = y_n$, el flujo es uniforme, y su superficie se representa por una línea recta *an* paralela al fondo del canal. El caudal normal correspondiente Q_n se indica en la curva de entrega. El valor de este caudal es $Q_n = K_n \sqrt{S_0}$, donde K_n es la conductividad de la sección transversal con una profundidad y_2 igual a y_1 y donde S_0 es la pendiente de fondo.

2. FLUJO DE CAUDAL MÁXIMO. Cuando y_2 es igual a la profundidad crítica y_c en la sección 2, el caudal alcanzará su máximo valor posible, debido a que y_2 no puede ser menor que y_c y el caudal es máximo. Si el nivel B del embalse aguas abajo cae por debajo de la profundidad y_c, ocurrirá una caída libre en esa profundidad. El caudal, como se indica en la curva de entrega, es igual al caudal crítico en la sección 2, o $Q_c = Z_c \sqrt{g}$, donde Z_c es el factor de sección para la sección transversal 2.

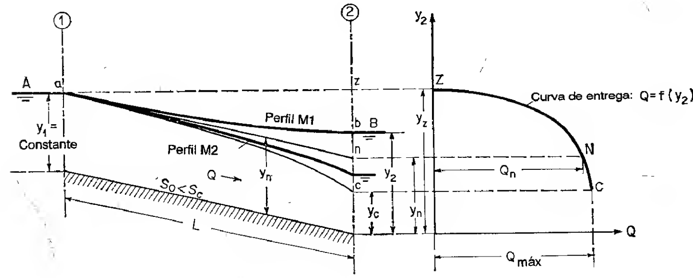


Figura 11-1. Entrega de un canal con flujo subcrítico y y_1 constante.

Para la determinación del caudal máximo se requiere un cálculo por tanteos. El procedimiento primero toma una serie de caudales, empezando por Q_n y aumentando. Luego, haciendo $y_2 = y_c$ en cada caso, se determina el y_1 correspondiente. El caudal que hace y_1 igual a la profundidad determinada en el extremo de aguas arriba es el $Q_{máx}$ requerido.

3. FLUJO CON PERFIL $M1$. Cuando $y_2 > y_n$, el perfil de flujo es del tipo $M1$. El límite superior de esta curva es un nivel horizontal, indicado por az; en esta condición el caudal es cero, debido a que la altura o diferencia entre los niveles de los embalses es cero. Para $y_2 > y_z$, el flujo reversará su dirección. El límite inferior del perfil $M1$ es, obviamente, la superficie de flujo uniforme an. Para cualquier flujo intermedio entre estos dos límites, la profundidad y_2 y su caudal correspondiente pueden determinarse mediante un cálculo por tanteos del perfil de flujo. El procedimiento consiste en suponer primero un caudal menor que Q_n y luego calcular la profundidad y_2 correspondiente. En consecuencia, puede graficarse la curva de entrega.

4. FLUJO CON PERFIL $M2$. Cuando $y_2 < y_n$, el perfil de flujo pertenece al tipo $M2$. En efecto, el límite inferior es la superficie de flujo crítico ac. La relación y_2-Q puede determinarse mediante el procedimiento descrito para el perfil $M1$ anterior.

A partir de la curva de entrega resulta evidente que la parte NC de la curva es muy empinada, de tal manera que $Q_{máx}$ excede Q_n sólo en una pequeña cantidad. Más adelante se verá que esto es cierto para la mayor parte de los casos prácticos excepto para canales muy cortos o muy planos. Con referencia a la figura 11-2 se supone que el punto final d de la curva límite de $M2$ se localiza a una profundidad de $0.99y_n$. Si la longitud L del canal es mayor que la longitud L' del perfil M2 limitante, entonces ningún cambio en y_2 entre y_c y y_n afectará la condición aguas arriba del punto d; es decir, el caudal será el mismo. Siempre y cuando $L > L'$, el caudal máximo $Q_{máx}$ será casi igual a Q_n, es decir, la parte NC de la curva de entrega correspondiente será vertical. La ecuación del perfil de flujo indica que la longitud del perfil de flujo es inversamente proporcional a la pendiente del fondo; cuanto más pequeña sea la pendiente, más largo será el perfil, y viceversa. Por esta razón, reducir la pendiente produce un efecto similar al de acortar el canal. Por consiguiente, para propósitos prácticos puede suponerse que *el caudal máximo posible en un canal largo o en un canal con una pendiente no muy pequeña es igual al caudal normal.*

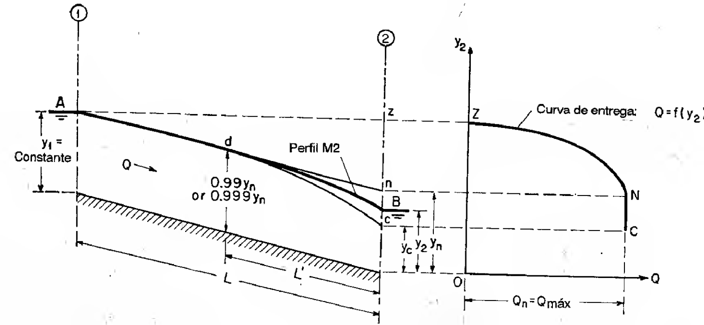


Figura 11-2. Entrega de un canal cuya longitud excede la longitud de la caída del perfil $M2$.

B. Caso de y_2 constante. En este caso el nivel del agua en el extremo de aguas abajo del canal, o la profundidad y_2, es constante, en tanto que y_1 fluctúa. En la figura 11-3 se muestra la curva de entrega correspondiente $Q = f(y_1)$.

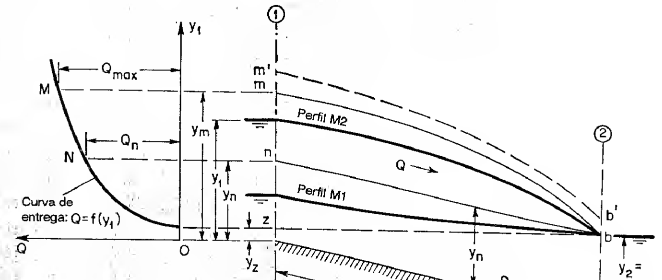


Figura 11-3. Entrega de un canal con flujo subcrítico y y_2 constante.

1. FLUJO UNIFORME. Cuando $y_1 = y_2 = y_n$, el flujo es uniforme, el perfil de flujo nb es paralelo al fondo del canal y el caudal Q_n corresponde al punto N en la curva de entrega. El valor de Q_n es igual a $K_n\sqrt{S_0}$, donde K_n es la conductividad de la sección transversal 1 con una profundidad $y_1 = y_2$ y donde S_0 es la pendiente de fondo.

2. FLUJO DE CAUDAL MÁXIMO. Cuando y_1 alcanza una profundidad y_m que corresponde al caudal crítico en la sección 2, el caudal se vuelve máximo.

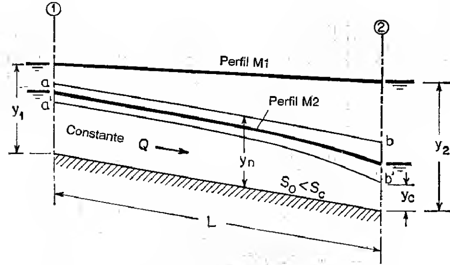
Cualquier profundidad $y_1 > y_m$ está fuera de consideración, debido a que simplemente subiría el perfil *mb* hasta la posición mostrada por la línea punteada *m'b'* y, en consecuencia, requeriría un incremento en la profundidad y_2 de aguas abajo. El valor de $Q_{máx}$ es igual al caudal crítico en la sección 2, o $Z_c \sqrt{g}$, donde Z_c es el factor de sección para la sección 2 con una profundidad igual a y_2.

3. FLUJO CON PERFIL *M*1. Para cualquier profundidad $y_1 < y_n$, el perfil de flujo pertenece al tipo *M*1, y el caudal es menor que Q_n. El límite más bajo posible para y_1 es y_z; en esta condición el perfil de flujo es horizontal y el caudal es cero.

4. FLUJO CON PERFIL *M*2. Para cualquier profundidad y_1 que varía entre y_m y y_n, el perfil de flujo pertenece al tipo *M*2, y el caudal es menor que $Q_{máx}$ pero mayor que Q_n.

C. Caso de Q constante. En este caso la entrega de canal es constante, en tanto que los niveles de los embalses en los dos extremos del canal fluctúan.

1. FLUJO UNIFORME. En la figura 11-4 se esquematizan varios perfiles de flujo posibles. Cuando $y_1 = y_2 = y_n$, el flujo es uniforme y la superficie es una línea recta *ab* paralela al fondo del canal. Esta profundidad normal y_n puede determinarse mediante la ecuación de Manning para un determinado caudal constante Q.



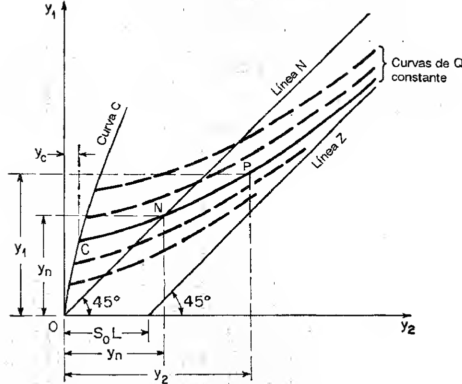


Figura 11-4. Entrega de un canal con flujo subcrítico y Q constante.

2. FLUJO CON PERFIL *M*1. Para posiciones por encima de *ab*, el perfil de flujo pertenece al tipo *M*1. El límite superior para el perfil *M*1 es una línea horizontal; en esta posición y_2 se aproxima a $y_1 + S_0L$ como límite. A medida que esta condición se alcanza, decrece la diferencia entre los niveles de los embalses y por consiguiente de la altura o velocidad de flujo. Sin embargo, el área mojada aumenta a medida que las profundidades aumentan, en tanto que el caudal, como un producto del área y de la velocidad, todavía puede permanecer constante e igual a un valor determinado.

3. FLUJO CON PERFIL *M*2. Para las posiciones por debajo de *ab*, el perfil de flujo es del tipo *M*2. La menor posición posible del perfil *M*2 es *a'b'*; en esta posición y_2 es igual a la profundidad crítica correspondiente al caudal Q determinado.

La curva Q constante. La relación entre las profundidades y_1 y y_2 para Q constante puede graficarse (figura 11-4). La curva resultante *CNP* se conoce como *curva Q constante*. Algunas otras curvas auxiliares también se han construido para hacer aún más claros algunos aspectos característicos de la curva Q constante.

La *línea N* es una línea recta dibujada desde el origen de coordenadas e inclinada un ángulo de 45° con respecto a los ejes coordenados. Esta línea es el lugar geométrico de la profundidad normal para todos los caudales. Para cualquier punto sobre esta línea, $y_1 = y_2 = y_n$. La curva Q constante interseca esta línea en el punto N donde $y_1 = y_2 = y_n$, que es la profundidad normal para el caudal Q determinado.

La *curva C* es la curva sobre la cual y_2 es igual a la profundidad crítica y_c de la sección transversal 2 para un determinado caudal y sobre la cual y_1 es la profundidad correspondiente en la sección 1. Es claro que y_2 no puede ser menor que y_c de la sección 2 para el determinado caudal Q. Por consiguiente, la curva Q constante termina en el punto C sobre esta curva que hace que $y_2 = y_c$ en la sección 2 para el caudal Q.

La *línea Z* es una línea recta dibujada paralela a la línea N desde un punto sobre el eje y_2 a una distancia $S_0 L$ desde el origen 0. Esta línea representa la condición $y_2 = y_1 + S_0 L$, o el límite superior del perfil *M*1. Luego la curva Q constante se aproxima a esta línea de manera asintótica desde la izquierda cuando tanto y_1 como y_2 se vuelven muy grandes.

Las coordenadas y_1 y y_2 de cualquier punto P sobre la curva Q constante para un determinado caudal Q pueden determinarse mediante un cálculo de perfil de flujo. Por lo general, cuando se localizan los puntos C y N y uno o dos puntos adicionales, puede dibujarse suavemente la curva Q constante.

Al graficar una serie de curvas Q constante para diferentes caudales, como las líneas punteadas, puede obtenerse un cuadro general que representa todas las condiciones posibles de flujo en el canal determinado.

11-2. Entrega de un canal con flujo supercrítico. Cuando la pendiente del canal es empinada, es decir, mayor que la pendiente crítica, el flujo en el canal se vuelve supercrítico (figura 11-5). En aplicaciones prácticas, a menudo los canales empinados son cortos, como las rápidas y canales de descarga que se utilizan en vertederos. Si el canal es muy empinado, de tal modo que se desarrolla un flujo ultrarrápido, el flujo deja de ser permanente. El estudio de un flujo no permanente en canales está por fuera del alcance de este capítulo.

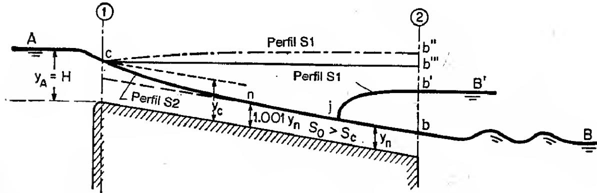


Figura 11-5. Entrega de un canal con flujo supercrítico.

A. Caudal. Como la sección de control en un canal con flujo supercrítico se localiza en el extremo de aguas arriba, la entrega del canal está controlada en su totalidad por el caudal crítico en la sección 1, el cual simplemente es igual al caudal a través de un vertedero.

B. Perfil de flujo. El tipo de perfil de flujo desarrollado en un canal empinado depende de la condición aguas abajo.

1. Cuando el nivel *B* de aguas abajo es menor que la profundidad de salida en la sección 2, el flujo en el canal no se afecta por el nivel de aguas abajo. El perfil de flujo pasa a través de la profundidad crítica cerca al punto *c*, desde una forma convexa a una forma cóncava y se aproxima a la profundidad normal por medio de una curva de caída suave de tipo *S*2. Como regla, la curva de caída *cn* es comparativamente corta y y_n es el nivel más bajo posible en el canal. En el diseño de este tipo de canales, la profundidad normal se hace igual a la profundidad requerida para pasar un bote flotante o para permitir efectos de socavación.

2. Cuando el nivel *B* de aguas abajo es mayor que la profundidad de salida, el nivel de aguas abajo aumentará el nivel de agua en la parte de aguas abajo del canal para formar un perfil *S*1 entre *j* y *b'*, produciendo un resalto hidráulico en el extremo *j* del perfil. Sin embargo, el flujo aguas arriba del resalto no se afectará por el nivel de aguas abajo.

3. A medida que el nivel de aguas abajo aumenta, el resalto se mueve hacia aguas arriba, manteniendo su altura y forma en la zona *nb* de flujo uniforme hasta que alcanza el punto *n*. De ahí en adelante, el resalto se moverá hacia aguas arriba sobre la curva *cn*, a la vez que disminuye gradualmente su altura. La altura del resalto se vuelve cero cuando éste alcanza la profundidad crítica en *c*. Entre tanto, el perfil de flujo alcanza su límite teórico *cb''* del perfil *S*1. Más allá de este límite el flujo entrante se afectará directamente por el nivel de aguas abajo y la entrada actúa como un vertedero sumergido. En cálculos prácticos la línea horizontal *cb'''* puede tomarse como el límite práctico del nivel de aguas abajo. Esto evitará el cálculo de *b'''b''* y también dará un margen de seguridad.

11-3. Problemas relacionados con el diseño de canales. El conocimiento de la entrega de un canal, como se describió en las secciones anteriores, tiene aplicaciones útiles para el diseño hidráulico de canales. Algunos problemas importantes relacionados con tales aplicaciones se describen a continuación.

A. Cambio en la profundidad debido a una entrega cambiante. En el diseño de un canal a menudo es necesario que el ingeniero anticipe la fluctuación en la profundidad de flujo debido a cualquier cambio en la entrega. Esta fluctuación en la profundidad puede estimarse con facilidad a partir de la curva de entrega del canal para un rango de fluctuaciones en el caudal.

En la mayor parte de los casos, excepto cuando el canal es muy corto o cuando el fondo del canal es inusualmente plano, el canal puede diseñarse para una condición de flujo uniforme, debido a que el caudal máximo será casi igual al caudal normal. El procedimiento de diseño de canales bajo flujo uniforme se estudió en el capítulo 7. La relación entre profundidad y caudal puede obtenerse fácilmente con base en cualquier ecuación de flujo uniforme, como la ecuación de Manning.

Cuando un canal se diseña para conducir agua desde un embalse con un nivel de piscina constante hacia un canal de servicio en el extremo de aguas abajo, el caudal en el canal debe cubrir la demanda variable, cuando y como se requiera en el canal de servicio (figura 11-6). Con un flujo subcrítico, éste cae en el caso de y_1 constante (caso *A* de la sección 11-1), en el cual se mantiene constante la profundidad de aguas arriba en tanto que la profundidad de aguas abajo fluctúa. Las curvas de entrega mostradas en la figura 11-6 explicarán cómo estas fluctuaciones en la profundidad del extremo de aguas abajo, causadas por la variación en el caudal de servicio demandado, pueden reducirse. El método consiste simplemente en incrementar la pendiente del fondo del canal. Esto incrementa el caudal normal, y la curva de entrega cambiará su posición desde *ZNC* hasta *ZN'C'*. Es claro que para el mismo rango de $Q_{máx}$ hasta $Q_{mín}$, la fluctuación en la pofundidad $\Delta y'$ se reduce y se vuelve menor que Δy.

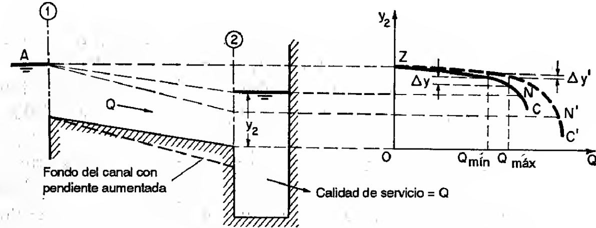


Figura 11-6. Canal diseñado para caudales de servicio variables.

B. Condiciones de salida y de entrada. En las secciones anteriores, la entrega de un canal se relacionó con las profundidades y_1 y y_2 en los extremos del canal; pero las condiciones que acompañan el flujo de entrada o el flujo de salida de agua no fueron consideradas.

1. SALIDA. Cuando el canal llega a un embalse, una cantidad de energía cinética igual a $\alpha V_2^2/2g$, contenida en el flujo de agua, debe ser reconvertida en

energía potencial. Por tanto, el nivel del embalse debe ser mayor en esta cantidad que la profundidad a la salida del canal (figura 11-7*a*). Sin embargo, esta energía a menudo se disipa por completo en remolinos y vórtices. En cálculos prácticos puede ignorarse, y y_2 puede tomarse igual a y_B. Si la salida está acompañada de una caída hidráulica (figura 11-7*b*) y si $y_B < y_2$, la profundidad y_2 es igual a la profundidad crítica y_c de la sección 2, sin importar la posición *B* del nivel del embalse.

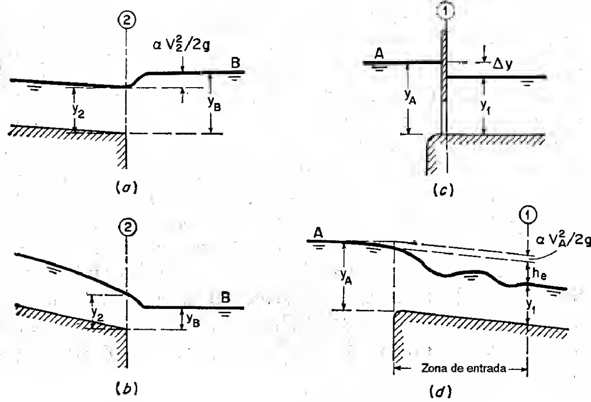


Figura 11-7. Condiciones de salida y de entrada.

2. ENTRADA REGULADA. Cuando la entrada se regula mediante una compuerta deslizante o mediante cualquier otra estructura (figura 11-7*c*), la profundidad y_1 es independiente de la posición *A* del nivel del embalse aguas arriba. La diferencia Δy entre y_A y y_1 puede ajustarse por criterio o depender del diseño de la entrada.

3. ENTRADA LIBRE. Cuando el agua entra libremente a un canal de pendiente suave (figura 11-7*d*), la profundidad y_1 se relaciona con el nivel estático *A* del embalse mediante la ley de energía. La relación entre las profundidades y_1 y y_A puede expresarse mediante

$$y_A = y_1 + h_e + \alpha \frac{V_A^2}{2g} \tag{11-1}$$

donde $\alpha V_A^2/2g$ es la altura de velocidad del flujo de aproximación, la cual por lo general es una cantidad pequeña que puede no considerarse. Luego,

$$y_A = y_1 + h_e \tag{11-2}$$

Para flujo subcrítico, el término h_e es la pérdida de altura debida a la fricció y puede expresarse en términos de la altura de velocidad de la sección 1, es decir

$$h_e = C_e \frac{V_1^2}{2g} \tag{11-}$$

donde C_e es un coeficiente que tiene un valor promedio de 1.25 para una entrad bien redondeada[1]. Al resolver para V_1 en la ecuación anterior,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{C_e}} \sqrt{2gh_e} \tag{11-}$$

La entrega del canal es igual a

$$Q = V_1 A_1 = \frac{1}{\sqrt{C_e}} A_1 \sqrt{2gh_e} = \frac{1}{\sqrt{C_e}} A_1 \sqrt{2g(y_A - y_1)} \tag{11-}$$

En la mayor parte de los problemas prácticos se da la profundidad y_A en luga de y_1. Por ejemplo, en el caso de una profundidad de aguas arriba constante, caso en la sección 11-1, la profundidad y_A puede darse como una constante. Para cualquie condición determinada de y_A, puede establecerse la relación entre Q y y_1 mediant la ecuación (11-5). Entonces puede construirse una curva que represente est relación. Por medio de esta curva, conocida como *curva de calibración de caudale de entrada*, pueden determinarse las relaciones entre y_A, y_1 y Q.

Para flujo supercrítico, el flujo en la sección 1 es crítico.

El problema se simplifica por el hecho de que la relación entre y_1 y y_A e prácticamente fija, sin importar las pérdidas por fricción en la entrada.

C. Eliminación del resalto hidráulico en un canal empinado. Como se dijo e la sección 11-2, cuando el nivel del embalse de aguas abajo es mayor que l profundidad crítica en un canal empinado, se desarrollará un resalto hidráulico e el canal (figura 11-5). Este resalto es objetable y peligroso, en particular cuando e canal es una rápida para botes o cualquier otra estructura utilizada para transporta un bote desde un embalse aguas arriba hasta un embalse aguas abajo. Bakhmete [1] sugirió que el diseño de un *tramo neutralizador* (figura 11-8) puede ser un solución. En este tramo la pendiente de fondo del canal se hace igual a la pendient crítica. De acuerdo con el caso correspondiente del perfil *C*1 en la figura 9-2, lo niveles de aguas abajo serán líneas casi horizontales[2] que intersecan la superficie d flujo en el canal sin causar ninguna perturbación. En teoría, en el punto de intersec ción existe un resalto de altura cero.

[1] Información sobre las pérdidas de entrada de estructuras pueden encontrarse en algunos text de hidráulica, manuales y otra literatura [2].

[2] Cuando se aplica la ecuación de Chézy, las líneas son teóricamente horizontales.

Figura 11-8. Eliminación del resalto hidráulico mediante el tramo neutralizador de Bakhmeteff.

11-4. Cálculo del perfil de flujo en canales no prismáticos. La teoría y el análisis de flujo gradualmente variado en canales no prismáticos se estudió antes (sección 9-5). La integración de la ecuación diferencial del perfil de flujo para estos flujos es matemáticamente complicada. Si la sección de control es incierta en un problema determinado, su posición puede determinarse mediante el método del punto singular. Para el cálculo del perfil de flujo se recomienda el método de paso. Los cálculos deben proceder hacia aguas arriba desde la sección de control si el flujo es subcrítico y desde aguas abajo de la sección de control si el flujo es supercrítico. El procedimiento de cálculo es prácticamente igual al aplicado a un canal prismático, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11-1. El canal de descarga de un vertedero, como se muestra en la figura 11-9, se ha diseñado tentativamente para la cuenca de desechos en el canal La Tuna, en el condado de Los Angeles, en California[3]. De acuerdo con este diseño, el canal empieza con una sección rectangular en concreto de 140 pies de ancho. Esta base se extiende desde la estación 10 + 00 hasta el umbral de la estación 10 + 45. Desde la estación 10 + 45 hasta la estación 11 + 45 las paredes convergen con curvas circulares hasta un ancho de base de 60 pies. Desde la estación 11 + 45 hasta la estación 15 + 82.50 las paredes convergen en una transición de línea recta hasta un ancho de base de 25 pies. El canal aguas abajo de la transición consiste en una sección rectangular en concreto con un ancho constante de 25 pies. Calcule el perfil de flujo en el canal del vertedero para un caudal de diseño de 6,200 pies^3/s. El control para este caudal fue diseñado de tal manera que ocurra en el umbral de entrada de la estación 10 + 45. Utilice $\alpha = 1$ y $n = 0.014$ para los cálculos.

[3] Los datos para este ejemplo se toman de [3]. Para información adicional, lo siguiente se extrajo de la siguiente referencia. El vertedero fue diseñado para pasar una creciente máxima probable de 19,000 pies^3 con una superficie máxima del agua 5 pies por debajo de la cresta de la presa. El umbral de entrada ancho dará una elevación de umbral máxima para la retención de basuras con una altura de presa mínima. La pendiente del fondo fue diseñada de tal manera que un control o profundidad crítica para 19,000 pies^3/s ocurriera en la base relativamente angosta con un ancho de 65 pies en la estación 11 + 22. Establecer el control en este ancho tan pequeño minimiza la formación de ondas grandes producidas por las paredes rápidamente convergentes. Para una creciente de diseño de 6,200 pies^3/s, las ondas no tendrían efectos adversos, debido a que habría un borde libre disponible más o menos grande. La transición del vertedero fue diseñada para conducir 19,000 pies^3/s con un borde libre de 2.5 pies hasta la estación 13 + 95. Se consideró que esta estación estaba a una distancia segura aguas abajo de la presa para la entrega de los flujos del vertedero. Aguas abajo de la estación 13 + 95, la transición y el canal fueron diseñados para conducir la creciente de diseño de 6,200 pies^3/s con un borde libre mínimo de 1.5 pies. El alineamiento del canal abajo de la transición se proyectó con espirales de transición y el fondo del canal tendrá peraltes en todos los tramos curvos con el fin de mantener la profundidad uniforme de flujo.

Figura 11-9. Diseño tentativo para el vertedero de una cuenca de retención de desechos.

Solución. En este problema el flujo es supercrítico porque la sección de control se localiza en la estación 10 + 45 aguas arriba. La profundidad crítica en esta sección es igual a $y_c = \sqrt[3]{(6{,}200/140)^2/32.2} = 3.93$ pies. Las profundidades críticas en otras secciones también pueden calcularse. Si la profundidad calculada llega a ser mayor que la profundidad crítica correspondiente, el flujo será subcrítico.

En la tabla 11-1 se da el cálculo del perfil de flujo con los siguientes encabezamientos:

Columna 1. Número de estación.

Columna 2. Longitud del tramo en pies, igual a la diferencia entre los dos números de estación en los dos extremos de cada tramo.

Columna 3. Ancho del canal en pies.

Columnas 4 a 16. Igual que los pasos de las columnas 1 a 12 de la tabla 10-4, excepto en una columna extra S_0 (columna 14), debido a que S_0 no es constante a través de toda la longitud del canal en consideración.

Los cálculos se llevan a cabo de manera similar a la utilizada para el método del paso directo, pero se llevan a cabo mediante un proceso de ensayo y error. Se introduce este procedimiento debido a que se involucra una variable adicional para el ancho del canal. En este cálculo se supone la profundidad de flujo y y se entra en cada paso en la columna 4. La profundidad supuesta se considera correcta cuando el valor resultante de Δx de la columna 16 está de acuerdo con la longitud del tramo en la columna 2. Nótese que la profundidad de flujo calculada en este ejemplo se realizó teniendo en cuenta más decimales de los que serían necesarios para propósitos prácticos.

El perfil de flujo calculado de esta manera debe corregirse por incorporación de aire debido a las altas velocidades de flujo que ocurren en el extremo de aguas abajo del canal[4]. Cuando en un canal no prismático ocurre un flujo supercrítico con altas velocidades, es probable que aparezcan ondas estacionarias como resultados de cambios en las fronteras laterales (secciones 17-3 y 17-4).

11-5. Diseño de transiciones. La *transición* en un canal es una estructura diseñada para cambiar la forma o el área de la sección transversal del flujo. En condiciones normales de diseño e instalación prácticamente todos los canales y canaletas requieren alguna estructura de transición desde los cursos de agua y hacia ellos. La función de una estructura de este tipo es evitar pérdidas de energía excesivas, eliminar ondas cruzadas y otras turbulencias y dar seguridad a la estructura y al curso de agua. Cuando la transición se diseña para mantener las líneas de corrientes suaves y aproximadamente paralelas y para minimizar las ondas estacionarias, puede utilizarse la teoría de flujo gradualmente variado para el diseño. La esencia de un diseño de este tipo se estudió antes (secciones 3-5 y 3-8) en conexión con la aplicación de los principios de energía y de *momentum*. En esta sección se hace énfasis en la práctica de diseño.

La forma de la transición puede variar desde muros de entrada rectos perpendiculares al flujo de agua hasta estructuras alabeadas y en formas de línea de corriente muy elaboradas. Los muros de entrada rectos por lo general son satisfactorios para pequeñas estructuras o cuando la altura no es muy significativa. Al considerar criterios económicos, el U. S. Department of Agriculture [5] ensayó una transición de cuadrante de cilindro como un sustituto de una estructura alabeada costosa. La transición de cuadrante de cilindro consiste esencialmente en un par de aletas o paredes verticales circulares, tangentes a los lados del canal y curvándose

[4] L. S. Hall [4] ha propuesto un procedimiento para el cálculo del perfil de flujo en rápidas empinadas con una corrección por atrapamiento de aire. Para una corrección simple, puede utilizarse la ecuación de Douma, ecuación (2-15).

Tabla 11-1. Cálculo del perfil de flujo en un canal no prismático para el ejemplo 11-1 (vertedero en el canal La Tuna, condado de Los Ángeles, California, Q = 6,200 pies^3/s

Estación	Δx	b	y	A	R	$R^{2/3}$	V	$\alpha V^2/2g$	E	ΔE	S_f	$\bar{S}_f$	S_0	$S_0 - \bar{S}_f$	Δx
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
10 + 45		140.0	3.93	550.0	3.72	5.78	11.27	1.97	5.90		0.0019				
10 + 51	6.0	130.0	3.54	460.0	3.36	5.04	13.48	2.82	6.36	0.46	0.0032	0.0026	0.0800	0.0774	5.9
10 + 58	7.0	120.0	3.48	417.5	3.29	4.90	14.85	3.42	6.90	0.54	0.0042	0.0036	0.0800	0.0764	7.1
10 + 65	7.0	110.0	3.58	393.9	3.36	5.04	15.75	3.85	7.43	0.53	0.0043	0.0042	0.0800	0.0758	7.0
10 + 73	8.0	100.0	3.71	371.0	3.45	5.22	16.71	4.33	8.04	0.61	0.0046	0.0045	0.0800	0.0755	8.1
10 + 83	10.0	90.0	3.87	348.2	3.56	5.44	17.80	4.92	8.79	0.75	0.0052	0.0049	0.0800	0.0751	10.0
10 + 95	12.0	80.0	4.08	326.2	3.70	5.72	19.00	5.60	9.68	0.89	0.0056	0.0054	0.0800	0.0746	11.9
11 + 10	15.0	70.0	4.35	304.5	3.87	6.08	20.35	6.44	10.79	1.11	0.0060	0.0058	0.0800	0.0742	15.0
11 + 22	12.0	65.0	4.41	286.7	3.88	6.10	21.62	7.26	11.67	0.88	0.0068	0.0064	0.0800	0.0736	12.0
11 + 45	23.0	60.0	4.28	256.8	3.75	5.83	24.14	9.05	13.33	1.66	0.0088	0.0078	0.0800	0.0722	23.0
12 + 07.5	62.5	55.0	3.123	171.8	2.81	3.97	36.09	20.21	23.33	10.00	0.0290	0.0189	0.1788	0.1599	62.5
12 + 70	62.5	50.0	2.855	142.8	2.57	3.52	43.41	29.27	32.13	8.80	0.0473	0.0381	0.1788	0.1407	62.5
13 + 10	40.0	46.8	2.817	131.8	2.51	3.41	47.04	34.38	37.20	5.07	0.0572	0.0522	0.1788	0.1266	40.0
13 + 32.5	22.5	45.0	2.958	133.1	2.61	3.60	46.61	33.74	36.70	−0.50	0.0532	0.0552	0.0330	−0.0222	22.5
13 + 95	62.5	40.0	3.399	135.9	2.91	4.16	45.62	32.32	35.72	−0.98	0.0442	0.0487	0.0330	−0.0157	62.4
14 + 57.5	62.5	35.0	3.948	138.2	3.22	4.75	44.89	31.28	35.23	−0.49	0.0374	0.0408	0.0330	−0.0078	62.8
15 + 20	62.5	30.0	4.650	139.5	3.55	5.42	44.45	30.69	35.34	0.11	0.0322	0.0348	0.0330	0.0018	61.2
15 + 82.5	62.5	25.0	5.652	141.3	3.89	6.11	43.87	29.88	35.53	0.19	0.0278	0.0300	0.0330	0.0030	63.3

a través de un cuarto de círculo para unirse a los lados del canal. Por la misma razón, la tendencia de la práctica en el U. S. Bureau of Reclamation [6] se ha dirigido hacia la simplificación, con los extremos superiores de los muros y las intersecciones entre las paredes alabeadas y los fondos diseñados como líneas rectas. Sin embargo, simplificaciones adicionales de una forma elaborada sólo se permiten cuando no es necesaria la presencia de un control de áreas mojadas y velocidades y cuando no se desarrolla una acción de ondas por turbulencia excesivas.

Los tipos comunes de transición incluyen transiciones de entrada y de salida entre canales y canaletas; entre canales y túneles, y entre canales y sifones invertidos. Nótese que a menudo ocurre un cambio apreciable en la profundidad de flujo en todos los tipos de transición. Si el cambio en la profundidad o en el ancho es rápido, el flujo se convierte en rápidamente variado y pueden ocurrir ondas estacionarias.

11-6. Transiciones entre canales y canaletas o túneles. Con base en el comportamiento de estructuras existentes, se ha encontrado que los siguientes aspectos son importantes en el diseño. Para una información más completa, el lector debe remitirse a [2], [6] y [7].

A. Proporcionamiento. Para tener una transición bien diseñada deben considerarse las siguientes reglas para las dimensiones:

1. El ángulo máximo óptimo entre el eje del canal y una línea que conecte los lados del canal entre las secciones de entrada y de salida es 12.5°.

2. Evítense los ángulos agudos en la superficie del agua o en la estructura, ya que estos inducirán ondas estacionarias extremas y turbulencia.

B. Pérdidas. La pérdida de energía de una transición está compuesta por *pérdidas de fricción* y *pérdidas de conversión.* Las pérdidas de fricción pueden estimarse por medio de cualquier ecuación de flujo uniforme, como la ecuación de Manning. Esta pérdida a menudo tiene un efecto muy pequeño en el perfil de flujo de la transición y puede ignorarse en el diseño preliminar. La pérdida de conversión generalmente se expresa en términos del cambio en la altura de velocidad entre las secciones de entrada y de salida de la estructura.

Para estructuras de entrada, la velocidad de entrada es menor que la velocidad de salida; por consiguiente, la superficie de agua siempre debe caer por lo menos la diferencia completa entre las alturas de velocidad más una pequeña pérdida por conversión conocida como *pérdida por entrada.* Por consiguiente, la caída $\Delta y'$ en la superficie de agua para estructuras de entrada puede expresarse como

$$\Delta y' = \Delta h_v + c_i \, \Delta h_v = (1 + c_i) \, \Delta h_v \tag{11-6}$$

donde Δh_v es la diferencia en altura de velocidad y c_i es un coeficiente para la pérdida por entrada.

Para estructuras de salida la velocidad se reduce, al menos en parte, con el fin de elevar la superficie de agua. Este aumento en la superficie del agua, conocido como *recuperación de la altura de velocidad,* a menudo va acompañado de una pérdida por conversión conocida como *pérdida por salida.* El aumento $\Delta y'$ en la superficie del agua para estructuras de salida puede expresarse como

$$\Delta y' = \Delta h_v - c_o \, \Delta h_v = (1 - c_o) \, \Delta h_v \tag{11-7}$$

donde c_o es un coeficiente para las pérdidas por salida.

Los valores promedio recomendados para un diseño seguro de c_i y c_o son los siguientes:

Tipo de transición	c_i	c_o
Tipo alabeada	0.10	0.20
Tipo cuadrante de cilindro	0.15	0.25
Tipo simplificado con línea recta .	0.20	0.30
Tipo línea recta	0.30	0.50
Tipo extremos cuadrados	0.30 +	0.75

C. Borde libre. Pueden utilizarse reglas aproximadas para la estimación del borde libre en canales revestidos y no revestidos (sección 7-5). Para profundidades de flujo superiores a 12 pies, debe darse especial consideración al borde libre en la transición.

Las figuras 11-10 y 11-11 muestran, respectivamente, diseños comunes para una transición de entrada desde un canal a una canaleta y para una transición de salida desde una canaleta hasta un canal. El diseño de la transición de entrada se describe en el ejemplo 11-2. El diseño de la transición de salida puede seguir los mismos pasos generales. Sin embargo, el flujo en expansión en la transición de salida a menudo presenta un comportamiento hidráulico especial que no debe ignorarse. En un flujo que se expande la distribución de velocidades en la sección transversal puede ser dispareja en extremo; luego los coeficientes de distribución de velocidades pueden ser sustancialmente mayores que 1.0 y sus valores deben calcularse o suponerse de manera adecuada en el diseño. Además, una distribución no uniforme de velocidades puede causar asimetría en el flujo y por consiguiente, desarrollar socavación en lugares con concentraciones altas de velocidad. Por consiguiente, debe tenerse cuidado en este aspecto cuando la transición se diseña para canales erosionables.

D. Eliminación del resalto hidráulico. La existencia de un resalto hidráulico en una transición puede objetarse si obstaculiza el flujo y consume energía útil. Cuando la transición viene desde un flujo supercrítico a un flujo subcrítico, el resalto hidráulico puede eliminarse mediante proporcionamiento cuidadoso de las dimensiones de la transición (ejemplo 3-4).

En un ejemplo ilustrado por Hinds [7] se diseñó una transición desde un canal segmental hasta un túnel circular para flujo desde un nivel subcrítico a otro subcrítico (figura 11-12). Para el diseño, se hizo una suposición amplia para pérdidas por transisión y fricción y se utilizó un coeficiente de rugosidad seguro para determinar la profundidad de flujo en el túnel. Sin embargo, después de la construcción las pérdidas por transición eran prácticamente insignificantes; luego la profundidad normal de flujo real al llegar a la entrada del túnel era considerablemente menor que el valor supuesto. Como resultado se observó un resalto hidráulico objetable en el interior del túnel. En realidad, la transición debió dimensionarse para eliminar el resalto con base en unas pérdidas por transición insignificantes. Como la estructura ya había sido construída, finalmente el resalto hidráulico se eliminó colocando listones de madera clavados en el fondo del canal, con el fin de incrementar la fricción y elevar la profundidad normal de flujo por encima de la profundidad crítica.

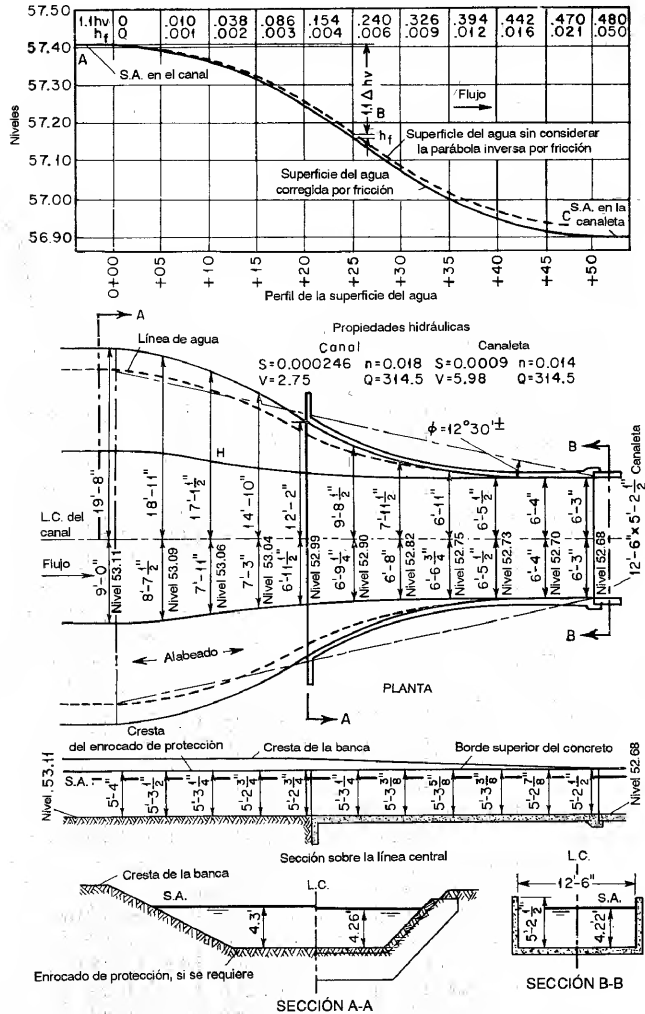


Figura 11-10. Diseño común de una transición de entrada (*según J. Hinds* [2]).

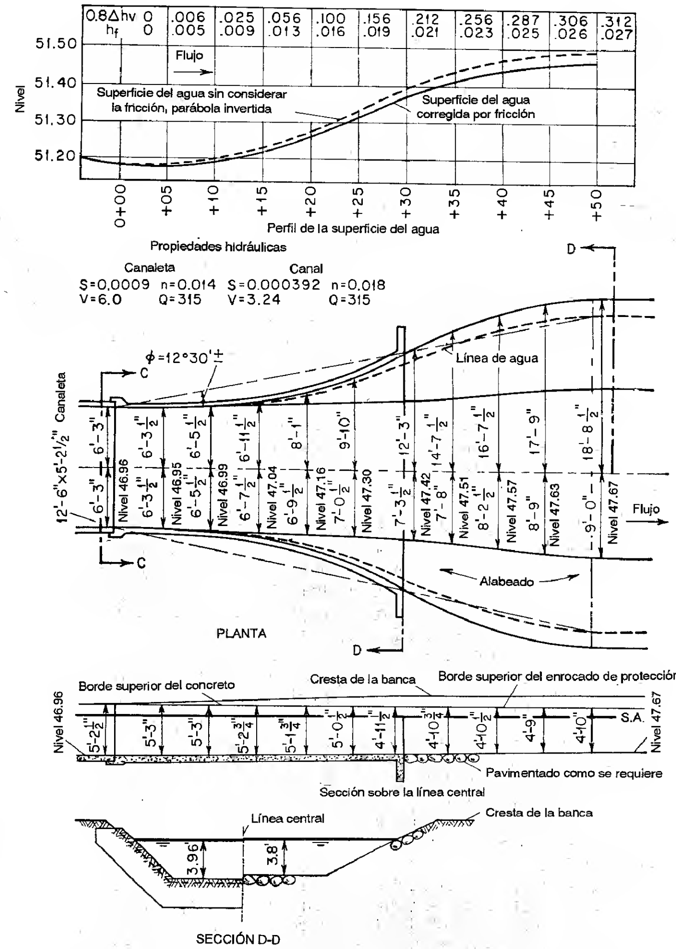


Figura 11-11. Diseño típico de una transición de salida (*según J. Hinds* [2]).

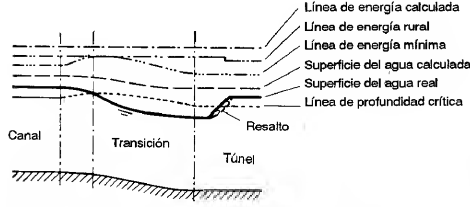


Figura 11-12. Diseño errado de una transición (*según J. Hinds* [7]).

Ejemplo 11-2[5]. Se requiere diseñar una estructura de entrada para conectar un canal de tierra con un ancho en el fondo de 18 pies y pendientes laterales de 2:1 a una canaleta rectangular de concreto de 12 pies 6 pulg de ancho. En la figura 11-10 se dan las propiedades hidráulicas del canal y de la canaleta. El caudal de diseño es 314.5 pies³/s.

Solución. El procedimiento de diseño involucra los siguientes pasos:

1. *Determinación de la longitud de la transición*. La longitud de la transición se determina de tal manera que una línea recta, que una la línea de flujo entre los dos extremos de la transición forme un ángulo aproximado de 12.5° con el eje de la estructura. En el diseño se encontró que esta longitud era 50 pies.

2. *Determinación del perfil de flujo sin considerar la fricción*. Para el tipo de estructura en consideración, con seguridad puede suponerse que las pérdidas por entrada son iguales al 10% del cambio en la altura de velocidad, o $0.1\Delta h_v$. Por consiguiente, la caída total en la superficie del agua es igual a $1.1\Delta h_v$ más la caída necesaria para superar la fricción en el canal. El cambio en la altura de velocidad desde $V = 2.75$ pies/s hasta 5.98 pies/s es igual a $\Delta h_v = 0.553 - 0.117 = 0.436$ pies. Al no considerar por ahora la fricción en el canal, la caída total de superficie del agua es, por consiguiente, $1.10 \times 0.436 = 0.480$ pies.

Para un flujo suave y continuo puede suponerse el perfil de flujo teórico igual a dos parábolas, tangentes la una con respecto a la otra en el punto B y horizontales, respectivamente en A y C. En rigor, las parábolas deben ser tangentes a las superficies de agua en el canal y en la canaleta, pero una pequeña desviación de esta superficie del agua con respecto a la horizontal no es importante en el presente ejemplo.

Se han seleccionado varias secciones a lo largo de la transición, en las cuales se calculará el perfil de flujo y se determinarán las dimensiones estructurales.

3. *Cálculo del perfil de flujo considerando la fricción*. Los cálculos se muestran en la tabla 11-2 con los siguientes encabezamientos:

Columna 1. Número de las estaciones igualmente espaciadas cada 5 pies y medidas en la dirección del flujo.

Columna 2. Caída en la superficie del agua. La caída total en la superficie del agua de A a C, sin considerar la fricción, es 0.480 pies. La caída desde A hasta el punto medio B de la parábola invertida antisimétrica es igual a la mitad de la caída, es decir, 0.240 pies.

Columna 3. Cambio en la altura de velocidad. Al suponer que la pérdida de conversión se distribuye a lo largo de toda la longitud de la transición en proporción al cambio en la altura de velocidad, los valores de Δh_v se obtienen al dividir los valores de $\Delta y'$ en la columna 1 por 1.10.

Columna 4. Altura de velocidad total, igual al valor acumulado de Δh_v que entra en la columna anterior.

Columna 5. Velocidad en pies/s, correspondiente a la altura de velocidad en la columna anterior.

[5] Este ejemplo se tomó de [2].

Tabla 11-2. Cálculo del diseño de una entrada a canaleta para el ejemplo 11-2*

En la canaleta, $V = 5.98$, $h_v = 0.553$ — Elevación de la superficie del agua en la estación 0 + 00 = 57.41

En el canal, $V = 2.75$, $h_v = 0.117$ — Pérdida por entrada

$\Delta h_v = 0.436$ — Se supone la superficie del agua como dos parábolas inversas tangentes a la estación 0 + 25

Estación (1)	$\Delta y'$ (2)	Δh_v (3)	h_v (4)	V (5)	A (6)	$0.5T$ (7)	$0.5b$ (8)	y (9)	R (10)	S_f (11)	Δh_f (12)	$\Sigma\Delta h_f$ (13)	Z (14)	Z_0 (15)	z (16)	Z_L (17)	H_L (18)	$0.5W$ (Calc.) (19)	$0.5W$ (utilizado) (20)
0 + 00	0.000	0.000	0.117	2.75	114.40	17.600	9.000	4.300	3.06	0.00015	......	......	57.410	53.110	2.000	58.440	5.330	19.660	19'8"
0 + 05	0.010	0.009	0.126	2.85	110.50	17.000	8.625	4.309	3.07	0.00016	0.0008	0.0008	57.399	53.090	1.945	58.385	5.295	18.935	18'11"
0 + 10	0.038	0.035	0.152	3.13	100.60	15.427	7.917	4.310	3.04	0.00020	0.0009	0.0017	57.370	53.060	1.744	58.330	5.270	17.127	17'1½"
0 + 15	0.086	0.079	0.196	3.55	88.75	13.460	7.250	4.280	3.00	0.00026	0.0012	0.0029	57.321	53.041	1.447	58.275	5.234	14.825	14'10"
0 + 20	0.154	0.140	0.257	4.07	77.40	11.228	6.958	4.260	2.98	0.00034	0.0015	0.0044	57.252	52.992	1.000	58.220	5.228	12.186	12'2"
0 + 25	0.240	0.218	0.335	4.64	67.88	9.139	6.771	4.264	2.92	0.00045	0.0020	0.0064	57.164	52.900	0.554	58.165	5.265	9.691	9'8½"
0 + 30	0.326	0.296	0.413	5.15	61.20	7.717	6.667	4.252	2.75	0.00061	0.0027	0.0091	57.075	53.823	0.247	58.110	5.287	7.971	7'11½"
0 + 35	0.394	0.357	0.474	5.52	57.10	6.847	6.563	4.253	2.64	0.00074	0.0034	0.0125	57.003	53.750	0.067	58.053	5.305	6.917	6'11"
0 + 40	0.442	0.401	0.518	5.77	54.60	6.458	6.458	4.225	2.56	0.00084	0.0040	0.0165	56.951	52.726	.....	58.000	5.274	6.458	6'5½"
0 + 45	0.470	0.427	0.544	5.91	53.30	6.315	6.315	4.220	2.53	0.00090	0.0044	0.0209	56.919	52.699	.....	59.945	5.246	6.315	6'4"
0 + 50	0.480	0.436	0.553	5.97	52.70	6.250	6.250	4.220	2.52	0.00092	0.0046	0.0255	56.904	52.684	.....	57.890	5.205	6.250	6'3"

* Cálculo con regla de cálculo.

Columna 6. Área mojada en pies², igual al caudal de 314.5 pies³/s dividido por la velocidad de la columna anterior.

Columna 7. Mitad del ancho superficial en pies, obtenido de las secciones transversales del plano (figura 11-10). El plano puede escogerse arbitrariamente o mediante pruebas hasta que se obtengan resultados satisfactorios. La escogencia de una forma apropiada para el plano es un asunto de criterio.

Columna 8. Mitad del ancho del fondo en pies, obtenida del plano bosquejado.

Columna 9. Profundidad del flujo en pies, igual a $A/(0.5T + 0.5b)$.

Columna 10. Radio hidráulico en pies.

Columna 11. Pendiente de fricción, calculada mediante la ecuación (9-8) con $n = 0.014$ para todas las secciones de la transición.

Columna 12. Altura de fricción, igual a la distancia entre estaciones multiplicada por la pendiente de fricción promedio para la sección y la correspondiente a la sección anterior.

Columna 13. Altura de fricción acumulada en pies.

Columna 14. Elevación de la superficie del agua, incluido el efecto de la fricción en el canal, igual a $57.41 - \Delta y' - \sum h_f$. El perfil de flujo así obtenido debe estar libre de irregularidades objetables; si no, debe alterarse el plano. Nótese, sin embargo, que un pequeño cambio en la elevación de la superficie del agua en un punto determinado puede causar un cambio apreciable en las dimensiones de la estructura.

Columna 15. Elevación del fondo del canal, igual a $Z - y$.

4. *Determinación de las dimensiones de la estructura.* Una vez que el esquema del plano bosquejado arbitrariamente para la transición se encuentra satisfactorio, pueden determinarse las dimensiones de la estructura, como se hace en los siguientes encabezamientos de la tabla 11-2:

Columna 16. Pendiente lateral $z = (0.5T - 0.5b)/y$.

Columna 17. Elevación de la parte superior del recubrimiento. La altura recomendada para el recubrimiento por encima de la superficie del agua para un caudal de 314.5 pies³/s es alrededor de 1 pie (figura 7-1). Dibuje una línea recta por encima de la superficie de agua calculada a una distancia promedio de aproximadamente 1 pie. A partir de esta línea se obtiene la elevación Z_L.

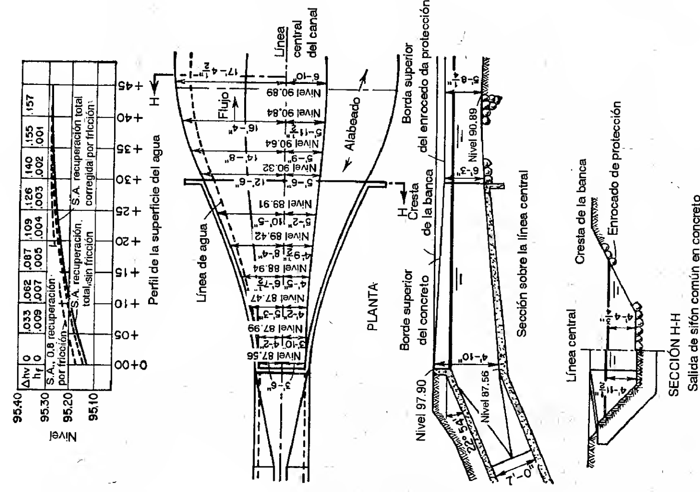
Columna 18. Altura del recubrimiento en pies, igual a $Z_L - Z_0$.

Columna 19. Valor calculado de la mitad del ancho en la parte superior del recubrimiento, igual a $0.5W = zH_L + 0.5b$.

Columna 20. $0.5W$ lo más cercano a 0.5 pulg.

11-7. Transiciones entre canales y sifones invertidos. La figura 11-13 muestra un diseño común de las transiciones de entrada y salida entre canales y sifones invertidos. El método de diseño es similar al de las transiciones entre canal y canaleta. Sin embargo, el U. S. Bureau of Reclamation [6] recomienda los siguientes aspectos especiales para diseño:

1. En el diseño de una transición de entrada, por lo general es conveniente tener la apertura del sifón colocada levemente por debajo del nivel normal de aproximación de la superficie de agua. Esta práctica minimizará la reducción de la capacidad del sifón causada por la introducción de aire en éste. La profundidad de sumergencia en la entrada del sifón se conoce como *sello de agua*. El valor recomendado para este sello se encuentra entre un mínimo de $1.1\Delta h_v$ y un máximo de 18 pulg o $1.5\Delta h_v$, cualquiera de los dos que sea mayor. Nótese que el uso del valor mínimo en una transición bien diseñada teóricamente permite que el flujo apenas toque la parte superior de la abertura del sifón, en tanto que el uso de valores grandes hasta el máximo provee un sello de agua por encima de la parte superior de la apertura. La cantidad adecuada del sello depende de la pendiente, del tamaño y del cuerpo del sifón. Por lo general, un sifón grande y empinado requiere un sello grande. En el diseño ilustrado (figura 11-13) se utiliza un sello de 18 pulg.



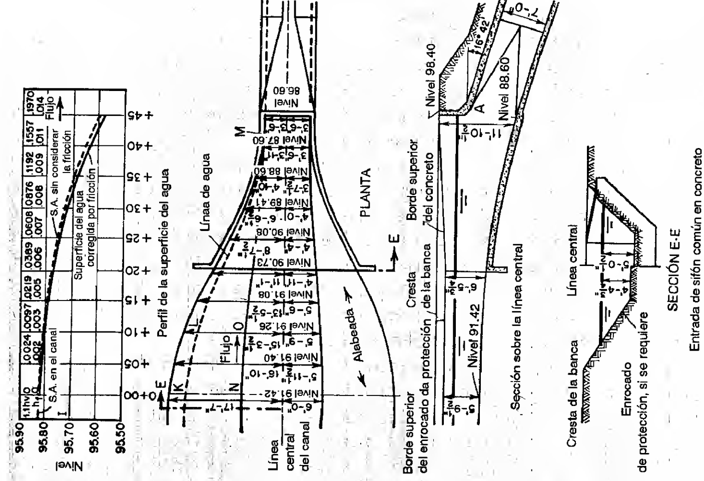


Figura 11-13. Diseño común de transiciones de entrada y de salida para sifones (*según J. Hinds* [2])

Nótese que el sello puede hacer no factible la construcción del extremo inferior de la transición estrictamente de acuerdo con el cálculo hidráulico. Cuando éste es el caso, la elevación del fondo calculada a una pequeña distancia hacia aguas arriba del muro de entrada puede alterarse arbitrariamente para cumplir el requerimiento práctico. En el diseño ilustrado se han efectuado cálculos hasta el final de la transición; más allá de éste el fondo del conducto sólo se extiende suavemente hasta conectar con el fondo del cuerpo del sifón.

Para sifones largos, bajo ciertas condiciones, la entrada puede no estar necesariamente sellada. En consecuencia, puede ocurrir un resalto hidráulico en el cuerpo del sifón y dar como resultado en una condición de operación desfavorable.

2. Una vez que se ha determinado el sello para la estructura de entrada se calcula la velocidad en el muro de entrada, y la caída total en la superficie del agua se toma como 1.1 Δh_v sin considerar las pérdidas por fricción. Luego se supone un perfil de flujo suave, tangente a la superficie de agua en el canal al comienzo de la transición que pasa por el punto en el muro de entrada fijado por los cálculos anteriores. No existen datos disponibles para determinar la mejor forma de perfil de flujo. En el ejemplo ilustrado se supone una parábola simple.

3. En el diseño de la estructura de salida el aumento teórico en la superficie de agua desde el muro de salida hasta el final de la transición, sin considerar las pérdidas por recuperación, debe ser igual al cambio total en la altura de velocidad Δh_v. El perfil de flujo en el diseño ilustrado es una parábola simple.

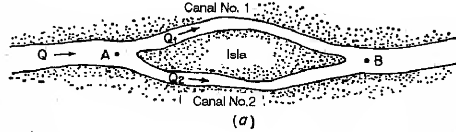
4. En el diseño de la estructura de salida no se necesita que la pendiente de fondo sea tangente a la pendiente del conducto cerrado en el muro de salida como sí lo es en el caso de la entrada, a menos que la velocidad en el sifón sea alta y la pendiente de la transición sea empinada.

11-8. Efecto de remanso de una presa. A menudo es necesario investigar los daños probables causados por el remanso debido a un obstáculo en la corriente, por ejemplo, una presa. Para estudiar este problema es muy útil la llamada *curva envolvente de remanso.* Esta curva representa el lugar geométrico del *punto final* aguas arriba de la curva de remanso (perfil *M*1). En teoría, la curva de remanso se extiende indefinidamente en la dirección aguas arriba, por consiguiente no existe punto final aguas arriba. Sin embargo, para propósitos prácticos, el punto final puede seleccionarse como el lugar donde el aumento en la superficie de agua empieza a causar daño. Éste puede suponerse como el lugar donde la profundidad de flujo es igual a cierta fracción de la profundidad normal, según la naturaleza del problema, por ejemplo, alrededor del 1% mayor que la profundidad normal, o $y = 1.01y_n$. Cuando se permite un borde libre el punto final es el lugar donde la profundidad de flujo es igual a la profundidad normal más el borde libre.

En apariencia, la curva envolvente de remanso empieza en el punto donde el nivel estático del embalse con cero caudal de entrada interseca el fondo del canal. A medida que el flujo de entrada al embalse se incrementa, el punto final de la curva de remanso puede moverse hacia aguas arriba o hacia aguas abajo, según factores como la condición del canal, la forma de la sección transversal, la presencia de planicies de inundación, el efecto de tributarios y el posible cambio en el nivel del embalse. Cuando el nivel del embalse se mantiene constante y el canal es prismático y tiene una sección transversal simple, es más probable que el punto final se mueva

en la dirección aguas abajo a medida que se incrementa el caudal. Un incremento en la rugosidad del canal por lo general da como resultado un movimiento hacia aguas abajo del punto final, debido a que su efecto es reducir la longitud del perfil de flujo. La presencia de planicies de inundación tiene un efecto similar. Sin embargo, en estudios de campo, un punto de tangencia aproximado a la línea de profundidad normal desde la curva de remanso a menudo se toma como el punto final. Este punto se determina simplemente mediante observación visual de los perfiles de flujo dibujados. El punto final definido de este modo por lo general muestra un movimiento hacia aguas arriba cuando el caudal aumenta. Por consiguiente, previamente al estudio de efecto de remanso, debe definirse de manera apropiada el límite superior de dicho efecto con el fin de cumplir la necesidad particular del problema determinado[6].

11-9. Flujo alrededor de islas. Cuando una isla larga divide el flujo de una corriente (figura 11-14*a*), la división de flujo entre los dos canales puede determinarse aproximadamente con la ayuda de cálculos del perfil de flujo.



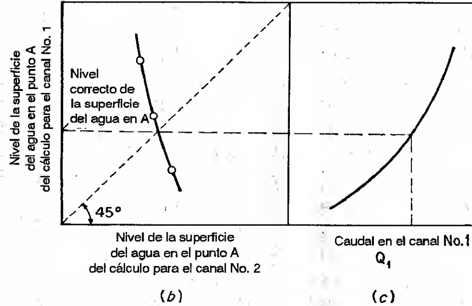


Figura 11-14. Solución para el flujo alrededor de islas.

En el caso ilustrado se considera que el flujo a través de todos los canales es subcrítico. El procedimiento consiste en suponer primero un conjunto de caudales Q_1 y Q_2 para los flujos divididos de tal manera que la suma de los caudales sea igual al caudal total Q. Luego se calcula el perfil de flujo en los dos canales en ambos

[6] Para un estudio adicional *véanse* [8] y [9].

lados de la isla hasta el punto A donde el flujo se divide. Como el flujo es subcrítico, el cálculo debe hacerse desde el punto B donde el flujo dividido se une nuevamente, localizado aguas abajo, hacia aguas arriba. La elevación inicial de la superficie de agua en el punto B puede determinarse a partir de la curva de calibración en esta sección para el caudal total Q. La elevación de la superficie del agua calculada en el punto A para el canal 1 se gráfica contra la misma para el canal 2. Por consiguiente, puede dibujarse una curva (figura 11-14*b*) para varios de los conjuntos de caudales supuestos Q_1 y Q_2 con diferentes proporciones. Como el flujo se divide en el punto A, las dos elevaciones de la superficie de agua calculadas en este punto para los dos canales debe ser igual si la división de flujo supuesta es correcta. Entonces, la elevación en el punto A correspondiente a esta división de flujo correcta puede obtenerse a partir de la curva graficada que es intersecada por una línea punteada que bisecta los ejes coordenados. La línea punteada representa la condición para la cual las dos elevaciones calculadas son iguales. Entre tanto, la elevación calculada en el punto A para el canal 1 se grafica contra el caudal Q_1 (figura 11-14*c*). A partir de esta curva puede obtenerse el caudal correcto Q_1 para la elevación correcta. El caudal correspondiente en el canal 2 es, por consiguiente, igual a $Q_2 = Q - Q_1$.

Si los flujos divididos son supercríticos el punto de control se localizará en A, luego la división de flujo dependerá de las condiciones de entrada en los canales divididos. Durante la condición de flujo normal, puede suponerse que todos los flujos son uniformes, y los flujos divididos pueden determinarse aproximadamente a partir de las siguientes relaciones: $Q_1 = K_1\sqrt{S_1}$, $Q_2 = K_2\sqrt{S_2}$, y $Q = Q_1 + Q_2$.

11-10. Confluencia de ríos. Cuando el cálculo del perfil de flujo se lleva hacia aguas arriba a través de la confluencia de un río y su tributario, es necesario determinar las elevaciones de la superficie del agua inmediatamente aguas arriba de la confluencia. El procedimiento para resolver este problema se ilustra en el ejemplo 10-10 para la confluencia del río Missouri y el río Kansas. En este ejemplo, un caudal de 81,000 pies^3/s del río Kansas se combina con un caudal de 350,000 pies^3/s del río Missouri para dar un caudal total de 431,000 pies^3/s inmediatamente aguas abajo de la confluencia. Las secciones transversales 1K y 6 se localizan inmediatamente aguas arriba de la confluencia de las dos corrientes (figura 10-11). En la tabla 10-8 se calculan por separado, para las dos secciones, los elementos hidráulicos, las alturas de velocidad y las alturas totales. La altura de velocidad en la sección transversal 5 se calcula para un caudal total de 431,000 pies^3/s. Este valor se divide entre las secciones transversales 6 y 1K, correspondientes a los caudales de 350,000 pies^3/s y 81,000 pies^3/s, respectivamente. La pendiente de fricción en cada sección transversal se calcula para el caudal de 81,000 pies^3/s en la sección transversal 1K y para 350,000 pies^3/s para la sección transversal 6. La pérdida de altura de fricción h_f se calcula utilizando el promedio de las pendientes de fricción para las secciones transversales 5 a 1K en el río Kansas y para las secciones transversales 5 a 6 en el río Missouri.

En la confluencia la pérdida por remolinos por lo general es alta. En el ejemplo 10-10 ésta se estimó como el 10% del incremento en la altura de velocidad desde la sección transversal 1K hasta la sección transversal 5, ó 0.10 (0.63 – 0.13) = 0.05 pies. Por consiguiente, la energía total en la sección transversal 5 es igual a $h_f + h_e + H = 0.10 + 0.05 + 755.04 = 755.19$. Al restar la altura de velocidad de este valor da como resultado $755.19 - 0.13 = 755.06$, el cual debe ser igual a la elevación de la superficie del agua supuesta en la sección transversal 1K.

El método anterior debe aplicarse a flujo subcrítico con velocidades relativamente bajas no superiores a 10 pies/s. Para velocidades altas las pérdidas por remolino son altas y el error involucrado en la estimación puede ser bastante significativo.

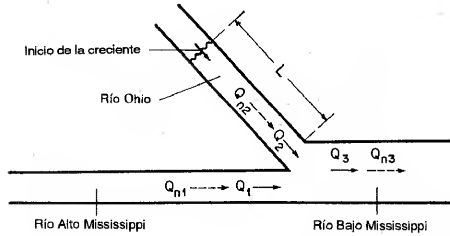
El problema de la confluencia de ríos puede ilustrarse además mediante un ejemplo dado por Stoker [10], utilizando la confluencia de los ríos Ohio y Mississippi (figura 11-15). Las condiciones iniciales de los flujos uniformes en el río Alto Mississippi, el río Ohio y el río Bajo Mississippi son, respectivamente, como sigue: profundidades normales, y_{n1}, y_{n2} y y_{n3}; pendientes del canal S_{01}, S_{02} y S_{03}; y coeficientes de rugosidad n_1, n_2 y n_3. A partir de estos datos pueden calcularse los caudales normales Q_{n1}, Q_{n2} y Q_{n3}. Ahora, se supone que una onda de creciente se inicia en el río Ohio en un lugar localizado L millas aguas arriba de la confluencia, de tal manera que el río Ohio sube sube con rapidez en ese punto desde la profundidad normal inicial y_{n2} hasta una profundidad máxima final y_2. El punto donde se inicia la creciente se muestra en $x = -L$ en el eje coordenado, donde x es la distancia medida desde la confluencia a lo largo del canal. La onda de creciente originada de esta manera se moverá aguas abajo en el río Ohio hasta la confluencia y creará nuevas ondas, las cuales viajarán tanto aguas arriba como aguas abajo en el río Mississippi, y también una onda reflejada que viajará nuevamente hacía el río Ohio. Después de cierto tiempo, se espera que se desarrolle una condición de flujo permanente; en este momento la profundidad de flujo en el lugar de inicio de la creciente se convierte en y_2, pero la profundidad en lugares distantes aguas arriba del río Mississippi permanece como y_{n1}. Como regla general, el efecto de remanso en corrientes largas resultante aún de caudales sustancialmente grandes en sus tributarios no persiste en lugares muy distantes aguas arriba. Por consiguiente, la curva de remanso en el río Alto Mississippi debe ser relativamente corta. En la condición de flujo permanente final se formarán curvas de remanso permanentes en los ríos Ohio y Alto Mississippi. Aguas abajo en el río Mississippi, la profundidad cambiará de y_{n3} a y_3, pero puede suponerse que el flujo permanece uniforme.

El flujo involucrado en el problema antes mencionado se considera subcrítico, el cual es el caso usual y puede verificarse con facilidad mediante el cálculo de los números de Froude. En la condición final de flujo permanente, las siguientes condiciones son evidentes: 1) el caudal en el río Alto Mississippi permanece igual, o $Q_1 = Q_{n1}$; 2) las profundidades en los tres canales en la confluencia son iguales a y_j en $x = 0$; y 3) la suma de los caudales en los ríos Ohio y Alto Mississippi es igual al caudal en el río Bajo Mississippi, $Q_1 + Q_2 = Q_3$. Al suponer un valor de y_j, Q_3 puede calcularse y luego

$$Q_2 = Q_3 - Q_1 = Q_3 - Q_{n1}$$

Como y_j, Q_2 y y_2 son ahora conocidos, entonces puede calcularse la longitud L de la curva de remanso. Si la longitud L calculada coincide con la longitud L determinada, el valor supuesto de y_j es el valor correcto. De otro modo, deben suponerse nuevos valores de y_j hasta que se obtenga un valor correcto. Ésta es una

solución de ensayo y error. Otra solución también puede obtenerse suponiendo Q_2 al inicio y verificando al final y_j o L.



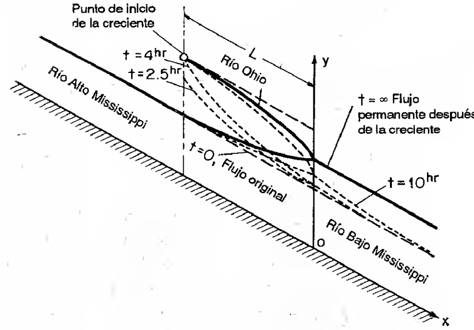


Figura 11-15. Problema de la confluencia en los ríos Ohio y Mississippi.

PROBLEMAS

11-1. Un canal rectangular de 5 pies de ancho y 500 pies de longitud conecta dos embalses con niveles superficiales variables (figura 11-16). Suponiendo un canal sin fricción, construya las curvas de Q constante de $y_1 = f(y_2)$ para Q = 10, 50, 100, 150 y 200 pies³/s respectivamente. La pérdida a la entrada del canal es insignificante.

11-2. Construya las curvas de Q constante para $y_A = f(y_B)$ correspondientes al problema 11-1. El caudal a la entrada puede calcularse mediante $Q = 3bH^{1.5}$, donde b es el ancho del canal y H es la altura total.

11-3. Un canal trapezoidal conecta dos embalses separados 2 millas y tiene b = 50 pies, $z = 2$, $\alpha = 1$, $n = 0.025$ y $S_0 = 0.004$. La profundidad de aguas arriba y_1 se mantiene constante e igual a 6 pies (figura 11-1). Construya la curva de entrega $Q = f(y_2)$.

11-4. Construya la curva de entrega $Q = f(y_1)$ para el problema 11-3, si la profundidad de aguas abajo y_2 se mantiene constante e igual a 6 pies (figura 11-3).

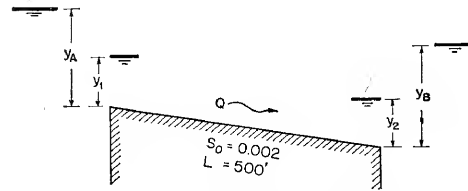


Figura 11-16. Perfil de un canal para el problema 11-1.

11-5. Suponiendo una y_1 variable en el problema 11-3, construya una curva de y_1 contra $Q_{máx}$ para un rango de caudales que varía desde 0 hasta 2,000 pies³/s.

11-6. Suponiendo variables las profundidades y_1 y y_2 en el problema 11-3, construya las curvas de Q constante para caudales con profundidades normales iguales a 2, 4, 6 y 8 pies, respectivamente.

11-7. Resuelva el problema 11-3 si los embalses están separados una distancia de 2,500 pies.

11-8. Resuelva el problema 11-4 si los embalses están separados una distancia de 2,500 pies.

11-9. Resuelva el problema 11-5 si los embalses están separados una distancia de 2,500 pies.

11-10. Resuelva el problema 11-6 si los embalses están separados una distancia de 2,500 pies.

11-11. Construya la curva de entrega $Q = f(y_B)$ para el problema 11-3 si la profundidad del embalse de aguas arriba y_A se mantiene constante e igual a 6 pies. La entrada libre está bien redondeada, es decir, $C_e = 1.25$.

11-12. Construya la curva de entrega $Q = f(y_A)$ para el problema 11-4 si la profundidad del embalse de aguas abajo y_B se mantiene constante e igual a 6 pies $C_e = 1.25$.

11-13. Una rápida rectangular de 20 pies de ancho, tal como fue descrita por Bakhmeteff [1], va a construirse entre los niveles A y B (figura 11-17). Las condiciones de diseño son:

1. La profundidad de aguas abajo fluctúa 8 pies.
2. La profundidad en el tramo empinado debe mantenerse igual a una profundidad mínima de navegación de 2.5 pies.
3. La velocidad promedio no debe ser superior a 14.7 pies/s.
4. El caudal debe mantenerse por debajo de 750 pies³/s.
5. El coeficiente de rugosidad es $n = 0.03$.
6. El caudal a la entrada se calcula mediante una ecuación de vertedero $Q = 0.4\sqrt{2g}\, b y_A^{1.5}$.

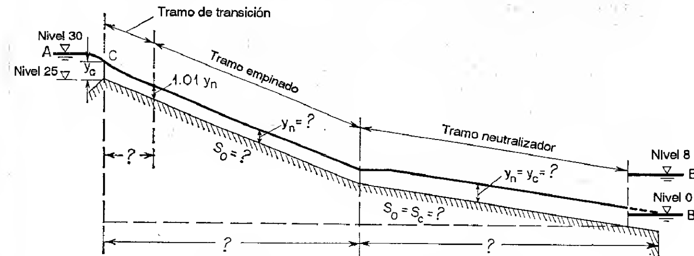


Figura 11-17. Una rápida para el problema 11-13.

Determine los siguientes items mediante la ecuación de Manning y mediante cualquier método de cálculo de perfil de flujo descrito en este libro:

a. La pendiente en el tramo empinado
b. La profundidad de entrada y_A
c. La longitud del perfil de flujo en el tramo de transición
d. La pendiente en el tramo neutralizador
e. La longitud del tramo neutralizador
f. La longitud del tramo empinado

11-14. Corrija el perfil de flujo calculado en el ejemplo 11-1, para tener en cuenta la entrada de aire, mediante la ecuación (2-15).

11-15. Resuelva el ejemplo 11-1 para Q = 19.000 pies³/s.

11-16. Un vertedero trapezoidal en tierra con pendientes laterales 3:1 tiene 190 pies de longitud desde un embalse en la estación 0 + 00 hasta la sección de control crítica aguas abajo en la estación 1 + 90. El fondo del vertedero en la estación 0 + 00 tiene 95 pies de ancho y converge uniformemente a un ancho de 75 pies en la estación 1 + 00. El ancho en el fondo de 75 pies es constante desde la estación 1 + 00 hasta la estación 1 + 90. La pendiente del fondo del vertedero entre la estación 0 + 00 y la estación 1 + 00 es adversa, y es –3% entre la estación 0 + 00 y la estación 0 + 80 y –20% entre la estación 0 + 80 y la estación 1 + 00. El fondo del vertedero es horizontal entre la estación 1 + 00 y la estación 1 + 90. El n de Manning es 0.035. Determine:

a. Los perfiles de flujo para caudales respectivos de 600, 800, 1,000, 1,200, 1,500 y 1,800 pies³/s en el vertedero.

b. La curva que muestra el caudal *versus* la elevación del nivel en el embalse.

c. Las pérdidas por fricción en el vertedero entre el embalse y la sección de control para un caudal de 1,500 pies³/s.

11-17. Revise el diseño de una transición de salida desde una canaleta hacia un canal (figura 11-11). La canaleta y el canal son iguales a aquellos descritos en el ejemplo 11-2.

11-18. Revise el diseño de las transiciones de entrada y de salida de sifón (figura 11-13). Se dan las siguientes propiedades hidráulicas: A = 91.52 pies², R = 2.89 pies, S_0 = 0.0003 y n = 0.0225 para los canales; y A = 38.48 pies², R = 1.75 pies, S_0 = 0.0012 y n = 0.014 para el cuerpo del sifón circular.

11-19. Calcule y construya la curva envolvente de remanso para el remanso causado por una presa de 5 pies en el canal descrito en el ejemplo 10-1, suponiendo el punto final en una profundidad igual a:

a. $1.01y_n$.

b. y_n más un borde libre de 6 pulg.

11-20. Un caudal de 1,000 pies³/s se divide entre dos canales rectangulares excavados en roca. Los canales se unen posteriormente (figura 11-14). El canal 1 tiene 10 pies de ancho y 200 pies de longitud. El canal 2 tiene 15 pies de ancho y 150 pies de longitud. El fondo del canal 2 en promedio es 2 pies más bajo que el del canal 1. Suponiendo n = 0.035 y una caída total en la superficie de agua entre los puntos de medición y unión de los canales igual a 6 pulg, calcule los flujos uniformes divididos.

11-21. Con referencia al problema mostrado en la figura 11-15, se suponen los siguientes datos: $y_{n1} = y_{n2} = y_{n3}$ = 20 pies, $S_{01} = S_{02}$ = 0.5 pies/milla, S_{03} = 0.49 pies/milla, $n_1 = n_2 = n_3$ = 0.03, los anchos de los ríos Ohio y Alto Mississippi son de 1,000 pies, el ancho del río Bajo Mississippi es de 2,000 pies, y_2 = 40 pies y L = 50 millas. Se supone que todos los ríos tienen canales rectangulares. Determine la profundidad en la confluencia y los perfiles de flujo en los ríos después de que la creciente se aproxima a una condición permanente.

REFERENCIAS

1. Boris A. Bakhmeteff, *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932, pp. 143-215.
2. Julian Hinds, "The hydraulic design of flume and siphon transitions", *Transactions*, Vol. 92, *American Society of Civil Engineers*, 1928, pp. 1423-1459.
3. Civil Works, Flood Control in the Los Angeles Area, The Engineer School, Fort Belvoir, Virginia, 1950, E206.09 (4-50) ML, pp. 22-28 and plate 10.
4. L. Standish Hall, "Open channel flow at high velocities", en el simposio "Entrainment of air in flowing water", Transactions, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 1394-1447.
5. Fred C. Scobey, "The flow of water in flumes", *U.S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 393*, diciembre de 1933.
6. "Hydraulic design data", apéndice I en "Canals and related structures", *U.S. Bureau of Reclamation, Design and Construction Manual, Design Supplement Nº 3*, Vol. X, parte 2, parágrafo I-13, 1952.
7. Julian Hinds, "The hydraulic jump and critical depth in the design of hydraulic structures", *Engineering News-Record*, Vol. 85, Nº 22, noviembre 25 de 1920, pp. 1034-1040.
8. Wallace M. Lansford y William D. Mitchell, "An investigation of the backwater profile for steady flow in prismatic channels", *University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin Series Nº 381*, Vol. 46, Nº 51, marzo de 1949.
9. William D. Mitchell, "Stage-fall-discharge relations for steady flow in prismatic channels", *U.S. Geological Survey, Water Supply*, artículo Nº 1164, 1954.
10. J. J. Stoker, "Water waves", Vol. IV de *Pure and Applied Mathematics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957, pp. 456-461.

CAPÍTULO 12

FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

12-1. Principios básicos y suposiciones. El flujo espacialmente (gradualmente) variado, como se definió antes (*véase* sección 1-2), tiene un caudal no uniforme como resultado de la adición o disminución de agua a lo largo del curso del flujo. El agua agregada o extraída causará perturbaciones en el contenido de energía o de *momentum* del flujo. Como resultado, el comportamiento hidráulico de un flujo espacialmente variado es más complicado que el de un flujo con caudal constante. Además, el comportamiento hidráulico del flujo espacialmente variado con caudal creciente es en ciertos aspectos, diferente del flujo similar con caudal decreciente. Por consiguiente, los dos tipos de flujo espacialmente variados se estudiarán por separado.

A. Flujo con caudal creciente. En este tipo de flujo espacialmente variado, una parte apreciable de la pérdida de energía se debe a la mezcla turbulenta del agua agregada y del agua que fluye a través del canal. En la mayor parte de los casos esta mezcla es de una magnitud e incertidumbre relativamente altas. Debido al resultado de pérdidas altas e inciertas la ecuación de *momentum* es más conveniente para la solución de este problema que la ecuación de energía. Desde un punto de vista práctico, la alta pérdida de energía hace que los canales diseñados para flujo espacialmente variado sean hidráulicamente ineficientes, pero algunas veces las circunstancias físicas hacen que el uso de estas estructuras sea más conveniente.

Una forma sustancialmente correcta de la ecuación diferencial fundamental para flujo espacialmente variado con caudal creciente tal vez fue establecida por primera vez por Hinds [1] para el diseño de vertederos de canal lateral. Sin embargo, una ecuación más completa la desarrolló Favre [2, 3], incluidos un término de fricción y una componente de velocidad en el flujo de entrada en la dirección del eje del canal. Los métodos desarrollados por Hinds y Favre son aplicables a cualquier canal, prismático y no prismático, pero en el procedimiento se requiere un cálculo

por pasos con aproximaciones sucesivas. Para canales rectangulares prismáticos con flujo de entrada uniforme a lo largo de la longitud del canal, la ecuación diferencial de flujo la integraron Camp [4] y Li [5]. Li también trató canales prismáticos con paredes inclinadas. Estudios teóricos y experimentales del flujo también fueron realizados por De Marchi [6], Citrini [7], Forchheimer [8], Schoklitsch [9] y otros. En aplicaciones prácticas, la teoría ha cubierto una gran variedad de problemas, desde el estudio del flujo en canaletas de tejados [10] hasta el diseño de canaletas de aguas de lavado en plantas de tratamiento de agua [11, 12] y de vertederos de canal lateral en presas (**figura 12-1**).

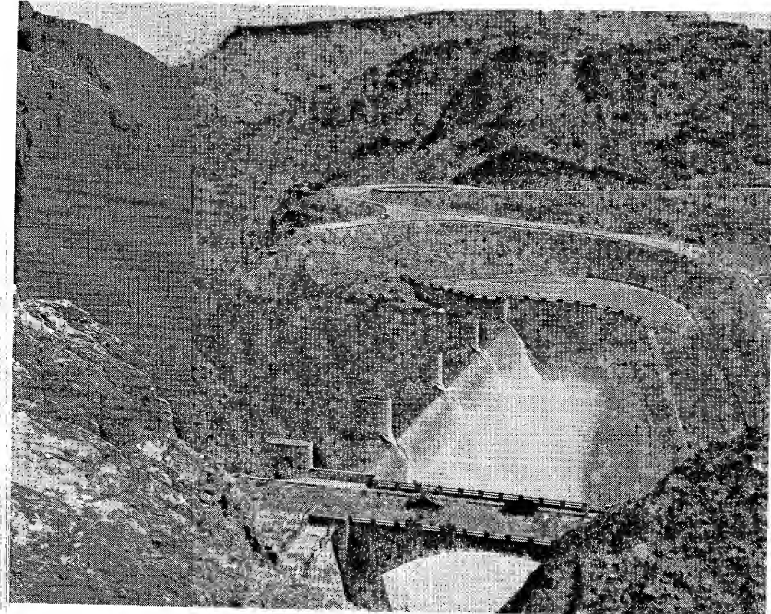


Figura 12-1. El vertedero de canal lateral en el lado de Arizona de la presa Hoover, visto hacia aguas arriba (*U. S. Bureau of Reclamation*).

B. Flujo con caudal decreciente. En lo fundamental, este tipo de flujo espacialmente variado puede tratarse como una desviación de flujo donde el agua desviada no afecta la altura de energía. Este concepto ha sido verificado mediante teoría y experimentos. Por consiguiente, se encontrará que el uso de la ecuación de energía es más conveniente para resolver este problema.

La teoría del flujo espacialmente variado con caudal decreciente tal vez fue empleada por primera vez en el diseño de vertederos laterales o vertederos de pared

delgada laterales. Este tipo de estructura a menudo es una escotadura larga instalada a lo largo del lado del canal con el propósito de desviar o rebosar excesos de flujo. Pruebas de laboratorio en estas estructuras las realizaron por primera vez Engels [13] y Coleman y Smith [14][1]. Forchheimer [15] ha tratado el problema de manera analítica, al suponer que la línea de energía es paralela a la cresta del vertedero y al fondo del canal y también que el perfil de flujo a lo largo de la cresta del vertedero es lineal. En teoría, De Marchi [16, 17] probó que la altura de energía a lo largo de la cresta del vertedero es esencialmente constante y que el perfil de flujo es curvo, aumentando en el flujo subcrítico y disminuyendo en el flujo supercrítico. Gentilini [18] verificó experimentalmente esta investigación teórica. Estudios teóricos y prácticos sobre el flujo también fueron desarrollados y avanzados por Favre [2, 19], Nimmo [20], Noseda [21-23], Schmidt [24-26], Mostkow [27, 28], Ackers [29], Allen [30], Collinge [31], Frazer [32] y muchos otros.

En la deducción de la ecuación de flujo espacialmente variado que se hace en la siguiente sección se harán las siguientes suposiciones:

1. El flujo es unidireccional. En realidad, existen corrientes transversales fuertes en forma de flujo espiral, en particular en canales de vertederos laterales. Los efectos de estas corrientes y su turbulencia acompañante no pueden evaluarse con facilidad, pero se incluirán en los cálculos si se utiliza el principio de *momentum*. El desnivel lateral de la superficie de agua, como resultado de las corrientes transversales, puede ignorarse.

2. La distribución de velocidades a través de la sección del canal es constante y uniforme, es decir, los coeficientes de distribución de velocidades se toman iguales a la unidad. Sin embargo, pueden introducirse valores apropiados para los coeficientes, si es necesario.

3. La presión en el flujo es hidrostática, es decir, el flujo es paralelo. Sin embargo, el flujo a la salida puede ser curvilíneo y puede desviarse sustancialmente de la suposición de flujo paralelo si ocurre una caída hidráulica. En tales casos, pueden introducirse valores apropiados para los coeficientes de distribución de presiones, si es necesario.

4. La pendiente del canal es relativamente pequeña, entonces sus efectos en la altura de presión y en la fuerza en las secciones del canal son insignificantes. Si la pendiente es apreciable, pueden aplicarse correcciones para estos efectos.

5. Se utiliza la ecuación de Manning para evaluar las pérdidas por fricción debidas al esfuerzo cortante desarrollado a lo largo de las paredes del canal.

6. El efecto de atrapamiento de aire es insignificante. Sin embargo, puede aplicarse una corrección al resultado calculado cuando sea necesario.

12-2. Ecuación dinámica para el flujo espacialmente variado. La discusión se da por separado para flujo con caudal creciente y para flujo con caudal decreciente.

[1] Los experimentos de Engels indicaron un aumento y los de Coleman y Smith, por el contrario, una caída del perfil de flujo a lo largo de la cresta del vertedero. Posteriormente De Marchi [16] explicó esta confusión como resultado del hecho de que el flujo era subcrítico en el experimento de Engels pero supercrítico en los experimentos de Coleman y Smith.

A. Flujo con caudal creciente. Con referencia al caudal del vertedero lateral en la figura 12-2, el *momentum* que pasa por la sección 1 por unidad de tiempo es

$$\frac{w}{g} QV$$

donde w es el peso unitario del agua, Q es el caudal y V es la velocidad. De igual modo, el *momentum* que pasa a través de la sección 2 por unidad de tiempo es

$$\frac{w}{g}(Q + dQ)(V + dV)$$

donde dQ es el caudal agregado entre las secciones 1 y 2. Por consiguiente, el cambio de *momentum* en el cuerpo de agua contenido entre las secciones 1 y 2 es igual a

$$\frac{w}{g}(Q + dQ)(V + dV) - \frac{w}{g} QV = \frac{w}{g}[Q\,dV + (V + dV)\,dQ]$$

Figura 12-2. Análisis del flujo espacialmente variado.

Sea W el peso de agua contenido entre las secciones. La componente de W en la dirección de flujo es

$$W \text{ sen } \theta = wS_0(A + \tfrac{1}{2}\,dA)\,dx = wS_0A\,dx$$

donde la pendiente S_0 es igual a sen θ y el término que contiene el producto de diferenciales es insignificante.

La altura de fricción entre las dos secciones es igual a la pendiente de fricción S_f multiplicada por la longitud d_x, o

$$h_f = S_f\,dx$$

donde la pendiente de fricción puede representarse mediante la ecuación de Manning como

$$S_f = \frac{V^2n^2}{2.22R^{4/3}} = \frac{Q^2n^2}{2.22A^2R^{4/3}}$$

La fuerza friccional a lo largo de las paredes del canal es equivalente a la presión debida a la altura de fricción multiplicada por el área promedio (*véase* sección 5-4) o

$$F_f = w(A + \tfrac{1}{2}\, dA)S_f\, dx = wAS_f\, dx$$

donde el producto de los diferenciales es insignificante.

La presión total en la sección 1 correspondiente a la dirección del flujo es igual a la presión hidrostática unitaria en el centroide del área mojada A multiplicada por el área, la cual es equivalente al momento de A alrededor de la superficie libre multiplicado por w, o

$$P_1 = w\bar{z}A$$

donde $\bar{z}$ es la profundidad del centroide de A por debajo de la superficie de flujo. De igual modo, la presión total en la sección 2 es

$$P_2 = w(\bar{z} + dy)A + \frac{w}{2}\, dA\, dy$$

donde dy es la diferencia entre las profundidades de las secciones 1 y 2. Al no considerar el término que contiene diferenciales de alto orden,

$$P_2 = w(\bar{z} + dy)A$$

La presión hidrostática resultante que actúa en el cuerpo de agua entre las secciones 1 y 2 es

$$P_1 - P_2 = -wA\, dy$$

Al igualar el cambio de *momentum* del cuerpo de agua a la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo,

$$\frac{w}{g}[Q\, dV + (V + dV)\, dQ] = P_1 - P_2 + W \operatorname{sen} \theta - F_f \qquad (12\text{-}1)$$

Al no considerar $dV\, dQ$ y al sustituir en la ecuación anterior todas las expresiones para las fuerzas externas dadas anteriormente,

$$dy = -\frac{1}{g}\left(V\, dV + \frac{V}{A}\, dQ\right) + (S_0 - S_f)\, dx \qquad (12\text{-}2)$$

Como $V = Q/A$ y $V + dV = (Q + dQ)\,/\,(A + dA)$, la ecuación anterior se convierte en

$$dy = -\frac{V}{g}\left(\frac{2A\, dQ - Q\, dA + dA\, dQ}{A^2 + A\, dA}\right) + (S_0 - S_f)\, dx \qquad (12\text{-}3)$$

Al no considerar el término dA en el denominador y el término $dA\ dQ$ en el numerador y al simplificar,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - 2Qq_*/gA^2}{1 - Q^2/gA^2D} \qquad (12\text{-}4)$$

donde $q_* = dQ/dx$, o el caudal por unidad de longitud de canal, y D es la profundidad hidráulica. Si se considera una distribución de velocidades no uniforme en la sección del canal, puede introducirse un coeficiente de energía en la ecuación, o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - 2\alpha Qq_*/gA^2}{1 - \alpha Q^2/gA^2D} \qquad (12\text{-}5)$$

Esta es la *ecuación dinámica para flujo espacialmente variado con caudal creciente*. En teoría, debe utilizarse un coeficiente de *momentum* en la ecuación. Sin embargo, se utiliza el coeficiente de energía debido a que la pendiente de fricción S_f se evalúa por medio de una ecuación para pérdidas de energía, como la ecuación de Manning[2]. Cuando $q_* = 0$, esta ecuación se convierte en la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado con caudal constante.

B. Flujo con caudal decreciente. Para el análisis de este tipo de flujo espacialmente variado se aplica el principio de energía. Sea z la distancia del fondo de la sección del canal por encima de un nivel de referencia horizontal (el cual no se muestra en la figura 12-2); la energía total en una sección del canal es

$$H = z + y + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \qquad (12\text{-}6)$$

Al derivar esta ecuación con respecto a x,

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{2g}\left(\frac{2Q\, dQ}{A^2\, dx} - \frac{2Q^2}{A^3}\frac{dA}{dx}\right) \qquad (12\text{-}7)$$

Nótese que $dH/dx = -S_f$, $dz/dx = -S_0$, $dQ/dx = q_*$ y

$$\frac{dA}{dx} = \left(\frac{dA}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{T\, dy}{dx}$$

la ecuación anterior puede reducirse a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \alpha Qq_*/gA^2}{1 - \alpha Q^2/gA^2D} \qquad (12\text{-}8)$$

la cual es la *ecuación dinámica para flujo espacialmente variado con caudal decreciente*. Nótese que esta ecuación se diferencia de la ecuación (12-5) sólo en el coeficiente del tercer término del numerador.

Es interesante saber [33] que el principio de *momentum* también puede utilizarse para la deducción de la ecuación (12-8). En un flujo espacialmente variado con caudal decreciente no se agrega *momentum* al agua. Con un procedimiento similar

[2] Ésta es simplemente una interpretación práctica, que no tiene base teórica.

al de la deducción de la ecuación (12-5), el término que contiene dQ puede eliminarse de la ecuación (12-1); la ecuación resultante será idéntica a la ecuación (12-8).

De igual modo, puede utilizarse el principio de energía para la deducción de la ecuación (12-5). Al aplicar este principio a flujo espacialmente variado con caudal creciente, la energía debida al caudal agregado dQ por longitud elemental dx debe ser sumada a la energía total a lo largo del curso del flujo durante el intervalo de tiempo dt. Esta energía cinética por libra de agua es igual a

$$\frac{\text{masa} \times \text{velocidad}^2}{g \times \text{peso unitario de agua} \times \text{volumen}} = \frac{(w\,dQ\,dt)(\alpha V^2)}{gw(A\,dx)} = \frac{\alpha V\,dQ}{gA}$$

Al sumar este término al lado derecho de la ecuación (12-6) y al derivar, la ecuación resultante será idéntica a la ecuación (12-5).

12-3. Análisis del perfil de flujo. Para estudiar el análisis de perfil de flujo, primero se da un ejemplo simple.

Ejemplo 12-1. Un canal de vertedero lateral es rectangular y horizontal y tiene una salida en caída libre. El flujo de entrada está uniformemente distribuido a lo largo del canal con una tasa de q_* por unidad de longitud del canal. Deduzca la ecuación del perfil de flujo sin considerar la pérdida por fricción.

Solución. En este problema la tasa de flujo de entrada es $q_* = Q_o/L$, donde Q_o es el caudal a la salida y L es la longitud del canal. Luego $dQ = q_* dx$ y $Q = q_* x$. Sea b el ancho del canal; luego $A = by$ y $V = Q/A = q_* x/by$. También, $S_0 = S_f = 0$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación (12-4) y al simplificar,

$$\frac{dx^2}{dy} - \frac{x^2}{y} = -\frac{gb^2y^2}{q_*^2} \qquad (12\text{-}9)$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución general de esta ecuación es

$$x^2 = -\frac{gb^2y^3}{2q_*^2} + cy \qquad (12\text{-}10)$$

donde c es una constante de integración que puede determinarse mediante las condiciones de frontera del perfil de flujo.

En la salida, $x = L$ y $y = y_o$, luego la ecuación (12-10) da

$$c = \frac{1}{y_o}\left(L^2 + \frac{gb^2y_o^3}{2q_*^2}\right) \qquad (12\text{-}11)$$

y la ecuación (12-10) se convierte en

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2\mathbf{F}_o^2}\right)\frac{y}{y_o} - \frac{1}{2\mathbf{F}_o^2}\left(\frac{y}{y_o}\right)^3 \qquad (12\text{-}12)$$

donde

$$\mathbf{F}_o^2 = \frac{q_*^2L^2}{gb^2y_o^3} \qquad (12\text{-}13)$$

Es claro que $\mathbf{F}_o$ tiene la forma de un número de Froude del flujo a la salida. Cuando ocurre una caída libre a la salida, el flujo es crítico; por consiguiente, $\mathbf{F}_o = 1$. La ecuación del perfil de flujo se convierte en

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\frac{y}{y_o} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{y_o}\right)^3 \qquad (12\text{-}14)$$

donde la profundidad y_o es la profundidad crítica a la salida correspondiente para Q_o.

Cuando la salida se encuentra sumergida, la profundidad y_o se determina mediante la elevación de la superficie aguas abajo, y $\mathbf{F}_o$ puede calcularse a partir de los valores conocidos de y_o y Q_o. Para cada valor de x/L, la ecuación (12-14) dará dos soluciones reales positivas. Sin embargo, sólo los valores de $y/y_o \geq 1$ son las soluciones reales, debido a que la energía en el flujo debe disminuir a medida que éste se mueve hacia aguas abajo y y no puede ser menor que y_o.

El ejemplo anterior ilustra el flujo espacialmente variado en canales horizontales con secciones transversales rectangulares. Análisis similares pueden hacerse para canales con paredes laterales paralelas con fondos irregulares y para canales con paredes laterales inclinadas. Para canales con lechos pendientes, sin embargo, no puede obtenerse una ecuación explícita como la ecuación (12-12) para el perfil de flujo. Si no ocurre un resalto hidráulico en el canal, el perfil de flujo puede calcularse directamente por medio del método de integración numérica[3] (*véase* sección 12-4), empezando desde una profundidad de control de flujo conocida.

Li [5] desarrolló un análisis del flujo espacialmente variado en canales con lechos pendientes por medio de integración numérica. Los resultados de este análisis pueden resumirse en un diagrama general (figura 12-3). Para canales con paredes laterales paralelas, el diagrama se muestra en la figura 12-4.

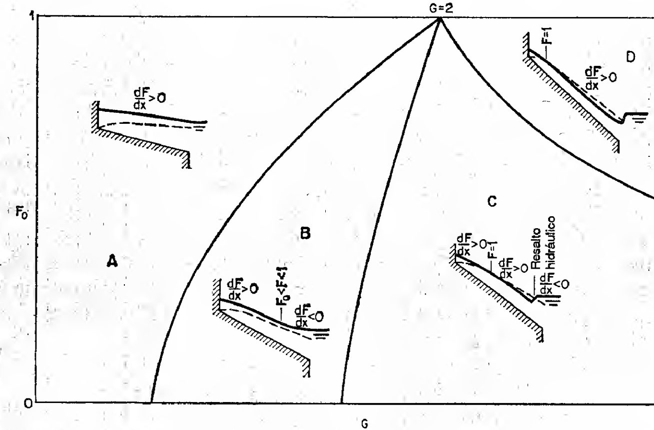


Figura 12-3. Tipos de flujo espacialmente variado tal como se determinan mediante $\mathbf{F}_o$ y G. El diagrama corresponde a un canal con una sección arbitraria. Para canales rectangulares, la línea que divide las regiones B y C es $G = 1 + \mathbf{F}_o$; para canales triangulares, ésta es $G = 2$. La línea punteada en cada canal es la línea de profundidad crítica.

[3] El perfil también puede calcularse mediante el método gráfico desarrollado por Camp [4], el cual requiere ajustes de prueba.

Este diagrama indica la relación entre el número de Froude $\mathbf{F}_o$ y el valor de $G = S_0 L/y_o$. Éste está compuesto por cuatro regiones, que representan cuatro condiciones de flujo.

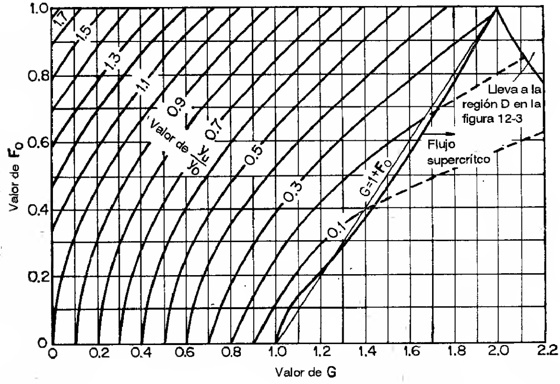


Figura 12-4. Soluciones para canales con lechos pendientes y muros laterales paralelos (*según W. H. Li* [5])

Región A. Esta región representa la condición donde el flujo es subcrítico a lo largo del canal y donde el valor de $\mathbf{F}$ se incrementa a medida que el flujo se mueve hacia aguas abajo, es decir, $d\mathbf{F}/dx > 0$. El símbolo $\mathbf{F}$ representa el número de Froude del flujo de una sección localizada a una distancia x desde el extremo de aguas arriba del canal. El valor de $\mathbf{F}$ puede calcularse mediante la ecuación (12-13) al remplazar $\mathbf{F}_o$ por $\mathbf{F}$ y L por x. Como el flujo es subcrítico, la profundidad de flujo en cualquier sección es mayor que la profundidad crítica, como lo muestra la línea punteada. En la región A, $\mathbf{F}_o = 1$, y la condición de flujo está dominada por la profundidad y_u aguas arriba. En otras palabras, la superficie del agua retrocede en la dirección hacia aguas abajo y sólo el valor de y_u es de interés para determinar las dimensiones del canal. Los valores de y_u/y_o para la región A fueron calculados mediante integración numérica y se graficaron como líneas continuas (figura 12-4). El cálculo se hizo con la condición de que $y_u/y_o \geq 1$ en $x/L = 1$.

Puede probarse que $G < 2/3(1 + 2\mathbf{F}_o 2)$ cuando $d\mathbf{F}/dx > 0$. Esto se representa por la línea que divide las regiones A y B en el diagrama (figura 12-3).

Región B. Esta región representa la condición donde el flujo es subcrítico a lo largo del canal y el valor de $\mathbf{F}$ se incrementa a medida que el flujo se mueve hacia aguas abajo y alcanza un valor máximo menor que la unidad, y luego decrece. La línea que divide las regiones B y C puede representarse aproximadamente mediante $G = 1 + \mathbf{F}_o$. Esta línea indica todos los casos en los cuales el valor máximo de $\mathbf{F}$ es igual a la unidad.

Región C. Esta región representa la condición para la cual existe flujo supercrítico en la parte de aguas abajo del canal donde existe un resalto hidráulico en éste.

El flujo supercrítico ocurre cuando G es mayor que aproximadamente $1 + \mathbf{F}_o$. El resalto hidráulico sólo se formará si la salida se encuentra lo suficientemente sumergida. A medida que el resalto ocurre, la sección de control se mueve dentro del canal y la elevación de la superficie del agua en la salida no afectará el perfil total de flujo. El perfil de flujo aguas arriba del resalto no puede determinarse a partir del valor de y_o, pero sí de la profundidad crítica y_c y de la posición de la sección crítica x_c. Mediante integración numérica se ha calculado un perfil de flujo adimensional en el tramo supercrítico (figura 12-5, en la cual A_c y A son las áreas mojadas de la sección crítica y de la sección a una distancia x desde el extremo de aguas arriba del canal, respectivamente). Esta curva puede utilizarse para calcular el perfil de flujo aguas abajo de la sección crítica y aguas arriba del resalto hidráulico.

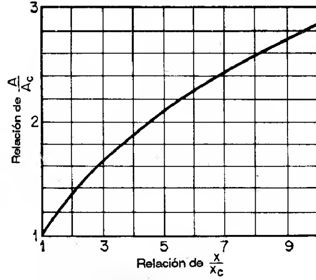


Figura 12-5. Perfil de flujo adimensional en tramos supercríticos en un canal con flujo espacialmente variado, lecho pendiente y paredes paralelas (*según W. H. Li* [5]).

La posición de una sección crítica en el canal de un vertedero lateral puede determinarse mediante el método del punto singular (*véase* sección 9-6).

Región D. Esta región representa la condición de flujo para la cual existe flujo supercrítico a lo largo de la parte aguas abajo del canal, pero donde la profundidad de sumergencia a la salida no es lo suficientemente alta para crear un resalto hidráulico en éste. El valor de $\mathbf{F}_o$ no se determina por la profundidad de sumergencia. La línea que divide las regiones C y D (*véanse* figuras 12-3 y 12-4) se obtuvo mediante integración numérica de la condición de profundidad mínima de sumergencia requerida para producir un resalto hidráulico en la salida. Esta profundidad mínima es igual a la profundidad necesaria para localizar el nivel del embalse aguas abajo en la profundidad secuente. Una profundidad de sumergencia mayor que esta profundidad mínima forzará a que el resalto se mueva hacia aguas arriba dentro del canal, y la condición del flujo se representará mediante la región C.

Cuando la pendiente del canal es en extremo empinada o cuando el valor de G es muy grande, el flujo se volverá no permanente. El valor límite de G que mantendrá el flujo en una posición permanente no se ha determinado.

En el análisis anterior no se ha considerado el efecto de la fricción. Esto se ha verificado como algo justificable para el diseño de canaletas de agua de lavado y para vertederos de canal lateral. Para canales de efluentes alrededor de tanques de tratamiento de aguas residuales, sin embargo, el efecto de la fricción puede incrementar la profundidad de aguas arriba y_u hasta un 10%[4].

Para un análisis teórico avanzado de flujo espacialmente variado puede utilizarse el método del punto singular (sección 9-6).

[4] Li [5] calculó curvas que representan el incremento de y_u como un resultado de la fricción en canales horizontales.

Ejemplo 12-2. Analice el flujo en un canal rectangular con pendiente pequeña con una rejilla de fondo (figura 12-6) y deduzca la ecuación del perfil de flujo [5].

Solución. El flujo en un canal con una rejilla de fondo es un caso de flujo espacialmente variado con caudal decreciente. A menudo la rejilla está compuesta por barras paralelas o es una lámina perforada. Existen varias aplicaciones para esta estructura. Por ejemplo, el canal puede ser una "bocatoma" para desviar agua desde una corriente montañosa, o un "separador" para reducir el volumen de agua requerida, por ejemplo, para transportar peces.

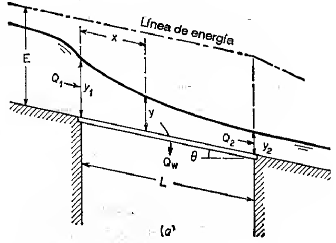
Al suponer que $\alpha = 1$ y $\theta \approx 0$ la energía específica en cualquier sección del canal (figura 12-6) es

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gb^2y^2} \qquad (12\text{-}15)$$

Para un flujo espacialmente variado con caudal decreciente la energía específica puede considerarse constante a lo largo del canal[6]. Luego $dE/dx = 0$; o, a partir de la ecuación (12-15),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qy(-dQ/dx)}{gb^2y^3 - Q^2} \qquad (12\text{-}16)$$

donde $-dQ/dx$ es el caudal desviado a lo largo de una longitud dx de la rejilla. La ecuación (12-16) es la ecuación dinámica general para el flujo en consideración.



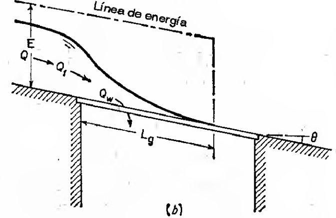


Figura 12-6. Canal con una rejilla de fondo (*a*) Derivación parcial; (*b*) derivación completa.

El caudal a través de la rejilla depende de la altura efectiva sobre ésta. Cuando la dirección de flujo a través de las aberturas de la rejilla es casi vertical (*A*, debajo), la pérdida de energía en el proceso es insignificante y, por consiguiente, la altura respectiva en la rejilla es igual a la energía específica *E*. Mostkow [28] encontró que esto es cierto para rejillas como las compuestas por barras paralelas. Por otro lado, cuando la sección de flujo a través de las aberturas de la rejilla hace un ángulo apreciable con la vertical (*B*), el flujo pegará contra los lados de las aberturas dando como resultado una pérdida de energía y un cambio en la dirección de flujo desde inclinado hasta vertical. A partir de experimentos, Mostkow encontró que esto es cierto para rejillas como las compuestas por láminas perforadas y que la pérdida de energía correspondiente es casi igual a la altura de velocidad de flujo sobre la rejilla. Por consiguiente, puede suponerse que la altura efectiva sobre la rejilla es igual a la altura estática, es decir, la profundidad de flujo sobre la rejilla.

A. Para flujo vertical a través de la rejilla. En este caso el caudal a través de una longitud dx de la rejilla puede expresarse por

$$-\frac{dQ}{dx} = \epsilon cb\sqrt{2gE} \qquad (12\text{-}17)$$

[5] Ha habido muchas investigaciones sobre este problema. El fenómeno de flujo real es complicado, en particular cuando la pendiente de la rejilla se tiene en cuenta. Para más detalles *véanse* [21] a [23], [26] a [28] y [34] a [38].

[6] Se ha encontrado que esta suposición está de acuerdo con los experimentos [21].

donde ϵ es la relación entre el área de aberturas y el área total de la superficie de la rejilla, y c es el coeficiente de descarga a través de las aberturas.
A partir de la ecuación (12-15), el caudal es

$$Q = by\sqrt{2g(E - y)} \qquad (12\text{-}18)$$

Al sustituir la ecuación (12-17) para $-dQ/dx$ y la ecuación (12-18) para Q en la ecuación (12-16), y al simplificar,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\epsilon c\sqrt{E(E - y)}}{3y - 2E} \qquad (12\text{-}19)$$

Al integrar esta ecuación se obtiene la ecuación del perfil de flujo

$$x = \frac{-E}{\epsilon c}\frac{y}{E}\sqrt{1 - \frac{y}{E}} + C \qquad (12\text{-}20)$$

Para $y = y_1$ y $x = 0$, la constante de integración se determina en la ecuación (12-20) como $C = (E/\epsilon c)(y_1/E)\sqrt{1 - y_1/E}$. Luego[7],

$$x = \frac{E}{\epsilon c}\left(\frac{y_1}{E}\sqrt{1 - \frac{y_1}{E}} - \frac{y}{E}\sqrt{1 - \frac{y}{E}}\right) \qquad (12\text{-}21)$$

Cuando $y = 0$, la ecuación (12-21) da la longitud de la rejilla requerida para un desvío completo del flujo principal a través de la rejilla, o

$$L_g = \frac{E}{\epsilon c}\left(\frac{y_1}{E}\sqrt{1 - \frac{y_1}{E}}\right) \qquad (12\text{-}22)$$

Mediante la ecuación (12-18), la ecuación anterior puede reducirse a

$$L_g = \frac{Q_1}{\epsilon cb\sqrt{2gE}} \qquad (12\text{-}23)$$

donde Q_1 es el caudal a través de la entrada al tramo de la rejilla y también es igual al caudal desviado Q_w a través de ésta.

B. Para flujo inclinado a través de la rejilla. En este caso el caudal a través de una longitud dx de la rejilla puede expresarse por

$$-\frac{dQ}{dx} = \epsilon cb\sqrt{2gy} \qquad (12\text{-}24)$$

Al sustituir la ecuación (12-24) para $-dQ/dx$ y la ecuación (12-18) para Q en la ecuación (12-16), y al simplificar,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\epsilon c\sqrt{y(E - y)}}{3y - 2E} \qquad (12\text{-}25)$$

Al integrar esta ecuación se obtiene la ecuación de perfil de flujo[8].

$$x = \frac{E}{\epsilon c}\left[\tfrac{1}{4}\,\text{sen}^{-1}\left(1 - \frac{2y}{E}\right) - \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{E}\left(1 - \frac{y}{E}\right)}\right] + C_1 \qquad (12\text{-}26)$$

[7] Esta ecuación también puede deducirse por medio de las ecuaciones (12-17) y (12-18). Mediante la ecuación (12-17), el caudal a través de la rejilla de longitud x es $Q_w = \epsilon cbx\sqrt{2gE}$. Mediante la ecuación (12-18), $Q_w = Q_1 - Q = by_1\sqrt{2g(E - y_1)} - by\sqrt{2g(E - y)}$. Al igualar estas dos expresiones para Q_w, se obtiene la ecuación (12-21).

[8] La ecuación (12-26) está dada por Mostkow [27] y la ecuación (12-27) por Noseda [21]. Las dos ecuaciones son matemáticamente idénticas. La relación entre las constantes de integración es $C_1 = C_2 + \pi E/8\,\epsilon c$.

o

$$x = \frac{E}{\epsilon c}\left[\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{y}{E}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{E}\left(1-\frac{y}{E}\right)}\right] + C_2 \tag{12-27}$$

Las constantes de integración de la ecuación anterior pueden calcularse mediante la condición de que $y = y_1$ y $x = 0$. Luego, cuando $y = 0$, la ecuación (12-26) dará la longitud de la rejilla requerida para un desvío completo del flujo principal a través de la rejilla, o

$$L_g = \frac{E}{\epsilon c}\left[\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{y_1}{E}\left(1-\frac{y_1}{E}\right)} - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^{-1}\left(1-\frac{2y_1}{E}\right) + \frac{\pi}{8}\right] \tag{12-28}$$

En los casos *A* y *B* descritos antes, la entrada al tramo de la rejilla puede considerarse como un vertedero de cresta ancha. Luego $Q_1 = c'bE^{1.5}$, donde c' puede tener un promedio de 2.80. La ecuación (12-18) da $Q_1 = by_1\sqrt{2g(E-y_1)}$ y $Q_2 = by_2\sqrt{2g(E-y_2)}$. Por consiguiente, el caudal de un desvío parcial desde el flujo principal a través de la rejilla es $Q_w = Q_1 - Q_2$, o

$$Q_w = c'b\left(1 - \frac{y_2\sqrt{E-y_2}}{y_1\sqrt{E-y_1}}\right)E^{1.5} \tag{12-29}$$

Para un desvío completo del curso principal a través de la rejilla, es evidente que $Q_w = Q_1 = c'bE^{1.5}$, de donde $E = (Q_1/c'b)^{2/3}$. Luego E puede calcularse si el caudal entrante Q_1, b y c' son conocidos.

El valor c del coeficiente de descarga a través de las aberturas de las rejillas de fondo varía de manera considerable a lo largo de la rejilla. Por ejemplo, valores comunes determinados experimentalmente varían desde 0.435, para una inclinación de 1 en 5, hasta 0.497, para rejillas horizontales de barras paralelas; y desde 0.750, para una pendiente de 1 en 5, hasta 0.800, para una pendiente horizontal de las rejillas hechas de láminas perforadas [27]. En general, el valor es mayor para rejillas de láminas perforadas que para rejillas de barras paralelas. El valor es mayor para rejillas horizontales que para rejillas inclinadas. El valor local se incrementa a medida que la profundidad de flujo sobre la rejilla aumenta si las barras son paralelas a la dirección del flujo principal, pero disminuye con la profundidad si las barras están en dirección transversal.

El análisis de este problema puede extenderse además al considerar los efectos de la curvatura de líneas de corriente, la distribución no uniforme de velocidades y la pendiente de fondo, y mediante la clasificación de varios tipos de perfiles de flujo creados de esta manera. En general, existen cinco tipos de perfiles de flujo, los cuales son similares a los descritos en el siguiente ejemplo.

Nótese que cuando existe un estado crítico de flujo en el lado de aguas arriba de la rejilla, la profundidad crítica ocurrirá en una sección en algún lugar aguas arriba de la sección de entrada. Por consiguiente, este fenómeno es similar al de una caída libre (*véase* sección 3-4). La relación y_1/y_c, entre la profundidad de entrada y la profundidad crítica, disminuye con un incremento en el valor de ϵ y de la pendiente de la rejilla. Las relaciones promedio comunes varían desde 0.70 hasta 0.90, lo cual corresponde aproximadamente a valores de y_1/E desde 0.47 hasta 0.60.

Ejemplo 12-3. Analice el flujo a través de un vertedero lateral en un canal rectangular horizontal prismático[9].

Solución. El flujo a través de un vertedero lateral es un caso del flujo espacialmente variado con caudal decreciente (figura 12-7). De acuerdo con Frazer [32], pueden producirse los siguientes cinco tipos de perfiles de flujo:

Tipo a. Condiciones críticas en la entrada o cerca de ella, con flujo supercrítico en la sección del vertedero, la profundidad del flujo disminuye a lo largo de éste (figura 12-7*b*).

[9] Para estudios detallados sobre el vertedero lateral, *véanse* [24] a [27] y [29] a [32].

Tipo b. Profundidad de flujo mayor que la profundidad crítica en la entrada con flujo subcrítico en la sección del vertedero, la profundidad de flujo se incrementa a lo largo de la sección de éste (figura 12-7*c*).

Tipo c. Flujo tipo *a* al inicio de la sección del vertedero con un resalto hidráulico en dicha sección, y flujo tipo *b* después del resalto con un nivel de energía específica menor debido a las pérdidas en el resalto (figura 12-7*d*).

Tipo d. Profundidad de flujo menor que la profundidad crítica a la entrada con flujo supercrítico en la sección del vertedero, la profundidad de flujo disminuye a lo largo de dicha sección (figura 12-7*e*).

Tipo e. Flujo tipo *d* a la entrada de la sección con un resalto hidráulico en la sección del vertedero y flujo tipo *b* en la sección del resalto y un nivel de energía específica más bajo debido a las pérdidas en el resalto (figura 12-7*f*).

Los dos últimos tipos de flujo son posibles si el flujo de aproximación es supercrítico. En un análisis convencional, se supone que la velocidad a través del vertedero lateral por lo general es perpendicular al vertedero. Esta suposición es más satisfactoria para flujo subcrítico que para flujo supercrítico. En flujo supercrítico la velocidad de flujo será alta y el ángulo que el flujo hace por encima con el vertedero será pequeño. En consecuencia, los tipos *d* y *e* no pueden analizarse con facilidad de manera satisfactoria. Además, el caudal en los flujos tipo *d* y *e* se controla desde aguas arriba, donde se requieren consideraciones adicionales para el análisis.

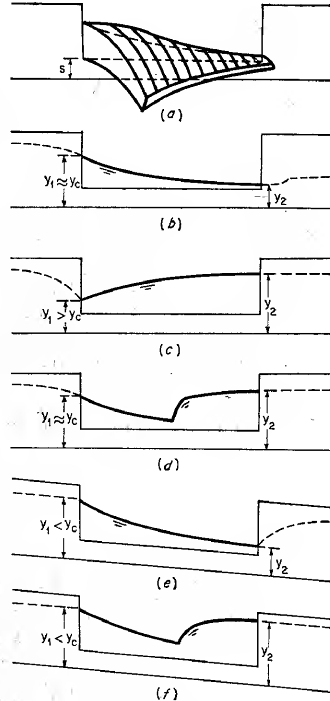


Figura 12-7. Diferentes perfiles de flujo a través de un vertedero lateral.

En el presente problema la energía específica a lo largo del vertedero lateral puede suponerse constante, o $S_f = S_0$. Como el canal es horizontal, $S_0 = 0$. Entonces, al suponer $\alpha = 1$, la ecuación (12-8) da una ecuación idéntica a la ecuación (12-16), es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qy(-dQ/dx)}{gb^2y^3 - Q^2} \tag{12-16}$$

El caudal sobre cualquier longitud determinada del vertedero puede calcularse mediante una ecuación del vertedero,

$$\frac{dQ_w}{dx} = -\frac{dQ}{dx} = c\sqrt{2g}\,(y - s)^{1.5} \tag{12-30}$$

donde c es el coeficiente de descarga y s es la altura de la cresta del vertedero por encima del fondo del canal. La cresta del vertedero es paralela al fondo del canal. La ecuación (12-18) también se aplica al presente problema. Luego el caudal en cualquier sección es

$$Q = by\sqrt{2g(E - y)} \tag{12-18}$$

donde b es el ancho del canal y E es la energía específica.

Por medio de las ecuaciones (12-30) y (12-18), la ecuación (12-16) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{b}\frac{\sqrt{(E-y)(y-s)^3}}{3y-2E} \qquad (12\text{-}31)$$

Al integrar la ecuación (12-31) y al resolver para x,

$$x = \frac{b}{c}F\left(\frac{y}{E}\right) + \text{const.} \qquad (12\text{-}32)$$

donde

$$F\left(\frac{y}{E}\right) = \frac{2E-3s}{E-s}\sqrt{\frac{E-y}{y-s}} - 3\,\text{sen}^{-1}\sqrt{\frac{E-y}{E-s}} \qquad (12\text{-}33)$$

$F(y/E)$ es una función de flujo variado que resolvió por primera vez De Marchi [16].

12-4. Método de integración numérica. Este método se aplicará primero a un flujo con caudal creciente y luego a un flujo con caudal decreciente.

A. Flujo con caudal creciente. Al consider los diferenciales como diferencias finitas, la ecuación (12-1) puede escribirse como

$$\frac{w}{g}[Q\,\Delta V + (V+\Delta V)\,\Delta Q] = -w\int_0^{\Delta y} A\,dy + wS_0\int_0^{\Delta x} A\,dx - wS_f\int_0^{\Delta x} A\,dx$$

$$= -w\bar{A}\,\Delta y + wS_0\bar{A}\,\Delta x - wS_f\bar{A}\,\Delta x \qquad (12\text{-}34)$$

donde $\bar{A}$ es el área promedio. Como el caudal varía con el incremento finito de la longitud del canal, el área promedio debe tomarse como $\bar{A} = (Q_1 + Q_2)/(V_1 + V_2)$. Al tomar $Q = Q_1$ y $V + \Delta V = V_2$ y al simplificar,

$$\Delta y = -\frac{Q_1(V_1+V_2)}{g(Q_1+Q_2)}\left(\Delta V + \frac{V_2}{Q_1}\Delta Q\right) + S_0\,\Delta x - S_f\,\Delta x \qquad (12\text{-}35)$$

La caída en la elevación de la superficie del agua entre las secciones 1 y 2 (figura 12-2) puede expresarse por

$$dy' = -dy + S_0\,dx \qquad (12\text{-}36)$$

Al convertir los diferenciales en diferencias finitas,

$$\Delta y' = -\Delta y + S_0\,\Delta x \qquad (12\text{-}37)$$

Al sustituir la ecuación (12-35) para Δy en la ecuación (12-37) y al introducir un coeficiente de energía α para distribución no uniforme de velocidades[10], la caída en la superficie del agua es

$$\Delta y' = \frac{\alpha Q_1(V_1+V_2)}{g(Q_1+Q_2)}\left(\Delta V + \frac{V_2}{Q_1}\Delta Q\right) + S_f\,\Delta x \qquad (12\text{-}38)$$

[10] El uso de un coeficiente de energía en lugar de un coeficiente de *momentum* tiene la misma razón que la presentada en la sección (12-2).

Esta ecuación puede utilizarse para calcular el perfil de flujo de un flujo espacialmente variado con caudal creciente. En la parte derecha de la ecuación el primer término representa el efecto de las pérdidas por impacto, y el segundo término representa el efecto de la fricción. Nótese que si ΔQ y S_f son cero, o $Q_1 = Q_2$, entonces esta ecuación se reduce a $\Delta y' = \alpha(V_2^2 - V_1^2)/2g$, que es la ecuación de energía para un flujo de caudal constante sin considerar la fricción. En el siguiente ejemplo se ilustra el proceso de integración numérica.

Ejemplo 12-4[11]. Un vertedero de canal lateral trapezoidal de 400 pies de largo se diseña para conducir un caudal variable de 40 pies³/s/pie. La sección transversal tiene un ancho en la base de 10 pies y pendientes laterales de 1/2:1. La pendiente longitudinal del canal es 0.1505, y comienza con una elevación de fondo aguas arriba de 73.70. Suponga $n = 0.015$ y $\alpha = 1$ y calcule el perfil de flujo para el caudal de diseño.

Solución. El primer paso es determinar la sección de control para la cual puede iniciarse el cálculo del perfil de flujo. La sección de control puede determinarse mediante el método del punto singular (*véase* sección 9-6). Sin embargo, en este ejemplo se utiliza un método desarrollado por Hinds [1]. El cálculo se muestra en las tablas 12-1 y 12-2.

Tabla 12-1. Cálculo de las profundidades críticas para el ejemplo 12-4.

y	A	T	$A/2T$	V_c	Q_c	R_c
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	22	12	0.92	7.68	169	1.52
4	48	14	1.71	10.49	504	2.52
6	78	16	2.44	12.52	978	3.33
8	112	18	3.11	14.15	1,585	4.01
10	150	20	3.75	15.53	2,330	4.63
12	192	22	4.36	16.75	3,216	5.22
14	238	24	4.96	17.86	4,252	5.76
16	288	26	5.54	18.88	5,440	6.29
18	342	28	6.11	19.82	6,780	6.82
20	400	30	6.67	20.71	8,284	7.31
22	462	32	7.22	21.55	9,960	7.81
24	528	34	7.76	22.34	11,800	8.29
26	598	36	8.31	23.12	13,820	8.77
28	672	38	8.84	23.84	16,020	9.26

La tabla 12-1 muestra los cálculos de las velocidades y caudales críticos correspondientes a un número de profundidades arbitrariamente asignadas, mostradas en la columna 1. Las velocidades críticas en la columna 5 corresponden a las alturas de velocidad crítica de la columna 4. Los radios hidráulicos también se calculan y registran en esta tabla para calcular las pérdidas por fricción.

[11] Este ejemplo se tomó de [1].

Tabla 12-2. Cálculo para la determinación de la sección de control en el ejemplo 12-4

x (1)	Δx (2)	Q (3)	$Q_1 + Q_2$ (4)	y_c (5)	V_c (6)	$V_1 + V_2$ (7)	ΔQ (8)	ΔV (9)	y_m' (10)	R_c (11)	h_f (12)	$\Delta y'$ (13)	$\Sigma\,\Delta y'$ (14)
0 + 00													
0 + 10	10	400	400	3.4	10.0	10.0	400	10.0	....	2.25	0.03		
0 + 25	15	1,000	1,400	6.2	12.5	22.5	600	2.5	4.25	3.41	0.05	4.30	4.30
0 + 50	25	2,000	3,000	9.2	14.9	27.4	1,000	2.4	4.91	4.40	0.08	4.99	9.29
1 + 00	50	4,000	6,000	13.5	17.6	32.5	2,000	2.7	6.77	5.63	0.16	6.93	16.22
1 + 50	50	6,000	10,000	16.9	19.3	36.9	2,000	1.7	5.21	6.53	0.16	5.37	21.59
2 + 00	50	8,000	14,000	19.7	20.6	39.9	2,000	1.3	4.33	7.23	0.15	4.48	26.07
2 + 50	50	10,000	18,000	22.1	21.6	42.2	2,000	1.0	3.74	7.83	0.16	3.90	29.97
3 + 00	50	12,000	22,000	24.2	22.4	44.0	2,000	0.8	3.30	8.34	0.16	3.46	33.43
3 + 50	50	14,000	26,000	26.2	23.2	45.6	2,000	0.8	3.04	8.82	0.15	3.19	36.62
4 + 00	50	16,000	30,000	28.0	23.8	47.0	2,000	0.6	2.73	9.26	0.15	2.88	39.50

La tabla 12-2 muestra el cálculo de la caída en la superficie de agua para mantener un flujo con profundidad crítica a lo largo de toda la longitud del canal. Los encabezamientos de las columnas son los siguientes:

Columna 1. Distancia de la estación a lo largo del canal, en pies.
Columna 2. Incremento de la distancia.
Columna 3. Caudal de entrada, igual a x por 40 pies³/s/pie.
Columna 4. Suma de los caudales Q_1 de la estación anterior y Q_2 de la estación en consideración.
Columna 5. Profundidad crítica en pies, interpolada a partir de la tabla 12-1 que corresponde al caudal de la columna 3.
Columna 6. Velocidad crítica en pies/s, interpolada a partir de la tabla 12-1, correspondiente al caudal de la columna 3.
Columna 7. Suma de las velocidades en la estación anterior y en la estación en consideración.
Columna 8. Incremento en el caudal $\Delta Q = Q_2 - Q_1$.
Columna 9. Incremento en la velocidad $\Delta V = V_2 - V_1$.
Columna 10. Caída en la superficie de agua debida a pérdidas por impacto, es decir,

$$\Delta y_m' = \frac{Q_1(V_1 + V_2)}{g(Q_1 + Q_2)}\left(\Delta V + \frac{V_2}{Q_1}\Delta Q\right) \tag{12-39}$$

Columna 11. Radio hidráulico crítico en pies, interpolado a partir de la tabla 12-1, que corresponde al caudal de la columna 3.
Columna 12. Pérdidas por fricción, basadas en la ecuación (9-8) con $n = 0.015$, V de la columna 6 y R de la columna 11. Como éste es un ítem menor comparado con las pérdidas por impacto, puede no considerarse.
Columna 13. Caída total en la superficie del agua $\Delta y' = \Delta y_m' + h_f$.
Columna 14. Caída acumulada en la superficie del agua.

La caída acumulada en la superficie del agua se grafica en la figura 12-8 mediante una línea de trazos largos oscuros, empezando desde una elevación arbitraria 120 pies desde alguna estación en $x = 10$ pies. Luego se grafican las profundidades críticas de la columna 5 de la tabla 12-2 por debajo de la línea de trazos, como se muestra mediante la línea punteada. Es claro que esta línea punteada representa el fondo de un canal ficticio, en el cual el flujo en la condición de determinado caudal es crítico en todas las secciones a lo largo de la longitud completa del canal. La línea de trazos es la superficie de agua correspondiente. Una tangente paralela al fondo del canal real puede dibujarse en la línea punteada del canal ficticio de flujo crítico. El punto de tangencia, para el cual los dos fondos tienen la misma pendiente, da la localización de la sección crítica, que se encuentra en la estación 1 + 64. Es evidente que la pendiente requerida

para mantener el flujo crítico a la izquierda de esta sección es mayor que la pendiente real, y que a la derecha es menor, la cual es la condición necesaria para la formación de un control. Si varios puntos de tangencia son posibles, aquel que dé la posición más baja de la tangente será el control. También es posible tener dos o más secciones de control con resaltos hidráulicos entre ellas.

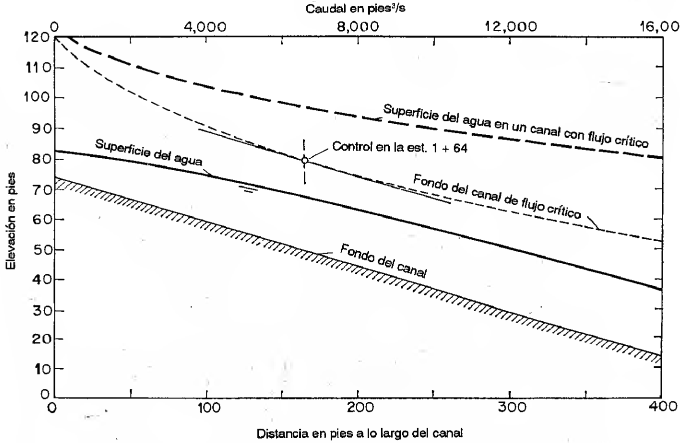


Figura 12-8. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 12-4.

Una vez que se ha localizado la sección de control, el cálculo de perfil de flujo puede realizarse tal como se muestra en la tabla 12-3. Los cálculos proceden hacia aguas arriba desde la sección de control para el flujo subcrítico en la parte superior del canal y hacia aguas abajo para flujo supercrítico en la parte baja del canal. El procedimiento del cálculo es igual al que se explicó para la tabla 12-2, excepto que la caída en la superficie del agua $\Delta y'$ en la columna 4 se obtiene finalmente cuando coincide con la calculada $\Delta y'$ en la columna 17. Esto se muestra para el cálculo en la estación 1 + 00. En las columnas 3 y 5 están las elevaciones del fondo del canal y las elevaciones del agua, respectivamente. El valor de $\Delta y'$ entre $x = 10$ y $x = 0$ no puede calcularse, pero se supone arbitrariamente como el doble de la altura de velocidad en $x = 10$ pies. El perfil de flujo final se construye tal como se muestra en la figura 12-8. La exactitud del cálculo dependerá de la longitud y del número de subdivisiones propuestas.

B. Flujo con caudal decreciente. Para el flujo espacialmente variado con caudal decreciente puede obtenerse una ecuación para la integración numérica similar a la ecuación (12-38). Con referencia a la figura 12-2, la velocidad y el caudal en la sección 1 se suponen como V y Q, y en la sección 2, como $V - \Delta V$ y $Q - \Delta Q$. La pérdida de *momentum* debida a la disminución en el caudal puede tomarse como $w\Delta Q\,(V - \Delta V/2)/g$. Al sumar esta pérdida de *momentum* al *momentum* en la sección 2 y al seguir el procedimiento para flujo con caudal creciente, puede demostrarse que la ecuación para la integración numérica es

$$\Delta y' = \frac{\alpha Q_1(V_1 + V_2)\,\Delta V}{g(Q_1 + Q_2)}\left(1 - \frac{\Delta Q}{2Q_1}\right) + S_f\,\Delta x \tag{12-40}$$

Tabla 12-3. Cálculo del perfil de flujo para el ejemplo 12-4.

x	Δx	Z_0	$\Delta y'$	Z	y	A	Q	V	$Q_1 + Q_2$	$V_1 + V_2$	ΔQ	ΔV	$\Delta y_m'$	R	h_f	$\Delta y'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
Flujo subcrítico, cálculo mediante pasos en la dirección hacia aguas arriba																
1 + 64	..	49.10	....	66.80	17.70	333.6	6,560	19.70								
1 + 00	64	58.70	7.90	74.70	16.00	288.0	4,000	13.89	10,560	33.59	2,560	5.81	7.29	6.28	0.11	7.40
			7.10	73.90	15.20	267.5	......	14.95	......	34.65	.....	4.75	7.09	6.10	0.13	7.22
			7.27	74.07	15.37	271.8	......	14.72	......	34.42	.....	4.98	7.13	6.13	0.12	7.25
0 + 50	50	66.20	5.08	79.15	12.95	213.5	2,000	9.37	6,000	24.09	2,000	5.35	5.01	5.49	0.05	5.06
0 + 25	25	69.95	2.06	81.21	11.26	176.0	1,000	5.68	3,000	15.05	1,000	3.69	2.04	5.00	0.01	2.05
0 + 10	15	72.20	0.87	82.08	9.88	147.6	400	2.71	1,400	8.39	600	2.97	0.86	4.60	0.01	0.87
0 + 00	10	73.70	0.23	82.31	8.61				($\Delta y'$ supuesto $= 2V^2/2g$ en $x = 10$)							
Flujo supercrítico, cálculo mediante pasos en la dirección hacia aguas abajo																
1 + 64	..	49.10	....	66.80	17.70	333.6	6,560	19.70								
2 + 00	36	43.70	4.45	62.35	18.65	360.4	8,000	22.20	14,560	41.90	1,440	2.50	4.34	6.97	0.14	4.48
2 + 50	50	36.20	6.22	56.13	19.93	397.9	10,000	25.13	18,000	47.33	2,000	2.93	6.03	7.29	0.23	6.26
3 + 00	50	28.70	6.39	49.74	21.04	431.7	12,000	27.79	22,000	52.92	2,000	2.66	6.16	7.57	0.26	6.42
3 + 50	50	21.20	6.48	43.26	22.06	463.9	14,000	30.18	26,000	57.97	2,000	2.39	6.18	7.82	0.31	6.49
4 + 00	50	13.50	6.92	36.34	22.84	489.2	16,000	32.71	30,000	62.89	2,000	2.53	6.58	8.02	0.36	6.94

Debido a la distribución de velocidades variable en la sección transversal del canal, el valor del coeficiente de energía puede ser muy alto. De acuerdo con Schmidt [25], se obtuvieron valores tan altos como 1.30 al inicio del vertedero, y aún valores más altos se encontraron al final de la cresta del vertedero. Mediante un estudio experimental, Schmidt fue capaz de desarrollar un procedimiento de ajuste para corregir por el efecto de una distribución no uniforme de velocidades.

El valor de ΔQ en la ecuación (12-40) es el caudal por encima del vertedero por Δx de longitud de cresta. Para su cálculo se han propuesto muchas ecuaciones. Para propósitos prácticos, puede utilizarse la ecuación para el vertedero regular con forma de cresta similar si el coeficiente de descarga correspondiente se reduce un 5%.

12-5. Método isoclinal. Para un cálculo simple pero aproximado del perfil de flujo, puede utilizarse un método gráfico sugerido por Werner [39]. Mediante este método la ecuación de flujo espacialmente variado en cualquier forma se grafica con y contra x para diferentes valores de dy/dx como parámetros, dando como resultado cierto número de curvas isoclinales (figura 12-9). Empezando con la profundidad en la sección de control C, se dibuja una línea con una pendiente (= 0.03) igual al valor promedio de dy/dx (= 0.05) indicada por la curva isoclinal que pasa por la profundidad de control y dy/dx (= 0.01) de la siguiente curva isoclinal, la cual es intersecada por la línea en P. Empezando en P, se repite el procedimiento para determinar P', y así se determinan otros puntos de intersección. El perfil de flujo es la línea que une todos los puntos de intersección. En realidad, este método puede aplicarse también a cualquier tipo de ecuación de flujo variado para el flujo en canales prismáticos y no prismáticos.

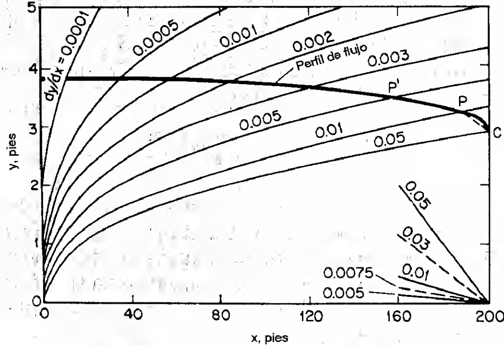


Figura 12-9. Cálculo de perfil de flujo mediante el método isoclinal.

12-6. Flujo superficial espacialmente variado. Un tipo importante de flujo superficial que se encuentra a menudo en problemas de ingeniería se relaciona con la escorrentía desde una superficie plana como resultado de la lluvia. Es claro que éste es un problema de flujo espacialmente variado con caudal creciente y puede

tratarse como tal; sin embargo, puede ser muy complicado y convertirse en un problema tridimensional si la superficie se curva en el espacio, como es el caso del pavimento de una carretera que tiene un perfil transversal curvado y una pendiente longitudinal. La teoría de flujo espacialmente variado fue utilizada por primera vez para flujo superficial por Keulegan [40], y la ecuación así deducida la aplicó Izzard [41] a datos experimentales. Para el flujo sobre una superficie de carretera, Iwagaki [42] llevó a cabo un análisis completo.

Para propósitos prácticos, por lo general se supone una ecuación aproximada para el caudal del flujo superficial, como

$$q = ky^m \tag{12-41}$$

donde q es el caudal por unidad de ancho de flujo, y es la profundidad de flujo en el punto de salida y k y m son constantes. En la condición de equilibrio el caudal q en un punto localizado una distancia x abajo de la divisoria del drenaje es

$$q = xq_* \tag{12-42}$$

donde q_* es el caudal de entrada constante debido al exceso de lluvia, o tasa de suministro, por unidad de área. El exceso de lluvia es igual a la lluvia menos la infiltración y otras pérdidas que no se convierten en escorrentía superficial. Al combinar estas dos ecuaciones y al simplificar,

$$y = \left(\frac{xq_*}{k}\right)^{1/m} \tag{12-43}$$

Ésta es la ecuación para el perfil de flujo, que por lo general se aplica cuando x no es muy grande. El valor de k tiene que determinarse de manera experimental debido a que depende de las características de la superficie, pendiente, tipo de flujo y viscosidad (en el caso de flujo laminar). El valor de m depende del tipo de flujo; es aproximadamente 5/3 para flujo turbulento y 3 para flujo laminar.

Para flujo turbulento, la ecuación diferencial para el flujo superficial puede escribirse a partir de la ecuación (12-4) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S - 2(y/x)\mathbf{F}^2}{1 - \mathbf{F}^2} \tag{12-44}$$

donde $\mathbf{F}^2 = V^2/gy$. Si no se considera el *momentum* de las gotas de lluvia, puede demostrarse que el coeficiente 2 del numerador se convierte en 1 [coeficiente de la ecuación (12-8)]. Para estudios analíticos, el perfil del flujo superficial puede calcularse mediante el método de integración numérica. La sección de control del perfil de flujo puede calcularse mediante el método del punto singular o mediante un criterio desarrollado por Keulegan [43].

Para flujo laminar sobre la superficie de una carretera, Iwagaki [42] llevó a cabo un análisis matemático elaborado, en el cual se aplican las ecuaciones de continuidad y de *momentum* a un elemento tridimensional del flujo. Al considerar un caso general para el cual tanto la velocidad como la profundidad del flujo no cambian en la dirección longitudinal de la superficie de la carretera, fue capaz de deducir una ecuación diferencial como la siguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_1}{F_2} \tag{12-45}$$

donde

$$F_1 = \frac{gy^3 nS_0}{\nu^2}\left(\frac{x}{L}\right)^{n-1} - \frac{12q_*^2 xy}{5\nu^2} - \frac{3q_* x}{\nu}$$

y

$$F_2 = \frac{gy^3}{\nu^2} - \frac{6q_*^2 x}{5\nu^2}$$

Ésta es la notación dada en la figura 12-10. El perfil transversal de la superficie de la carretera se representa por $y = -H(x'/L)^n$. Luego se aplicó la ecuación (12-45) a un ejemplo numérico y se calcularon los perfiles de flujo mediante el método isoclinal. Las siguientes conclusiones se obtuvieron en esta investigación:



Figura 12-10. Sección transversal de una carretera paa el análisis de flujo superficial.

1. El perfil de flujo es independiente de la pendiente longitudinal de la superficie de la carretera.

2. En el caso de la escorrentía natural, el perfil de flujo se representa aproximadamente mediante la curva $dy/dx = 0$ excepto para la parte cercana a la cresta de la carretera.

3. En teoría, la profundidad es constante cuando el perfil transversal de la carretera es una parábola con su vértice en la corona, es decir, cuando $n = 2$. Cuando la superficie de la carretera está formada por líneas rectas que conectan la corona con los bordes, es decir, cuando $n = 1$, la profundidad se vuelve más pequeña cerca de la corona y más grande hacia los lados.

4. El efecto de la pendiente longitudinal sobre la velocidad media y la velocidad de fricción es incrementar la velocidad media y la velocidad de fricción del flujo. Este efecto es mayor cerca de la corona de la carretera para un n mayor, y mayor cerca de los lados para n menor.

5. El efecto de la pendiente longitudinal es insignificante cuando dicha pendiente es muy pequeña, es decir, menor que 0.002 en la condición normal de H/L = 0.02.

6. Para minimizar la erosión debida a las gotas de lluvia sobre carreteras sin pavimentar, la pendiente longitudinal debe mantenerse tan pequeña como sea posible. Para mantener un grado de erosión uniforme es preferible una sección transversal con $n = 1$.

PROBLEMAS

12-1. Una canaleta de agua de lavado con sección rectangular de 20 pies de largo y 1.32 pies de ancho conduce un caudal a lo largo de una pendiente de 0.065 con una caída libre en la salida. Si la profundidad de flujo medida aguas arriba es 0.34 pies, calcule el caudal a partir del cuadro de la figura 12-4.

12-2. Una ecuación aproximada para calcular la capacidad de descarga de canaletas para el agua de lavado de filtros rápidos de arena la desarrolló Miller [11] al suponer un perfil de flujo parabólico correspondiente al caudal máximo. La ecuación es

$$Q = 1.91b(y_u + L \tan \theta) \tag{12-46}$$

donde b es el ancho del canal rectangular en pies, y_u es la profundidad de aguas arriba en pies, L es la longitud del canal en pies y θ es el ángulo que el fondo del canal hace con respecto a la horizontal. Mediante esta ecuación calcule el caudal requerido en el problema 12-1.

12-3. Una canaleta rectangular de agua de lavado de 30 pies de largo se requiere para conducir un caudal de 8 pies³/s, con una caída libre a la salida. Diseñe la canaleta de tal manera que se utilice la menor cantidad de material para construcción (no considere el muro final y haga que la pared total y el muro de fondo del canal sean mínimos). Suponga:

a. Un canal horizontal

b. Que el canal tiene una pendiente

12-4. Calcule el perfil de flujo del problema 12-1. Suponga:

a. Un canal horizontal

b. Un canal con pendiente igual a 0.065

12-5. Deduzca la ecuación para el perfil de flujo del ejemplo 12-2 si α no es igual a la unidad.

12-6. Una rejilla de fondo horizontal hecha con una lámina perforada se diseña para derivar agua de un canal. Determine la longitud de la rejilla requerida para desviar el total de flujo principal de 26 pies³/s del canal. Dados: $\epsilon = 0.5$, $c = 0.8$, $c' = 2.80$, $b = 3$ pies y $y_1/E = 0.60$.

12-7. Resuelva el problema anterior si la rejilla está hecha con barras paralelas.

12-8. Un vertedero lateral se utiliza para derivar el exceso de flujo de aguas lluvias de 75 pies³/s de un alcantarillado de 48 pulg de diámetro. El alcantarillado tiene una pendiente de 1 en 400, una capacidad de flujo lleno de 78 pies³/s y una salida sin restricción. El flujo en tiempo seco es 5 pies³/s. Determine: *a*) la altura de la cresta del vertedero; y *b*) la longitud del vertedero; suponga $\alpha = 1$. También se supone que el ancho superficial del área mojada es constante e igual al diámetro de la alcantarilla; entonces pueden aplicarse las ecuaciones deducidas para canales rectangulares.

12-9. Resuelva el problema anterior si $\alpha = 1.20$.

12-10. Convierta las diferencias en diferenciales y demuestre que la ecuación (12-35) es idéntica a la ecuación (12-4).

12-11. Determine la sección de control en el ejemplo 12-4 mediante el método de puntos singulares.

12-12. Demuestre analíticamente que el método de Hinds para la determinación de la sección de control es idéntico al método del punto singular.

12-13. Calcule el perfil de flujo en el canal descrito en el ejemplo 12-4, que conduce un caudal variable de 50 pies³/s por pie de longitud de canal.

12-14. Calcule el perfil de flujo del ejemplo 12-4 mediante el método isoclinal.

12-15. Verifique la ecuación (12-40).

12-16. Demuestre que el flujo en un canal rectangular prismático con un vertedero lateral puede expresarse por

$$Q = b\sqrt{(Hy^2 - y^3)\frac{2g}{\alpha}} \tag{12-47}$$

donde b es el ancho del canal, y es la profundidad, H es la altura de energía constante en la sección del vertedero medida por encima del fondo del canal, y α es el coeficiente de energía.

12-17. Una lluvia artificial con intensidad constante igual a 3.6 pulg/h se aplica sobre un pavimento de concreto con pendiente de 0.01 y coeficiente de rugosidad $n = 0.025$. Calcule el perfil de flujo sin considerar el *momentum* de las gotas de lluvia. Suponga que:

a. El extremo más bajo del pavimento es una salida en caída libre.

b. Existe una presa de 1/4 pulg de alto localizada a una distancia de 5 pies medida desde el extremo más bajo del pavimento.

REFERENCIAS

1. Julian Hinds, "Side channel spillways: hydraulic theory, economic factors, and experimental determination of losses", *Transactions*, Vol. 89, *American Society of Civil Engineers*, 1926, pp. 881-927.
2. H. Favre, *Contribution à l'étude des courants liquides* (*Contribution to the Study of Flow of Liquid*), Dunod, Paris, 1933.
3. E. Meyer-Peter y Henry Favre, "Analysis of boulder dam spillways made by Swiss laboratory", *Engineering News-Record*, Vol. 113, Nº 17, octubre 25 de 1934, pp. 520-522.
4. Thomas R. Camp, "Lateral spillway channels", *Transactions*, Vol. 105, *American Society of Civil Engineers*, 1940, pp. 606-617.
5. Wen-Hsiung Li, "Open channels with nonuniform discharge", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 255-274.
6. G. De Marchi, "Canali con portata progressivamente crescente" ("Channels with increasing discharge"), *L'Energia elettrica*, Vol. 18, Nº 6, Milano, julio de 1941, pp. 351-360; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 45*, Milano, 1941.
7. Duilio Citrini, "Canali rettangolari con portata e larghezza gradualmente variabili" ("Rectangular channels with gradually varying discharge and width"), *L'Energia elettrica*, Vol. 19, Nº 5, Milano, mayo de 1942, pp. 254-262, y Nº 6, junio de 1942, pp. 297-301; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 52*, Milano, 1942.
8. Philipp Forchheimer, *Grundriss der Hydraulik* (*Outline of Hydraulics*), Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1920, pp. 93-95.
9. Armin Schoklitsch *Handbuch des Wasserbaues* (*Handbook of Hydraulic Engineering*), Vol. 1, Springer-Verlag, Vienna, 1950, pp. 136-142.
10. K. Hilding Beij, "Flow in roof gutters", *Journal of Research*, Vol. 12, Nº 2, *U.S. National Bureau of Standards*, febrero de 1934, pp. 193-213.
11. C. N. Miller, "An approximate formula for calculating the design capacity of rapid sand filter wash water troughs", apéndice B, en J. W. Ellms, *Water Purification*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1928.
12. M. F. Stein, "The design of wash water troughs for rapid sand filters", *Journal*, Vol. 13, American Water Works Association, 1925, pp. 411-415. Análisis por Clifford N. Miller, 1925, pp. 415-417.
13. Hubert Engels, "Mitteilungen aus dem Dresdener Flussbau-Laboratorium" ("Report of the Dresden Hydraulic Laboratory"), *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, Vol. 62, Nº 24, Berlin, 1918, junio 15, pp. 362-365; Nº 25, junio 22, pp. 387-390; Nº 26, junio 29, pp. 412-416; y Vol. 64, Nº 5, enero 31 de 1920, pp. 101-106; también *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Nºs 200 y 201, Berlin, 1917, p. 55.
14. G. S. Coleman y Dempster Smith, "The discharging capacity of side weirs", *Selected Engineering Papers*, Nº 6, *Institution of Civil Engineers*, London, 1923.
15. Philipp Forchheimer, *Hydraulik* (*Hydraulics*), 3ª ed., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1930, pp. 406-409.

16. G. De Marchi, "Saggio di teoria del funzionamento degli stramazzi laterali" ("Essay of the performance of lateral weirs"), *L'Energia elettrica*, Vol. 11, Nº 11, Milano, noviembre de 1934, pp. 849-860; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 11*, Milano, 1934.
17. G. De Marchi, "Profili longitudinali della superficie libera delle correnti permanenti lineari con portata progressivamente crescente o progressivamente decrescente entro canali di sezione costante" ("Longitudinal flow profiles of linear steady flow with increasing discharges or decreasing discharges in prismatic channels"), *Ricerca scientifica e ricostruzione*, Nºs 2 y 3, Rome, febrero-marzo de 1947, pp. 202-216. Publicado también como "Des formes de la surface libre de courants permanents avec débit progressivement croissant ou progressivement décroissant dans un canal de section constante", *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 13, Nº 38, Paris, 1947, pp. 81-85.
18. B. Gentilini, "Ricerche sperimentali sugli sfioratori longitudinali" ("Experimental researches on side weirs"), *L'Energia elettrica*, Vol. 15, Nº 9, Milano, septiembre de 1938, pp. 583-595; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 65*, Milano, 1938.
19. H. Favre, "Sur les lois régissant le mouvement des fluides dans les conduites en charge avec adduction latérale" ("On the laws governing the flow in conduits with lateral discharge"), *Revue universelle des mines*, Vol. 13, Ser. 8, Nº 12, Liége, diciembre de 1937, pp. 502-512.
20. W. H. R. Nimmo, "Side spillways for regulating diversion canals", *Transactions*, Vol. 92, *American Society of Civil Engineers*, 1928, pp. 1561-1584.
21. Giorgio Noseda, "Operation and design of bottom intake racks", *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association of Hydraulic Research, The Hague 1955*, Vol. 3, 1955, pp. C17-1 a C17-11; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 130*, Milano, 1956.
22. Giorgio Noseda, "Correnti permanenti con portata progressivamente decrescente, defluenti su griglie di fondo" ("Steady flow with gradually decreasing discharges on bottom intake racks"), *L'Energia elettrica*, Vol. 33, Nº 1, Milano, enero de 1956, pp. 41-51; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 132*, Milano, 1956.
23. Giorgio Noseda, "Correnti permanenti con portata progressivamente decrescente, defluenti su griglie di fondo: ricerca sperimentale" ("Steady flow with gradually decreasing discharge on bottom intake racks: experimental results"), *L'Energia elettrica*, Vol. 33, Nº 6, Milano, junio de 1956, pp. 565-588; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 134*, Milano, 1956.
24. Martin Schmidt, "Zur Frage des Abflusses über Streichwehre" ("Discharge over side weirs"), *Technische Universität Berlin-Charlottenburg, Institut für Wasserbau, Mitteilung 41*, 1954
25. Martin Schmidt, "Die Berechnung von Streichwehren" ("Computation of side weirs"), *Die Wasserwirtschaft*, Vol. 45, Nº 4, Stuttgart, enero de 1955, pp. 96-100.
26. Martin Schmidt, *Gerinnehydraulik* (*Open-channel Hydraulics*), VEB Verlag Technik, Berlin, y Bauverlag GMBH, Wiesbaden, 1957, pp. 188-196.
27. M. A. Mostkow, *Handbuch der Hydraulik* (*Handbook of Hydraulics*), VEB Verlag Technik, Berlin, 1956, pp. 204-208 y 213-221.
28. Michel A. Mostkow, "Sur le calcul des grilles de prise d'eau" ("Theoretical study of bottom type water intake"), *La Houille blanche*, año 12, Nº 4, Grenoble, septiembre de 1957, pp. 570-580.
29. Peter Ackers, "A theoretical consideration of side weirs as storm-water overflows", *Proceedings*, Vol. 6, *Institution of Civil Engineers*, London, febrero de 1957, pp. 250-269.
30. John William Allen, "The discharge of water over side weirs in circular pipes", *Proceedings*, Vol. 6, *Institution of Civil Engineers*, London, febrero de 1957, pp. 270-287.
31. Vincent Knight Collinge, "The discharge capacity of side weirs", *Proceedings*, Vol. 6, *Institution of Civil Engineers*, London, febrero de 1957, pp. 288-304.
32. William Frazer, "The behaviour of side weirs in prismatic rectangular channels", *Proceedings*, Vol. 6, *Institution of Civil Engineers*, London, febrero de 1957, pp. 305-328.

33. Ven Te Chow, "Discussion of 'Flood protection of canals by lateral spillways' por Harald Tults", artículo 1077, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY2, *American Society of Civil Engineers, Hydraulics Division*, abril de 1957, pp. 47-49.
34. F. Garot, "De Watervang met liggend rooster" ("Channel with bottom grid"), *De Ingenieur in Nederlandsch-Indië*, Nº 7, 1939.
35. M. Bouvard, "Débit d'une grille par en dessous" ("Discharge passing through a bottom grid"), *La Houille blanche*, año 8, Nº 2, Grenoble, mayo de 1953, pp. 290-291.
36. J. Kuntzmann y M. Bouvard, "Étude théorique des grilles de prises d'eau du type 'en dessous' " ("Theoretical study of bottom-type water-intake grids"), *La Houille blanche*, año 9, Nº 5, Grenoble, septiembre-octubre de 1954, pp. 569-574.
37. J. Orth, E. Chardonnet, y G. Meynardi, "Étude des grilles pour prises d'eau du type 'en dessous' " ("Study of bottom-type water-intake grids"), *La Houille blanche*, año 9, Nº 3, Grenoble, junio de 1954, pp. 343-351.
38. Josef Frank, "Hydraulische Untersuchungen für das Tiroler Wehr" ("Hydraulic analysis for the Tirol weir"), *Der Bauingenieur*, Vol. 31, Nº 3, Berlin, 1956, pp. 96-101.
39. P. Wilh. Werner, "Wasserspiegelberechung von Kanälen bei gleichmässiger Bewegung und veränderlicher Wassermenge" ("Computation of water surface in channels with steady flow and variable discharge"), *Die Bautechnik*, Vol. 19, Nº 23, Berlin, mayo 30 de 1941, pp. 251-252.
40. G. H. Keulegan, "Spatially variable discharge over a sloping plane", *Transactions*, Parte VI, *American Geophysical* Union, 1944, pp. 956-959.
41. C. F. Izzard, "The surface-profile of overland flow", *Transactions*, Parte VI, American Geophysical Union, 1944, pp. 959-968.
42. Yuichi Iwagaki, "Theory of flow on road surface", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. 13, Nº 3, Japan, julio de 1951, pp. 139-147.
43. Garbis H. Keulegan, "Determination of critical depth in spatially variable flow", *Proceedings of the 2d. Midwestern Conference of Fluid Mechanics, The Ohio State University, Engineering Experiment Station, Bulletin 149*, septiembre de 1952, pp. 67-80.

PARTE IV

FLUJO RÁPIDAMENTE VARIADO

CAPÍTULO 13

INTRODUCCIÓN

13-1. Características del flujo. El flujo rápidamente variado tiene curvatura de sus líneas de corriente muy pronunciadas. El cambio de la curvatura puede volverse tan abrupto que el perfil de flujo virtualmente se rompe, dando como resultado un estado de alta turbulencia; éste es el flujo rápidamente variado con perfil discontinuo, del cual el resalto hidráulico es un ejemplo.

En vista del contraste con el flujo gradualmente variado, deben considerarse los siguientes aspectos característicos del flujo rápidamente variado.

1. La curvatura del flujo es tan pronunciada que no puede suponerse que la distribución de presiones sea hidrostática.

2. La variación rápida del régimen de flujo a menudo ocurre en un tramo más o menos corto. Por consiguiente, la fricción en las fronteras, la cual debería jugar el papel primordial en el flujo gradualmente variado, es comparativamente pequeña y en la mayor parte de los casos es insignificante.

3. Cuando un flujo rápidamente variado ocurre en una estructura de transición abrupta, las características físicas del flujo en lo fundamental están fijadas por la geometría de la frontera de la estructura y por el estado de flujo.

4. Cuando ocurren cambios rápidos en el área mojada en flujo rápidamente variado, los coeficientes de distribución de velocidades α y β a menudo son mucho mayores que la unidad y no pueden determinarse con exactitud.

5. Pueden ocurrir zonas de separación, remolinos y corrientes secundarias que tienden a complicar el patrón de flujo en un flujo rápidamente variado y a distorsionar la distribución real de velocidades en la corriente. En tales casos, el flujo en realidad está confinado por una o más zonas de separación y no por fronteras sólidas.

13-2. Aproximación al problema. En la hidráulica clásica la teoría que supone un flujo paralelo con una distribución hidrostática de presiones se conoce

como *teoría de Bresse*[1]; tal teoría se utiliza para flujo uniforme y flujo gradualmente variado. Por supuesto, esta teoría no se aplica al flujo rápidamente variado, inclusive aquel con perfil de flujo continuo. Para flujo rápidamente variado con perfil de flujo continuo, la hidráulica clásica ha demostrado que puede establecerse una ecuación de flujo con base en una condición de flujo no viscoso (es decir, sin fricción y sin viscosidad) y de flujo potencial [1-4]. Una solución directa de la ecuación requerirá conocimiento adicional de la curvatura del flujo. En la clásica *teoría de Boussinesq* [5], se supone que la curvatura se incrementa linealmente desde el lecho del canal hasta la superficie curva del flujo, y el problema se resuelve por medio del principio de *momentum*. En la *teoría de Fawer* [6] se supone que la curvatura varía exponencialmente con la distancia desde el lecho del canal hasta la superficie libre, y el problema se resuelve por medio del principio de energía. Las aproximaciones modernas a la solución de un flujo potencial no viscoso a menudo recurren a un método gráfico o a un método de aproximación numérica. Un método gráfico muy popular es el análisis de red de flujo [7, 8], el cual fue sugerido por primera vez por Prášil [9] y generalizado después por Barillon [10]. Existen muchos métodos numéricos; de éstos, se utiliza con frecuencia el método de la relajación [11].

Las teorías y métodos para el análisis de flujo rápidamente variado con perfil continuo mencionadas antes pueden encontrarse en muchos textos de hidráulica y en las referencias enunciadas aquí. A pesar de tales desarrollos, todavía no se ha obtenido una solución general satisfactoria a este tipo de problemas. Por consiguiente, los ingenieros hidráulicos prácticos desde hace tiempo han tratado el problema del flujo rápidamente variado como compuesto por un número de casos aislados, cada uno de los cuales requiere su propio tratamiento empírico. En los siguientes capítulos se tratan los problemas más comunes de flujo rápidamente variado más o menos en esta forma. En la mayor parte de los casos, los resultados experimentales deben utilizarse de manera empírica. Los aspectos físicos del flujo serán interpretados cualitativamente, siempre que sea posible, de acuerdo con los principios de energía, *momentum* y geometría, y algunas veces mediante análisis dimensional.

REFERENCIAS

1. Charles Jaeger, *Engineering Fluid Mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956, pp. 120-130.
2. Philipp Forchheimer, *Hydraulik* (*Hydraulics*), 3ª ed., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1930. Sección 82, pp. 230-237, en "Boussinesq's backwater curve with uniform bottom slope, taking the curvature of the flow filaments into consideration"; Sección 83, pp. 237-242, en "Boussinesq's backwater curve with varying bottom slope, surface with undulating bottom".
3. François Serre, "Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux" ("Contribution to the study of permanent and nonpermanent flows in channels"), *La Houille blanche*, año 8, Nº 3, Grenoble, junio-julio de 1953, pp. 374-388; Nº 6, diciembre de 1953, pp.

[1] Ésta se conoce así debido a la contribución de Bresse a la solución de la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado (*véase* ejemplo 10-4).

830-872. "Differential equations for steady flow, taking into account the effects of stream curvature, are developed and applied to the determination of flow profiles".
4. Josef Koženy, *Hydraulik* (*Hydraulics*), Springer-Verlag, Vienna, 1953, pp. 46-47 y 229.
5. J. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes" ("Essay on the theory of water flow"), *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, Paris, Vol. 23, 1877, pp. 1-680; Vol. 24, Nº 2, 1878.
6. C. Fawer, "Étude de quelques écoulements permanents à filets courbes" ("Study of some permanent flows with curved filaments"), tesis, Université de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 1937.
7. H. Alden Foster, "Construction of the flow net for hydraulic design", *Transactions*, Vol. 110, *American Society of Civil Engineers*, 1945, pp. 1237-1252.
8. E. W. Lane, F. B. Campbell y W. H. Price, "The flow net and the electric analogy", *Civil Engineering*, octubre de 1934, pp. 510-514.
9. Franz Prásil, "Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen" ("On fluid motion in rotational vacuums"), *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, mayo-junio de 1903, Vol. 41, Nº 18, pp. 207-209; Nº 21, pp. 233-237; Nº 22, pp. 249-251; Nº 25, pp. 282-283; y Nº 26, pp. 293-295. También *Technische Hydrodynamik* (*Technical Hydrodynamics*), Springer-Verlag, Berlin, 1913, p. 61; 2ª ed., 1926, pp. 201-236.
10. E. G. Barillon, "Note sur les rayons de courbure intervenant dans la construction des réseaux hydrodynamiques" ("Note on the radii of curvature involved in the construction of hydrodynamic networks"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 2, Nº 8, Paris, 1936, pp. 411-415.
11. John S. McNown, En-Yun Hsu y Chia-Shun Yih, "Applications of the relaxation technique in fluid mechanics", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 650-669.

CAPÍTULO 14

FLUJO SOBRE VERTEDEROS

14-1. Vertedero de cresta delgada. El vertedero de cresta delgada no sólo es un aparato de medición para el flujo en canales abiertos, sino también la forma más simple de vertederos de rebose. Las características del flujo por encima de un vertedero se reconocieron hace tiempo en hidráulica como la base en diseño del vertedero de rebose de cresta redondeada; es decir, el perfil del vertedero se determinó de acuerdo con la forma de la superficie inferior de la napa de flujo sobre un vertedero de cresta delgada.

La forma de la napa de flujo por encima de un vertedero de cresta delgada puede interpretarse mediante el principio del proyectil (figura 14-1). De acuerdo con este principio se supone que la componente horizontal de la velocidad de flujo es constante y que la única fuerza que actúa sobre la napa es la gravedad. En el tiempo t, una partícula de agua en la superficie inferior de la napa viajará una distancia horizontal x desde la cara del vertedero, que es igual a

$$x = v_0 t \cos\theta \tag{14-1}$$

donde v_0 es la velocidad en el punto donde $x = 0$ y θ es el ángulo de inclinación de la velocidad v_0 con respecto a la horizontal. En el mismo tiempo t, la partícula viajará una distancia vertical y igual a

$$y = -v_0 t \operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}gt^2 + C' \tag{14-2}$$

donde C' es el valor de y en $x = \theta$; es claro que C' es igual a la distancia vertical entre el punto más alto de la napa y la elevación de la cresta. Al eliminar t en las dos ecuaciones anteriores, al dividir cada término por la altura total H por encima de la cresta y al expresar la ecuación general resultante para la superficie inferior de la napa en términos adimensionales,

$$\frac{y}{H} = A\left(\frac{x}{H}\right)^2 + B\frac{x}{H} + C \tag{14-3}$$

donde $A = gH/2v_0^2 \cos^2\theta$, $B = -\tan\theta$ y $C = C'/H$. Como la componente horizontal de velocidad es constante, el espesor vertical de la napa T puede suponerse constante. Al sumar un término $D = T/H$ a la ecuación anterior, la ecuación general para la superficie superior de la napa es

$$\frac{y}{H} = A\left(\frac{x}{H}\right)^2 + B\frac{x}{H} + C + D \tag{14-4}$$

Las ecuaciones anteriores para la napa son cuadráticas, por consiguiente, en teoría, las superficies de la napa son parabólicas.

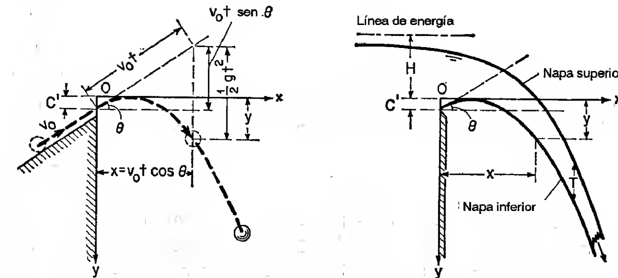


Figura 14-1. Deducción de los perfiles de la napa sobre un vertedero de cresta delgada mediante el principio del proyectil.

Se han efectuado numerosas pruebas acerca de la napa sobre un vertedero de cresta delgada. Con base en los datos del U. S. Bureau of Reclamation [1], de Hinds, Creager y Justin [2, 3], y de Ippen [4], Blaisdell [5] desarrolló las siguientes ecuaciones para las constantes contenidas en las ecuaciones generales de la napa:

$$A = -0.425 + 0.25\frac{h_v}{H} \tag{14-5}$$

$$B = 0.411 - 1.603\frac{h_v}{H} - \sqrt{1.568\left(\frac{h_v}{H}\right)^2 - 0.892\frac{h_v}{H} + 0.127} \tag{14-6}$$

$$C = 0.150 - 0.45\frac{h_v}{H} \tag{14-7}$$

$$D = 0.57 - 0.02(10m)^2 \exp(10m) \tag{14-8}$$

donde $m = h_v/H - 0.208$ y h_v es la altura de velocidad para el flujo de aproximación. Para vertederos altos, la velocidad de aproximación es relativamente pequeña y puede ignorarse. Luego las constantes se convierten en $A = -0.425$, $B = 0.055$, $C = 0.150$ y $D = 0.559$. Datos experimentales han indicado que estas ecuaciones no son válidas cuando x/H es menor que 0.5 y que, para $h_v/H > 0.2$, se necesitan datos adicionales para verificación. Para $x/H < 0.5$ la presión dentro de la napa en la

vecindad de la cresta del vertedero es realmente superior a la atmosférica debido a la convergencia de las líneas de corriente. En consecuencia, otras fuerzas diferentes de las gravitacionales actúan sobre la napa, lo cual invalida el principio del proyectil.

Nótese que la teoría y las ecuaciones anteriores se aplican sólo si el flujo de aproximación es subcrítico. Para flujo supercrítico, o $\mathbf{F} > 1$, el perfil de la napa se vuelve escencialmente una función del número de Froude en lugar de una función de la geometría de frontera, como se describió antes [4, p. 533].

Se han desarrollado muchas ecuaciones experimentales para el caudal sobre un vertedero de cresta delgada[1]. La mayor parte de estas ecuaciones pueden expresarse en la forma general[2]:

$$Q = CLH^{1.5} \tag{14-9}$$

donde C es el coeficiente de descarga, L es la longitud efectiva de la cresta del vertedero y H es la altura medida por encima de la cresta *excluida* la altura de velocidad. La longitud efectiva del vertedero puede calcularse mediante

$$L = L' - 0.1NH \tag{14-10}$$

donde L' es la medida de la longitud de la cresta y N es el número de contracciones. Para dos contracciones en los extremos, $N = 2$. Para una contracción en los extremos, $N = 1$. Cuando no existen contracciones en los dos extremos, $N = 0$.

De acuerdo con la muy conocida ecuación de vertedero, de Rehbock [10], el coeficiente C de la ecuación (14-9) es aproximadamente

$$C = 3.27 + 0.40\frac{H}{h} \tag{14-11}$$

donde h es la altura del vertedero. Medidas hechas por Rouse [4, p. 532] indican que esta ecuación es válida hasta $H/h = 5$, pero puede extenderse hasta $H/h = 10$ con una aproximación razonable. Para H/h mayor que 15 el vertedero se convierte en un umbral y el caudal se controla mediante una sección crítica inmediatamente aguas arriba del umbral. La profundidad crítica de la sección es casi igual a $H + h$. Mediante la relación profundidad crítica-caudal, puede demostrarse que el coeficiente C es

$$C = 5.68\left(1 + \frac{h}{H}\right)^{1.5} \tag{14-12}$$

La transición entre vertedero y obstáculo (entre $H/h = 10$ y $H/h = 15$), no se ha definido con claridad.

[1] Para una descripción general sobre los experimentos y ecuaciones de vertederos de cresta delgada, *véase* [6]. Para estudios adicionales sobre las características de descarga en vertederos de cresta delgada, *véanse* [7] y [8].

[2] La deducción de una ecuación de descarga teórica en vertederos puede encontrarse en muchos manuales de hidráulica. El primer análisis matemático sobre el caudal en vertederos de cresta delgada lo desarrolló Boussinesq [9].

Experimentos han demostrado que el coeficiente C de la ecuación (14-9) permanece casi constante para vertederos de cresta delgada en diferentes alturas si la napa se encuentra aireada.

14-2. Aireación de la napa. En la sección anterior se consideró que la napa estaba aireada; es decir, tanto la superficie superior como la superficie inferior de la napa están sujetas a presión atmosférica completa. Sin embargo, una aireación insuficiente por debajo de la napa ocurre con frecuencia en vertederos de rebose y en vertederos de cresta delgada para medición. Esto indica una reducción de la presión por debajo de la napa debido a la remoción de aire hecha por el chorro que cae. Esta reducción de la presión causará efectos no deseados, como: 1) incremento en la diferencia de presión sobre el vertedero o el vertedero de cresta delgada, 2) cambio en la forma de la napa para la cual se diseña la cresta del vertedero, 3) incremento en el caudal algunas veces acompañado por fluctuaciones o pulsaciones de la napa, lo cual puede objetarse si el vertedero o vertedero de cresta delgada se utiliza con propósitos de medición, y 4) comportamiento inestable del modelo hidráulico.

Con base en estudios experimentales sobre vertederos con compuertas (figura 14-2), Hickox [11] desarrolló la siguiente ecuación que da la cantidad de aire requerida para la aireación en pies cúbicos por segundo por pie de longuitud del vertedero:

$$q_a = \frac{5.68(CH)^{3.64}}{p^{1.14}} \tag{14-13}$$

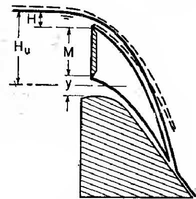


Figura 14-2. Esquema experimental para estudiar la aireación debajo de la napa. Las líneas punteadas indican la condición de aireación total (*según G. H. Hickox* [11]).

donde H es la altura en pies por encima de la parte superior de la compuerta; p es la reducción de presión en pies de agua que debe mantenerse por debajo de la napa, y C es un coeficiente que depende de la relación entre el caudal por debajo de la compuerta y el caudal por encima de la parte superior de ésta. La relación se representa mediante un valor adimensional

$$\sigma = \frac{y\sqrt{H_u}}{H^{1.5}} \tag{14-14}$$

donde y es la altura en pies de la apertura de la compuerta y H_u es la altura en pies en el centro de la compuerta. Para vertederos o vertederos de cresta delgada sin compuerta, $\sigma = 0$. Los valores de C son los siguientes:

σ	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5+
C	0.077	0.135	0.175	0.202	0.220	0.225

Valores intermedios pueden interpolarse en una curva elaborada con los anteriores valores.

14-3. Forma de la cresta de vertederos de rebose. Las formas de cresta iniciales se basaron en un diseño de parábola simple para ajustar la trayectoria de la

napa de caída, como se describió en la sección 14-1. Desde 1886 hasta 1888 Bazin [12] hizo la primera investigación completa en laboratorio sobre la forma de las napas. El uso de los datos de Bazin para el diseño producirá una forma de cresta que coincide con la superficie inferior de una napa aireada sobre un vertedero de cresta delgada. En teoría, la adopción de ese perfil, por lo general conocido como *perfil de Bazin*, no debe producir presiones negativas sobre la cresta. En condiciones reales, sin embargo, existe fricción debido a la rugosidad en la superficie del vertedero. Por consiguiente, las presiones negativas en tal perfil no pueden eliminarse. La presencia de presiones negativas llevará al peligro de daños por cavitación. En la selección de un perfil apropiado debe considerarse como un objetivo primordial la eliminación de presiones negativas, en conjunto con otros factores como la máxima eficiencia hidráulica, aspectos constructivos, la estabilidad y la economía. En consecuencia, el perfil de Bazin se ha modificado muchas veces y se han propuesto muchos otros perfiles con propósito de diseño[3].

Desde 1932 hasta 1948 el U. S. Bureau of Reclamation realizó experimentos extensos sobre la forma de la napa en vertederos de cresta delgada[4]. Con base en los datos experimentales, incluidos los de Bazin, el Bureau desarrolló coordenadas para la superficie de la napa en vertederos verticales y con caras de diferentes pendientes. Ciertamente esta información es invaluable para el análisis acertado y el diseño preciso de secciones de vertederos de rebose. Sin embargo, para propósitos prácticos, esta información puede utilizarse de manera más simple sin pérdidas de exactitud esencial, mediante las modificaciones que se describen a continuación:

Con base en los datos del Bureau of Reclamation, el U. S. Army Corps of Engineers desarrolló algunas formas estándar en su Waterways Experiment Station. Tales formas (figura 14-3), designadas como las formas de vertederos estándar WES[5] pueden representarse mediante la siguiente ecuación:

$$X^n = KH_d^{\,n-1}Y \tag{14-15}$$

donde X y Y son las coordenadas del perfil de la cresta con su origen en el punto más alto de ésta, H_d es la altura de diseño *excluida* la altura de velocidad del flujo de aproximación, y K y n son parámetros que dependen de la pendiente de la cara de aguas arriba. Los valores de K y n son los siguientes:

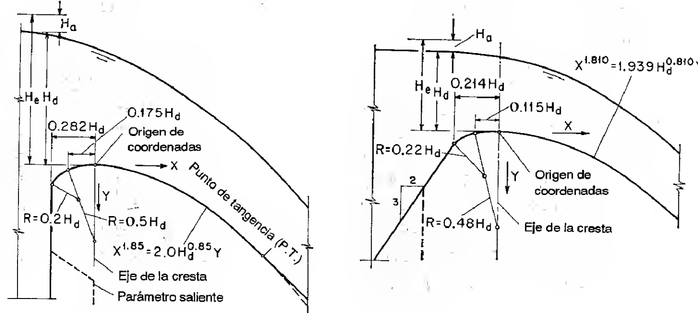
[3] Algunos ejemplos de otros perfiles bien conocidos son: 1) el *perfil Creager* [13], desarrollado mediante una extensión matemática de los datos de Bazin; 2) el *perfil de Creager modificado* [2], basado en los datos del U. S. Bureau of Reclamation sobre las pruebas de Denver [1]; 3) el *perfil de Lane-Davis* [14], basado en los datos del U. S. Bureau of Reclamation para las pruebas de Fort Collins [1] y los datos de Bazin [12] y de Scimemi [15]; 4) el *perfil Scimemi* [15]; 5) el *perfil Smetana* [16]; 6) el *perfil de Marchi* [17] y 7) el *perfil de Escande* [18]. Para un buen estudio de varios perfiles bien conocidos, *véase* [19].

[4] *Véase* [1]. El proyecto principal se inició en 1936 y las pruebas se efectuaron en el laboratorio de hidráulica del Bureau en Denver, Colorado. Experimentos anteriores realizados por el Bureau se efectuaron en 1932 en la Colorado Agricultural Experiment Station, Fort Collins, Colorado. Por lo general los primeros se conocen como *pruebas de Denver*, y los segundos, como *pruebas de Fort Collins*.

[5] De [20], Hydraulic Design Charts 111-1, WES 4-1-52; y 111-7 a 111-9, WES 2-54. En [21] se describe el desarrollo de las formas estándar WES.

Pendiente de la cara de aguas arriba	K	n
Vertical	2.000	1.850
3 en 1	1.936	1.836
3 en 2	1.939	1.810
3 en 3	1.873	1.776

Para pendientes intermedias, los valores aproximados de K y n pueden obtenerse graficando los anteriores valores contra las pendientes correspondientes e interpolando en la gráfica los valores requeridos para cualquier pendiente dentro del rango graficado.



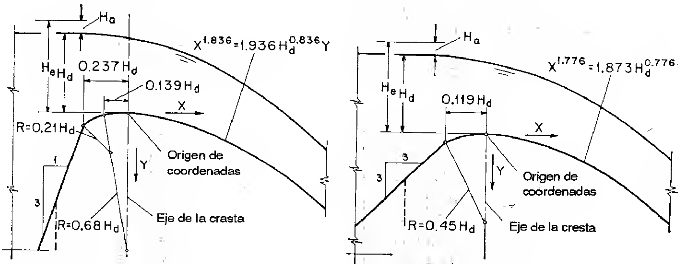


Figura 14-3. Formas estándar de vertederos WES (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station*).

Algunas veces la cara de aguas arriba de la cresta de un vertedero puede diseñarse con una saliente, como se muestra mediante las líneas punteadas de la figura 14-3. La forma de la cresta no se verá afectada por tales detalles, siempre y cuando la modificación empiece por lo menos en la mitad de la altura total H_e verticalmente por debajo del origen de coordenadas. Esto se debe a que las veloci-

dades verticales son pequeñas por debajo de esta profundidad y el efecto correspondiente en el perfil de flujo de la napa es insignificante.

14-4. Capacidad de descarga en vertederos de rebose. El caudal por encima de un vertedero puede calcularse mediante una ecuación de la forma de la ecuación (14-9). Para los vertederos diseñados con las formas WES, esta ecuación es

$$Q = CLH_e^{1.5} \tag{14-16}$$

donde H_e es la altura de energía total en pies sobre la cresta, *incluida* la altura de velocidad en el canal de aproximación. Pruebas en modelos sobre los vertederos han demostrado que el efecto en la velocidad de aproximación es insignificante cuando la altura h del vertedero es mayor que $1.33H_d$, donde H_d es la altura de diseño excluida la altura de velocidad de aproximación. En estas condiciones y con la altura de diseño (es decir, h/H_d mayor que 1.33 y $H_e = H_d$, para lo cual la altura de velocidad de aproximación es insignificante) el coeficiente de descarga C es $C_d = 4.03$.

En vertederos bajos con $h/H_d < 1.33$, la velocidad de aproximación tendrá un efecto apreciable sobre el caudal o el coeficiente de descarga y, en consecuencia, sobre el perfil de la napa. Puede utilizarse una gráfica adimensional (figura 14-4) basada en los datos de la Waterways Experiment Station [20] para mostrar el efecto de la velocidad de aproximación sobre la relación entre H_e/H_d y C/C_d para vertederos diseñados con las formas WES con su cara de aguas arriba vertical. Para vertederos con la cara de aguas arriba inclinada, el valor de C puede corregirse para tener en cuenta el efecto de la pendiente de aguas arriba, multiplicando C por un factor de corrección obtenido del cuadro adjunto en la figura 14-4. Esta corrección se desarrolló a partir de los datos del Bureau of Reclamation [1].

Ejemplo 14-1. Determine la elevación de la cresta y la forma de una sección de vertedero de rebose con su cara de aguas arriba vertical y con una longitud de cresta de 250 pies. El caudal de diseño es 75,000 pies³/s. La superficie del agua hacia la parte aguas arriba correspondiente al caudal de diseño se localiza en la cota 1,000.0 y el fondo promedio del canal se encuentra en la cota 880.0 (figura 14-5).

Solución. Se supone un vertedero de rebose alto, no se considera el efecto de la velocidad de aproximación, y $C_d = 4.03$. Mediante la ecuación de descarga, $H_e^{1.5} = Q/CL = 75{,}000/(4.03 \times 250) = 74.4$ y $H_e = 17.8$ pies.

La velocidad de aproximación es $V_a = 75{,}000/(250 \times 120) = 2.5$ pies/s y la altura de velocidad correspondiente es $H_a = 2.5^2/2g = 0.1$ pies. Luego la altura de diseño es $H_d = 1.78 - 0.1 = 17.7$ pies y la altura de la presa es $h = 120 - 17.7 = 102.3$ pies. Esta altura es mayor que $1.33H_d$ y, por consiguiente, el efecto de la velocidad de aproximación es insignificante.

La elevación de la cresta se localiza en $1{,}000.0 - 17.7 = 982.3$.

Mediante la ecuación (14-15) la forma de la cresta se expresa por $Y = X^{1.85}/23$. Las coordenadas de la forma calculada mediante esta ecuación se grafican tal como se muestra en la figura 14-5. La forma de la cresta aguas arriba del origen de coordenadas se construye de acuerdo con las dimensiones recomendadas en el cuadro de la figura 14-3. El diseño de la parte recta de la superficie del vertedero por debajo de la sección de la cresta depende de los requerimientos de estabilidad y de las características del cuenco de disipación localizado en el pie del vertedero. Se supone una pendiente de 0.6:1 para la parte recta de la superficie del vertedero aguas abajo.

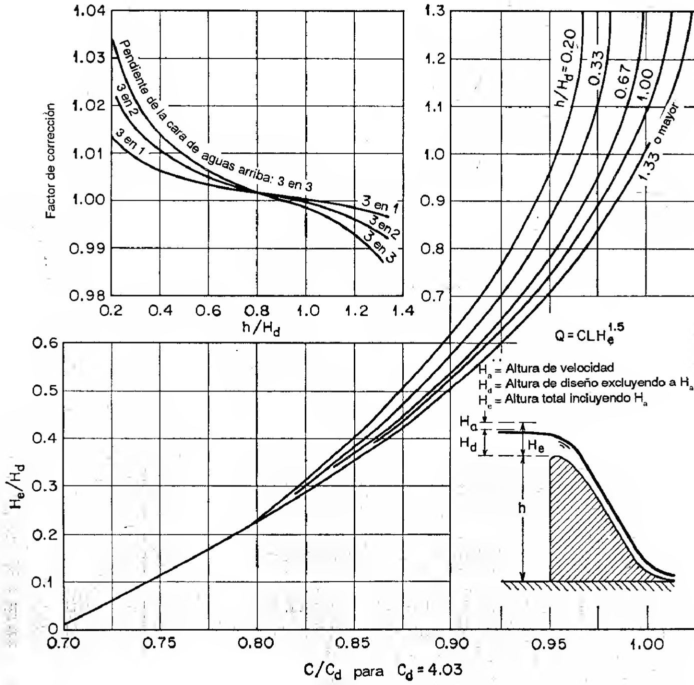


Figura 14-4. Relación altura-caudal para las formas estándar de vertederos WES.

14-5. Curva de capacidad de descarga en vertederos de rebose. El perfil de un vertedero de rebose puede diseñarse sólo para una altura. Esta altura es la *altura de diseño*, que por lo general produce una napa de flujo inferior que es muy similar al perfil del vertedero. Sin embargo, el vertedero también debe operar con otras alturas, menores o mayores que la altura de diseño. Para alturas menores la presión en la cresta será superior a la atmosférica pero seguirá siendo inferior a la hidros- tática. Para alturas mayores, por otro lado, la presión será menor que la atmosférica y puede ser tan baja que ocurra separación del flujo. Modelos experimentales indican, sin embargo, que la altura de diseño con seguridad puede ser excedida al menos en un 50%; por encima de esto, pueden desarrollarse fenómenos de cavitación peligrosa [4, p. 535].

Para vertederos diseñados con las formas WES, las curvas dadas en la figura 14-4 pueden utilizarse para determinar el coeficiente de descarga para alturas diferentes a la altura de diseño. De esta manera puede calcularse una curva de calibración del vertedero.

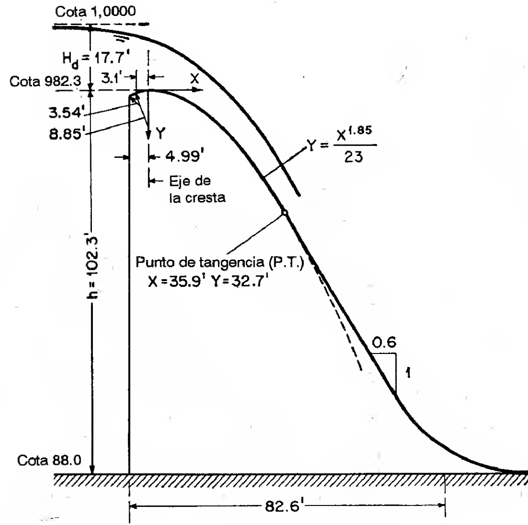


Figura 14-5. Diseño de la sección de un vertedero de rebose.

Para vertederos diseñados con otras formas, Bradley [22] desarrolló una curva universal (figura 14-6) que muestra la relación entre H_e/H_D y C/C_D. El término H_D es la altura de diseño *incluida* la altura de velocidad de aproximación y C_D es el coeficiente de descarga correspondiente. El término H_e es la altura total diferente de la altura de diseño y C es el coeficiente de descarga correspondiente. Esta curva está bien apoyada por pruebas en 50 crestas de vertederos de rebose con diferentes formas y condiciones de operación. Puede utilizarse para calcular de manera aproximada las curvas de calibración de la mayor parte de los vertederos de rebose.

La línea punteada de la figura 14-6, apoyada en los datos de 29 vertederos existentes, se aplica a vertederos con caídas ahogadas. Este es el tipo de vertederos en los cuales el flujo sobre ellos se afecta por las condiciones del canal de aguas abajo; ocurre cuando la pendiente de aguas abajo es plana y la profundidad de aproximación es pequeña. En este

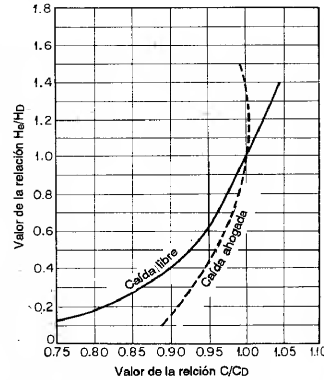


Figura 14-6. Coeficiente de descarga de vertederos de rebose para alturas diferentes a la altura de diseño (*según J. N. Bradley* [22]).

caso el vertedero a menudo es tan bajo que la altura de diseño es mayor que dos veces la altura del vertedero por encima del lecho de aguas arriba. Este tipo de vertederos se encuentra con frecuencia en presas de tierra.

Para utilizar la curva de Bradley se necesita conocer el coeficiente de descarga para la altura de diseño. Si este coeficiente es desconocido, pero la forma del vertedero está determinada, puede utilizarse un método[6] sugerido por Buehler [23]. Mediante este método, basado en una ecuación deducida por Brudenell [24], el coeficiente de descarga se calcula mediante la ecuación

$$C = 3.97 \left(\frac{H_e}{H_D}\right)^{0.12} \qquad (14\text{-}17)$$

donde H_e es una altura de operación y H_D es la altura de diseño teórica, *incluida* la altura de velocidad de aproximación, para un perfil estándar con una cara vertical de aguas arriba. Nótese que H_D es la altura de diseño teórica del perfil estándar para el cual se desarrolló la ecuación de Brudenell; por consiguiente, puede no ser igual a la altura de diseño real utilizada por Bradley o definida para otros perfiles.

El valor de H_D puede obtenerse a partir de un cuadro (figura 14-7) que muestra los perfiles estándar. El perfil de un vertedero determinado, como se diseñó o construyó, se dibuja primero en un papel transparente con la misma escala que los perfiles estándar. Este papel se coloca sobre el cuadro y luego se selecciona el valor de H_D asociado con el perfil estándar que da el mejor ajuste. Para un determinado perfil, los valores de H_D que dan el mejor ajuste pueden ser diferentes en los lados de aguas arriba y aguas abajo. El mayor de los dos valores indicados de H_D es el que debe utilizarse. Por ejemplo, el perfil de un vertedero se muestra en el cuadro mediante una línea punteada. El mayor valor de H_D es aproximadamente 45 pies, en el lado de aguas arriba de la cresta.

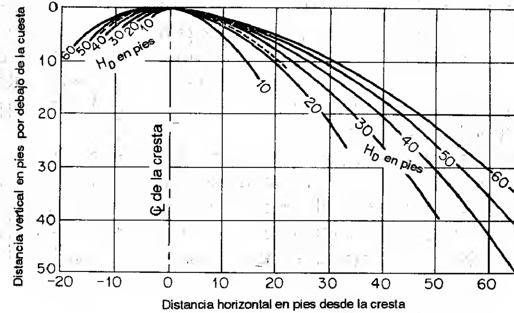


Figura 14-7. Formas estándar de vertederos para diferentes valores de H_D (*según B. Buehler* [23]).

[6] Un método con el mismo propósito también fue propuesto por Bradley [22]; este método ajusta el perfil dado a perfiles existentes con coeficientes de descarga conocidos.

Mediante el cuadro y la ecuación (14-17) puede calcularse la curva de calibración de un vertedero de perfil conocido.

Basados en comparaciones con pruebas de modelos reales, tanto el método de Bradley como el de Buehler han demostrado arrojar caudales muy exactos con excepción de los correspondientes a alturas muy bajas. A alturas bajas de alrededor de 5 pies, el caudal calculado puede estar un 8% por debajo del valor real. Sin embargo, para propósitos prácticos, ambos métodos son suficientemente aproximados.

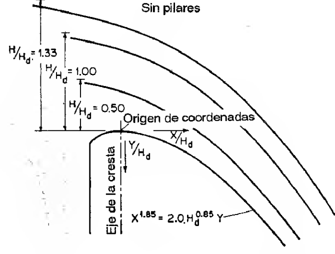
14-6. Perfil de la napa superior del flujo en vertederos. La forma del perfil de flujo de la napa superior sobre la cresta de un vertedero es importante en el diseño de los muros de contención y en la selección de elevación del pivote para compuertas radiales (compuertas *tainter*). Las formas WES para vertederos de rebose altos con cara vertical de aguas arriba han sido investigadas por medio de pruebas en modelo[7] por el U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station. La figura 14-8 muestra las formas y las coordenadas X y Y para el perfil de la napa superior obtenidas a partir de esas pruebas con velocidades de aproximación insignificantes, para condiciones con pilares o sin ellos y para tres diferentes relaciones de altura. El término H_d es la altura de diseño *excluida* la altura de velocidad y H es la altura de operación diferente de la altura de diseño, también *excluida* la altura de velocidad. Los perfiles para relaciones de altura intermedias pueden interpolarse. Debido al efecto de contracción causado por los pilares, se produce una joroba pronunciada entre $X/H_d = -0.6$ y 0 sobre el perfil de la napa superior a lo largo de los pilares cuando el caudal es alto. Los perfiles de la napa superior para tres vanos de compuerta adyacentes a los estribos se dan en la figura 14-9, que muestra los efectos de los estribos sobre los perfiles de la napa.

Nótese que la superficie superior de la napa está expuesta a la atmósfera y, por consiguiente, sujeta a alteraciones debidas al viento y a corrientes de aire y a la absorción del aire circundante. Como resultado, el flujo es aireado y la superficie se vuelve inestable y ondulosa. Las coordenadas de la forma de la napa superior dadas en las figuras 14-8 y 14-9 sólo representan casos ideales, donde el aire no juega ningún papel. La superficie de la napa superior para caras de aguas arriba con pendientes deben tener una elevación inferior a la correspondiente a una cara vertical de aguas arriba. Por consiguiente, las coordenadas dadas pueden utilizarse con seguridad para vertederos con caras pendientes de aguas arriba, para los cuales no existen datos disponibles recientes.

14-7. Efecto de los pilares en vertederos con compuertas. Los pilares son necesarios para formar los lados de las compuertas en vertederos controlados. El efecto de estos pilares es contraer el flujo y, por consiguiente, alterar la longitud efectiva de la cresta de los vertederos. La longitud efectiva de uno de los vanos en un vertedero controlado por compuertas puede expresarse como

$$L = L_0 - KNH_e \qquad (14\text{-}18)$$

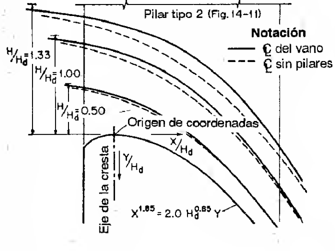
[7] Estas pruebas se denominaron *general spillway tests - CW 801*. La información dada aquí es de [20], Hydraulic Design Charts 111-11 a 111-15, WES 9-54.



COORDENADAS PARA LA NAPA SUPERIOR SIN PILARES*

$H/H_d = 0.50$		$H/H_d = 1.00$		$H/H_d = 1.33$	
X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d
−1.0	−0.490	−1.0	−0.933	−1.0	−1.210
−0.8	−0.484	−0.8	−0.915	−0.8	−1.185
−0.6	−0.475	−0.6	−0.893	−0.6	−1.151
−0.4	−0.460	−0.4	−0.865	−0.4	−1.110
−0.2	−0.425	−0.2	−0.821	−0.2	−1.060
0.0	−0.371	0.0	−0.755	0.0	−1.000
0.2	−0.300	0.2	−0.681	0.2	−0.019
0.4	−0.200	0.4	−0.586	0.4	−0.821
0.6	−0.075	0.6	−0.465	0.6	−0.705
0.8	0.075	0.8	−0.320	0.8	−0.569
1.0	0.258	1.0	−0.145	1.0	−0.411
1.2	0.470	1.2	0.055	1.2	−0.220
1.4	0.705	1.4	0.294	1.4	−0.002
1.6	0.972	1.6	0.563	1.6	0.243
1.8	1.269	1.8	0.857	1.8	0.531

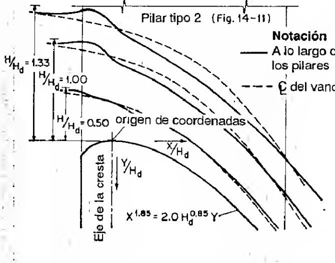
*Basado en las pruebas CW 801 para velocidad de aproximación insignificante.



COORDENADAS PARA LA NAPA SUPERIOR EN LA LINEA CENTRAL DE UN VANO CON DOS PILARES*

$H/H_d = 0.50$		$H/H_d = 1.00$		$H/H_d = 1.33$	
X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d
−1.0	−0.482	−1.0	−0.941	−1.0	−1.230
−0.8	−0.480	−0.8	−0.932	−0.8	−1.215
−0.6	−0.472	−0.6	−0.913	−0.6	−1.194
−0.4	−0.457	−0.4	−0.890	−0.4	−1.165
−0.2	−0.431	−0.2	−0.855	−0.2	−1.122
0.0	−0.384	0.0	−0.805	0.0	−1.071
0.2	−0.313	0.2	−0.735	0.2	−1.015
0.4	−0.220	0.4	−0.647	0.4	−0.944
0.6	−0.088	0.6	−0.539	0.6	−0.847
0.8	0.075	0.8	−0.389	0.8	−0.725
1.0	0.257	1.0	−0.202	1.0	−0.564
1.2	0.462	1.2	0.015	1.2	−0.356
1.4	0.705	1.4	0.266	1.4	−0.102
1.6	0.977	1.6	0.521	1.6	0.172
1.8	1.278	1.8	0.860	1.8	0.465

*Basado en las pruebas CW 801 para velocidad de aproximación insignificante.



COORDENADAS PARA LA NAPA SUPERIOR A LO LARGO DE LOS PILARES*

$H/H_d = 0.50$		$H/H_d = 1.00$		$H/H_d = 1.33$	
X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d	X/H_d	Y/H_d
−1.0	−0.495	−1.0	−0.950	−1.0	−1.253
−0.8	−0.492	−0.8	−0.940	−0.8	−1.221
−0.6	−0.490	−0.6	−0.929	−0.6	−1.209
−0.4	−0.482	−0.4	−0.933	−0.4	−1.218
−0.2	−0.440	−0.2	−0.925	−0.2	−1.244
0.0	−0.383	0.0	−0.779	0.0	−1.103
0.2	−0.265	0.2	−0.651	0.2	−0.950
0.4	−0.185	0.4	−0.545	0.4	−0.821
0.6	−0.076	0.6	−0.425	0.6	−0.689
0.8	0.060	0.8	−0.285	0.8	−0.549
1.0	0.240	1.0	−0.121	1.0	−0.389
1.2	0.445	1.2	0.067	1.2	−0.215
1.4	0.675	1.4	0.286	1.4	0.011
1.6	0.925	1.6	0.521	1.6	0.208
1.8	1.177	1.8	0.779	1.8	0.438

*Basado en las pruebas CW 801 para velocidad de aproximación insignificante.

Figura 14-8. Perfiles de flujo de la napa superior sobre vertederos WES con pilares y sin ellos (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station*).

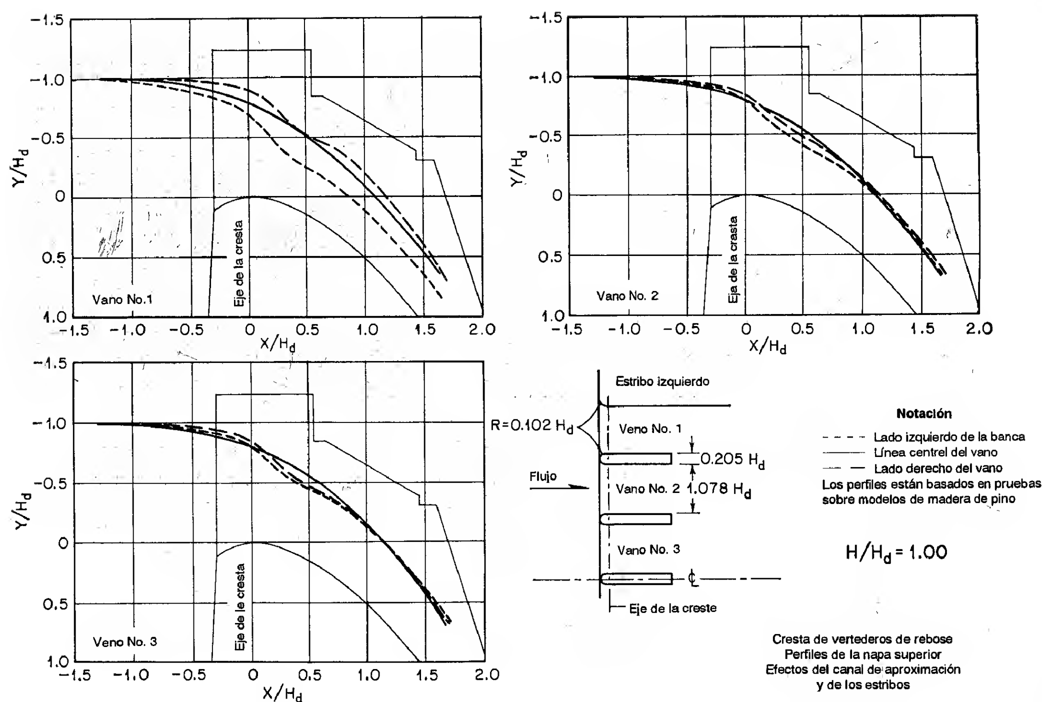


Figura 14-9. Perfiles de flujo de la napa superior sobre vertederos WES que muestran los efectos de canal de aproximación y de estribos (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station*).

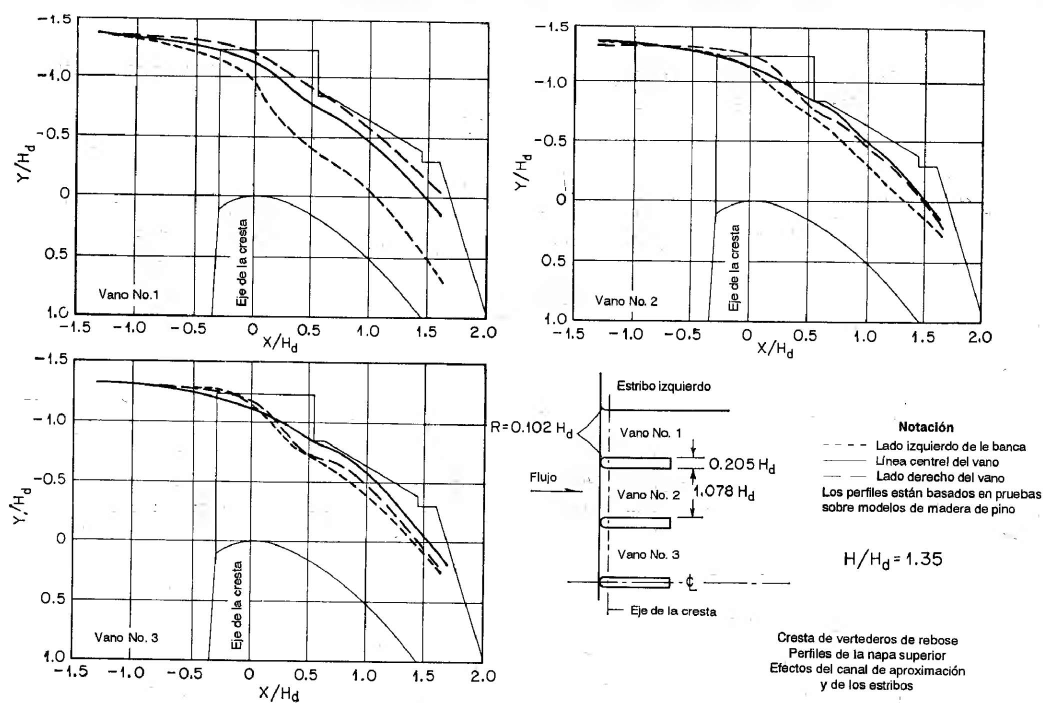


Figura 14-9 (*continuación*).

donde L_0 es la luz total del vano de compuertas entre pilares; K es el coeficiente de contracción del pilar; N es el número de contracciones laterales, igual a 2 para cada vano de compuerta; y H_e es la altura total sobre la cresta *incluida* la altura de velocidad. Para el cálculo del caudal a través de vertederos controlados por compuertas, debe utilizarse la longitud efectiva determinada mediante la ecuación anterior. Sin embargo, el coeficiente de descarga se supone igual para vertederos con compuertas y sin compuertas.

El coeficiente de contracción por pilares varía sobre todo con la forma y la posición de la nariz del pilar, la condición de altura, la profundidad del flujo de aproximación y la operación de las compuertas adyacentes. El valor aproximado de K dado por Creager y Justin [3, p. 120] varía desde 0.1, para narices anchas y planas, hasta 0.04, para narices delgadas o puntiagudas, y es 0.035 para narices redondeadas. Estos valores se aplican a pilares que tienen espesores cercanos a un tercio de la altura sobre la cresta cuando todas las compuertas están abiertas. Cuando sólo una compuerta está abierta y las compuertas adyacentes están cerradas, estos valores son aproximadamente 2.5 veces mayores.

El U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station ha realizado pruebas (*general spillway test CW 801* [20]) sobre diferentes formas de la nariz de pilares para vertederos con la forma WES. Con base en estas pruebas se recomienda un pilar de nariz redondeada para uso general con alturas altas. El valor de K para un pilar de nariz redondeada graficado contra la relación de H_e/H_d con distancias variables aguas arriba de la cresta se muestran en la figura 14-10. En la figura 14-11 se muestra el efecto de otras formas de la nariz sobre el coeficiente de contracción. La altura de los vertederos de prueba fue $6.67H_d$, la cual arroja una velocidad de aproximación insignificante. En estas condiciones de prueba, estos datos son aplicables a vertederos altos y a la condición de que las compuertas adyacentes estén abiertas. Para vertederos bajos con velocidades de aproximación significativas, el coeficiente de contracción por pilar para pilares de nariz redondeada con diferentes profundidades de aproximación se muestra en la figura 14-12. En ausencia de datos adecuados, los coeficientes de contracción por pilares para otras formas de nariz y vertederos bajos pueden obtenerse al proporcionar los datos para vertederos altos, es decir, los de la figura 14-11.

14-8. Presión en vertederos de rebose. Si el perfil del vertedero se diseña exactamente siguiendo la forma de la napa inferior de una caída libre, la presión sobre la cresta del vertedero bajo la altura de diseño en teoría debería ser nula. Por razones prácticas, sin embargo, tal perfil ideal por lo general se modifica de tal manera que se desarrollan bajas presiones bajo la altura de diseño. Como el vertedero debe operar con alturas diferentes de la altura de diseño, la presión se incrementará con alturas bajas y disminuirá con alturas altas. Al suponer un flujo irrotacional bidimensional, la presión sobre la cresta del vertedero puede determinarse con exactitud de manera analítica mediante un método numérico, de manera gráfica mediante un análisis de red de flujo, de manera instrumental mediante una analogía electrónica[8]. *Sin* embargo, una determinación más exacta de la presión dependerá de pruebas en modelos.

[8] *Véanse* las referencias dadas en la sección 13-2. En [25] se da un procedimiento práctico para el método de relajación aplicado al problema en consideración.

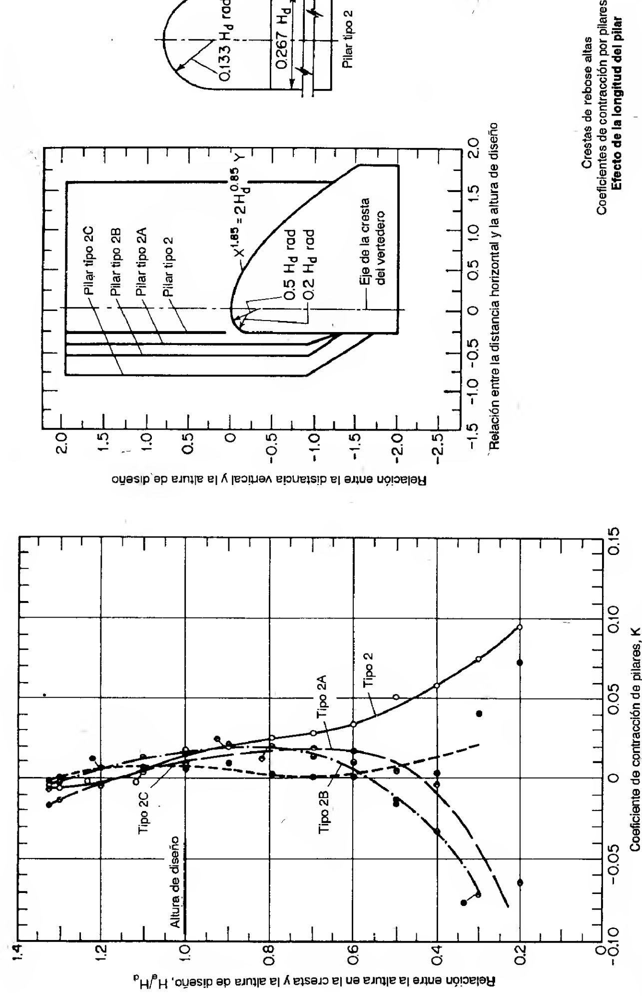
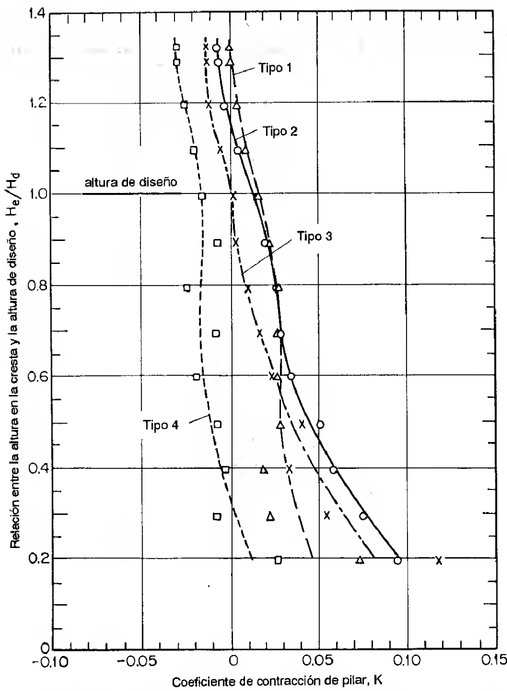


Figura 14-10. Coeficiente de contracción para pilar de nariz redondeada en presas altas (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 111-6, *WES* 4-1-53).



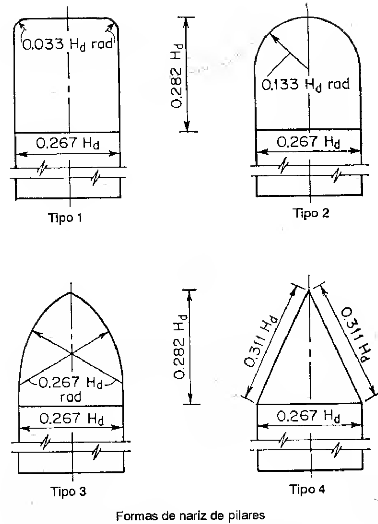
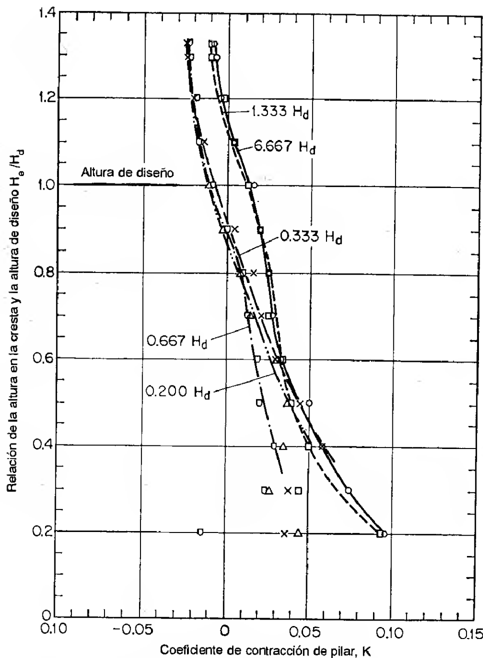
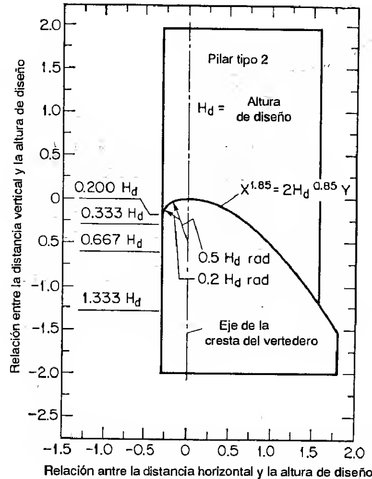
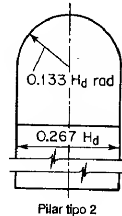


Figura 14-11. Coeficiente de contracción para pilares con diferentes formas de nariz en presas altas con la nariz localizada en el mismo plano vertical que la cara de aguas arriba del vertedero WES (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 111-5, *WES* 4-1-53).



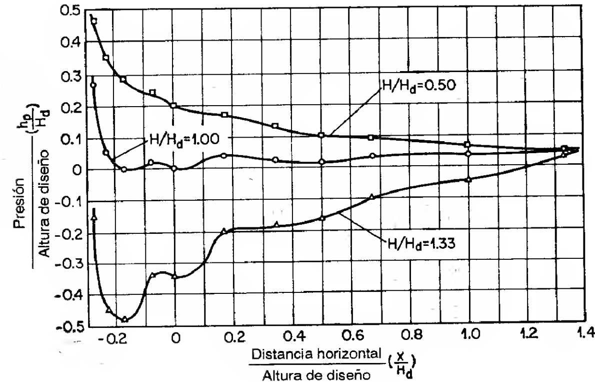




Crestas OGEE bajas
Coeficiantas de contracción por pilares
Efecto de la profundidad de aproximación

Figura 14-12. Coeficiente de contracción para pilar de nariz redondeada en presas altas (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 122-2, *WES* 4-1-53).

La distribución de presiones en la cresta de un vertedero con pilares o sin ellos en tres relaciones de altura diferentes, con base en las pruebas CW 801 de las formas WES [20], se muestran en las gráficas adimensionales (figura 14-13). Las presiones para relaciones de altura intermedias pueden obtenerse mediante interpolación.



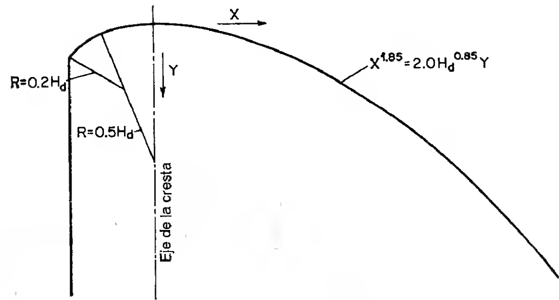
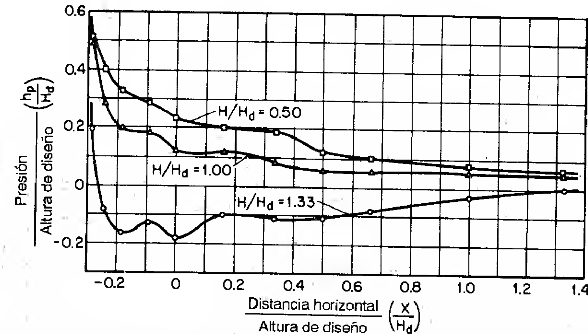


Figura 14-13. Presiones sobre la cresta de vertederos de rebose WES altos. (*a*) Sin pilares (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 111-16, *WES* 9-54).

Debido a la conversión de energía estática en energía cinética, a medida que el agua fluye sobre el vertedero, la presión hidrostática en la cara de aguas arriba de la cresta del vertedro se reduce realmente. Esta reducción en la presión no es significativa pero, donde el brazo de momento es largo, como ocurre en presas altas, debe considerarse el efecto sobre la estabilidad. El método de análisis usual mediante la suposición

de una distribución de presiones en línea recta cerca de la cresta dará como resultado un sobrediseño del vertedero particularmente para presas altas. Tal sobrediseño es un procedimiento aceptable que proporciona un factor de seguridad adicional[9].



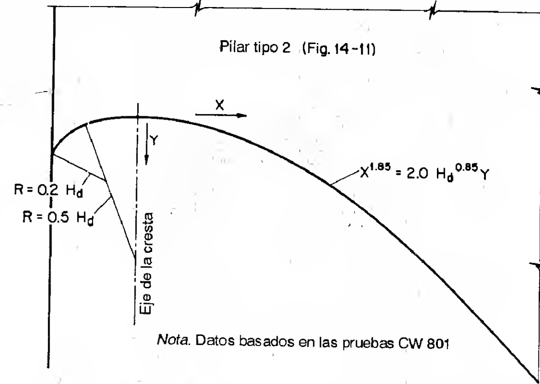


Figura 14-13. Presiones sobre la cresta de vertederos de rebose WES altos (*continuación*). (*b*) A lo largo de la línea central de un vano de pilares (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 111-16/1, *WES* 3 -55).

Harris [26] determinó tanto teórica como experimentalmente la reducción de presiones en la cara de aguas arriba en un vertedero vertical. Con base en las pruebas CW 801 para crestas sin compuertas con formas WES con caras verticales de aguas arriba y en las pruebas del U. S. Bureau of Reclamation sobre presiones en un vertedero de cresta delgada bajo la altura de diseño, se encontró que la resultante de

[9] En realidad, el efecto en la estabilidad estructural debido a esta reducción de presión se compensa en gran parte por el momento de la componente horizontal de la presión de la napa sobre la superficie de la cresta..

la presión reducida es aproximadamente $12.9H_d^2$ lb por unidad de longitud del vertedero, que actúan horizontalmente a una distancia de $0.161H_d$ pies por debajo de la parte superior de la cresta.

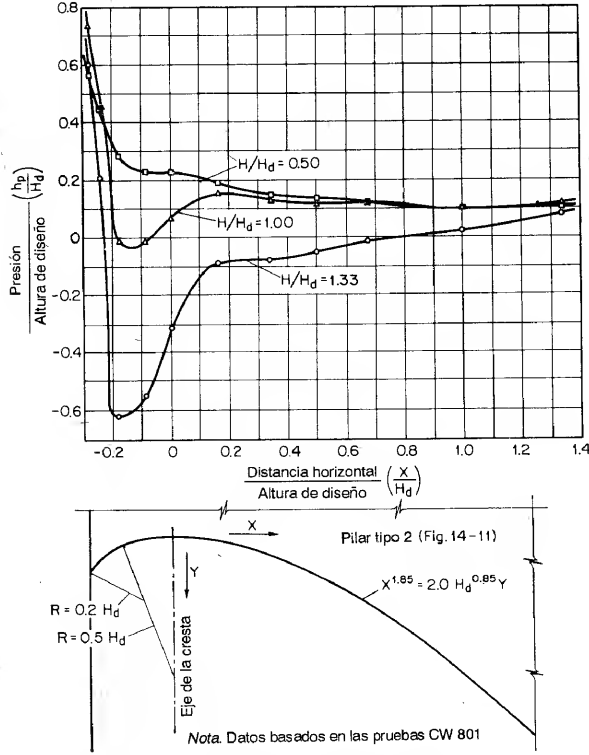


Figura 14-13. Presiones sobre la cresta de vertederos de rebose WES altos (*continuación*). (*c*) A lo largo de los pilares (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station* [20], *Hydraulic Design Chart* 111-16/2, *WES* 3 -55).

14-9. Compuertas de tambor. La compuerta de tambor es una compuerta pivoteada que flota en una cámara y se mantiene a flote en su posición mediante la regulación del nivel de agua en la cámara. Ante todo se utiliza para controlar la superficie del agua hacia aguas arriba. Como aparato de medición, la compuerta de tambor se asemeja a un vertedero con una cara curva de aguas arriba para la mayor parte de su trayectoria de pivotaje. El ángulo θ (figura 14-14) se forma entre la horizontal y una línea tangente dibujada en el borde de aguas abajo de la compuerta.

compuerta. Este ángulo se considera positivo cuando se mide por encima de la horizontal, y negativo cuando se mide por debajo de la horizontal. Para valores positivos de θ la compuerta actúa como un vertedero de cresta delgada, el punto de control se localiza en el borde de aguas abajo de la compuerta y la altura se mide por encima de este punto. Para valores negativos de θ la compuerta actúa como un vertedero de cresta curva. Su punto de control se localiza en el punto más alto de la superficie de la compuerta y la altura se mide por encima de este punto.

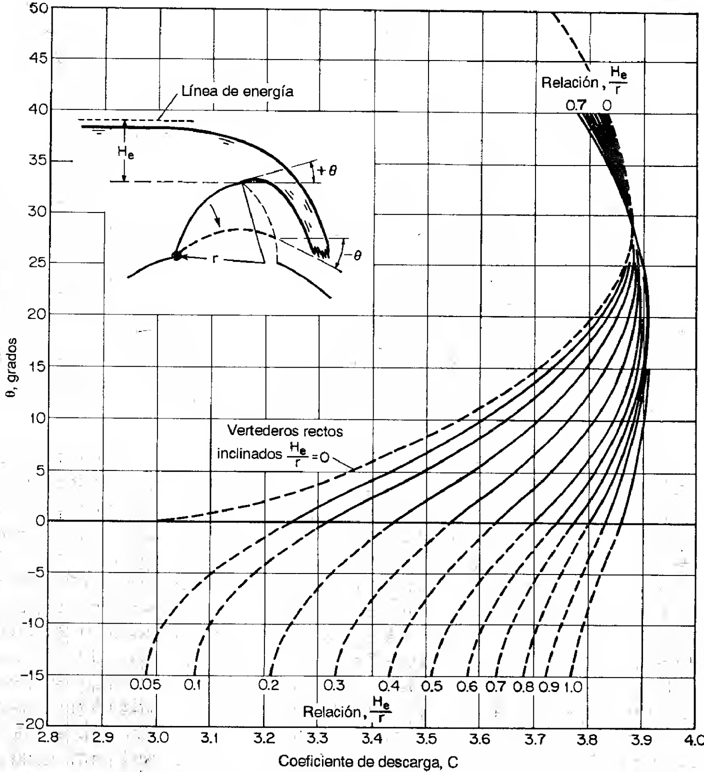


Figura 14-14. Curvas para la determinación del coeficiente de descarga de compuertas de tambor (*según J. N. Bradley* [27]).

Debido a que la compuerta de tambor actúa como un vertedero, el caudal a través de la compuerta puede expresarse como

$$Q = CLH_e^{1.5} \tag{14-16}$$

donde C es el coeficiente de descarga, L es la longitud de la compuerta y H_e es la altura total. Investigaciones de laboratorio han demostrado que el flujo por encima de esta compuerta puede definirse por completo mediante H_e, θ, C, el radio r de la compuerta y la profundidad de aproximación. Sin embargo, la profundidad de aproximación tiene una influencia muy pequeña sobre el flujo cuando la profundidad de aproximación, medida por debajo del punto más alto de la compuerta, es igual o mayor que dos veces la altura sobre la compuerta. Esta condición se satisface en la mayor parte de las instalaciones de compuertas de tambor, en especial cuando la compuerta se encuentra en una posición elevada. Por consiguiente, puede considerarse que el coeficiente C es una función de H_e, θ y r.

Bradley [27] realizó un estudio muy completo sobre compuertas de tambor, mediante datos obtenidos en 40 modelos hidráulicos de estructuras de compuertas de tambor existentes, con diferentes tamaños y escalas. Los resultados de este estudio se muestran por medio de una familia de curvas (figura 14-14) donde C se grafica contra θ, con la relación H_e/r como un parámetro. Cuando $H_e/r = 0$, la compuerta se convierte en un vertedero recto inclinado y la línea punteada correspondiente en la familia de curvas se basa en los datos de Bazin [12]. Las curvas se extienden hacia abajo hasta $\theta = -15°$. Los coeficientes de descarga de la región entre $\theta = -15°$ y la compuerta completamente cerrada pueden obtenerse mediante interpolación gráfica de las curvas de calibración de la compuerta. El cálculo de la curva de calibración cuando la compuerta se encuentra cerrada por completo es igual a la de un vertedero con una cresta no controlada (sección 14-5).

14-10. Flujo a la salida de vertederos de rebose. La velocidad de flujo teórica a la salida de un vertedero de rebose (figura 14-15) puede calcularse mediante

$$V_1 = \sqrt{2g(Z + H_a - y_1)} \tag{14-19}$$

donde Z es la caída o la distancia vertical en pies desde el nivel del embalse aguas arriba hasta el nivel del piso en la salida; H_a es la altura de velocidad de aproximación aguas arriba; y y_1 es la profundidad de flujo a la salida. Debido a la pérdida de energía involucrada en el flujo sobre el vertedero, la velocidad real es siempre menor que el valor teórico. La magnitud de la velocidad real depende sobre todo de la altura sobre la cresta del vertedero, la caída, la pendiente y la rugosidad de la superficie del vertedero[10]. Mediante razonamiento y experimentos se demuestra que la desviación de la velocidad real con respecto a su valor teórico se vuelve mayor cuando la altura es menor y cuando la caída es mayor.

Con base en la experiencia, en análisis teóricos y en una cantidad limitada de información experimental obtenida en pruebas sobre prototipos de las presas Shasta y Grand Coulee, el U. S Bureau of Reclamation [29] estudió la relación entre la velocidad real y su valor teórico[11]. A partir de los resultados de este estudio se preparó una tabla (figura 14-15) para mostrar la velocidad real a la salida de vertederos en diferentes alturas, caídas, pendientes de 1 en 0.6 hasta 1 en 0.8, y condiciones de la rugosidad superficial promedio. Se considera que esta tabla es suficientemente acertada para propósitos de diseño preliminar, a pesar de que

[10] Para información adicional, *véase* [28].
[11] La velocidad teórica definida por el Bureau es $V_1 = \sqrt{2g(Z - 0.5H)}$.

puede mejorarse mediante información experimental adicional disponible en el futuro.

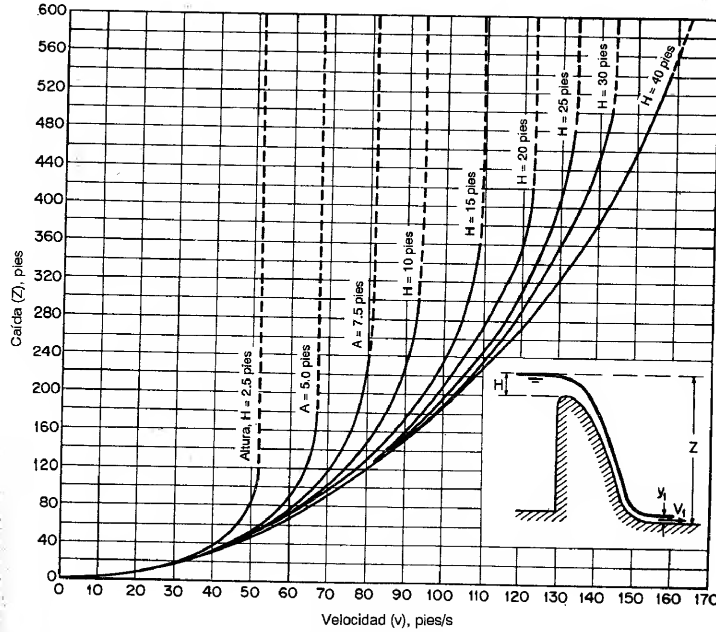


Figura 14-15. Curvas para la determinación de la velocidad a la salida de vertederos con pendientes de 1 en 0.6 a 0.8.

Experimentos hechos por Bauer [30] indican que las pérdidas por fricción durante la aceleración del flujo hacia aguas abajo sobre la cara del vertedero pueden ser considerablemente menores que las pérdidas por fricción normales en un flujo con una turbulencia bien desarrollada. Por consiguiente, la pérdida por fricción no es significativa en pendientes empinadas, pero se vuelve muy importante si la pendiente es muy pequeña. Por esta razón, la tabla mostrada en la figura 14-15 no es aplicable a pendientes menores que 1 en 0.6. Para pendientes menores, el problema puede analizarse mediante el método descrito en la sección 11-4.

Al final de la superficie inclinada del vertedero, el flujo cambia su dirección de manera abrupta y por consiguiente produce presiones centrífugas significativas. Para crear una transición de flujo suave y prevenir el impacto del agua que cae para que no socave la cimentación, la superficie de la salida del vertedero se diseña como una cubeta curva [31]. Para ser realmente efectiva la cubeta debe ser tangente a la

cimentación o muy cercana a esto. El radio R de la cubeta, medido en pies, puede estimarse aproximadamente mediante la siguiente ecuación empírica:

$$R = 10^{(V + 6.4H + 16)/(3.6H + 64)} \qquad (14\text{-}20)$$

donde V es la velocidad en pies/s del flujo a la salida y H es la altura en pies, *excluida* la altura de velocidad de aproximación sobre la cresta del vertedero. La presión de diseño en la cubeta y la máxima presión en los muros laterales deben ser iguales a la presión centrífuga y a la presión hidrostática correspondiente a la profundidad de aguas abajo. La presión centrífuga puede calcularse mediante la ecuación (2-8) para los datos conocidos de radio de la cubeta y de velocidad de flujo a la salida. Sin embargo, la determinación de la presión en la cubeta puede hacerse con más exactitud mediante un análisis de red de flujo o por medio del método de relajación o, de manera aún más precisa, mediante pruebas en modelos. Los resultados de tal determinación indicaron que el efecto en la curvatura de la cubeta sobre la presión realmente se extiende aún más abajo de los extremos de la curva.

El flujo que se aleja de la salida de un vertedero de rebose alto es un chorro de alta velocidad, que contiene una cantidad de energía muy grande capaz de causar socavaciones severas. A menos que la parte cercana aguas abajo sea resistente a este tipo de socavación, en el diseño deben tomarse medidas para evitar el peligro de socavación. Métodos muy comunes son el diseño de un vertedero en salto de esquí, la utilización de una profundidad sumergida aguas abajo como freno y el uso de un resalto hidráulico como disipador de energía.

14-11. Vertedero en salto de esquí. En este tipo de vertedero la salida se diseña en forma de un labio grande especial o cubeta, la cual lanza el chorro completo de flujo al aire. Parte de la energía del chorro se disipa en el aire, pero en cualquier caso éste cae nuevamente en el río a una distancia segura de la presa. Este diseño lo propuso por primera vez Coyne [32, 33]. La figura 14-16 muestra un vertedero en salto de esquí común. En este diseño la placa del fondo del vertedero es también el techo de la casa de máquinas, la cual se construyó contra el lado de aguas abajo de la presa. La placa se reforzó en extremo para tener en cuenta las grandes cargas debidas principalmente a la presión centrífuga del chorro que actúa a la salida del vertedero[12].

14-12. Vertederos de rebose sumergidos. Los vertederos de cresta delgada están sumergidos cuando la profundidad de aguas abajo es mayor que la altura de la cresta. Debido a que el flujo sumergido a menudo es inestable, y tiene perturbaciones superficiales considerables inmediatamente aguas abajo, estos vertederos o vertederos de cresta delgada no son satisfactorios para mediciones precisas de flujo. Los estudios sobre vertederos de cresta redondeada sumergidos son útiles, sin embargo, debido a que dan información necesaria para el diseño de presas de rebose bajas, las cuales ocasionalmente pueden estar sujetas a sumergencia.

[12] Para información adicional, *véanse* [34] a [36]. Vertederos en salto de esquí bien conocidos se encuentran instalados en la presa Castelo Do Bode, en Portugal, y en las presas Marèges, Bort, l'Agle, Saint Étienne-Cantalès y Chastang, en Francia. Cada una de las tres últimas presas tiene dos vertederos en salto de esquí. Los chorros de los dos vertederos pueden unirse y colisionar en el aire, disipando así una gran cantidad de energía.

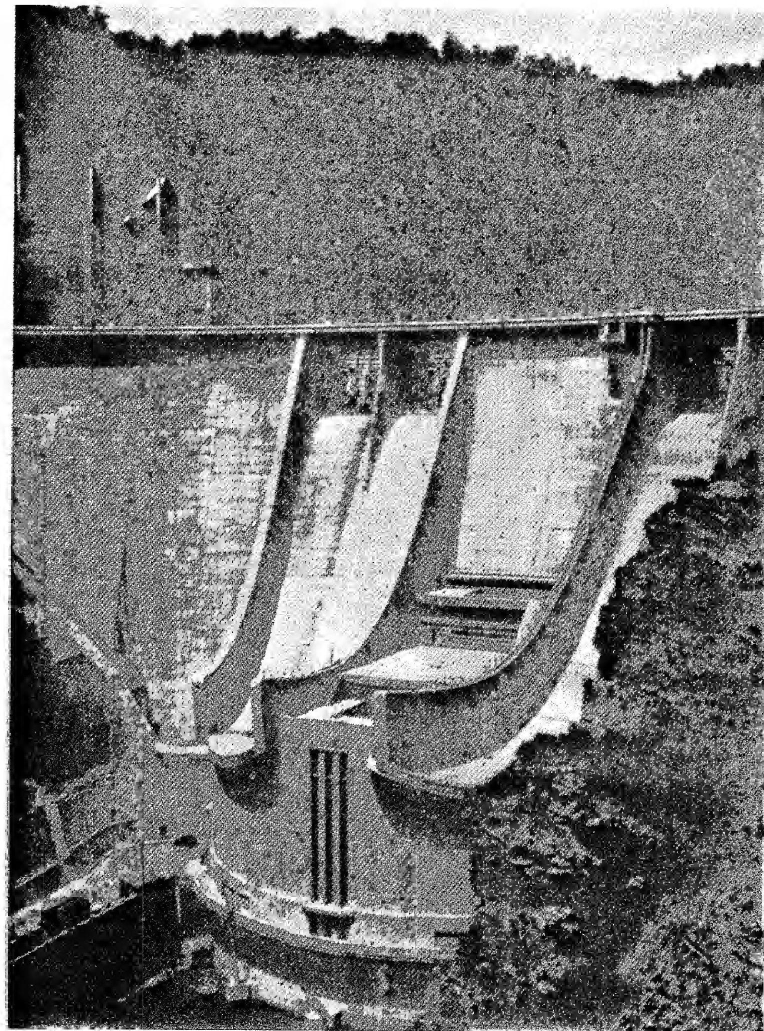


Figura 14-16. El vertedero en salto de esquí de la presa l'Aigle (*cortesía de P. Danel, Ets. NEYRPIC*).

El U. S. Bureau of Reclamation [1, 37][13] ha realizado extensos estudios sobre vertederos de cresta redondeada sumergidos. En estos estudios los flujos se clasifican en cuatro tipos distintos de acuerdo con la condición de flujo prevaleciente en la cara de aguas abajo: 1) flujo supercrítico, 2) flujo subcrítico que involucra un resalto hidráulico, 3) flujo acompañado por un resalto ahogado con un chorro que se sumerge y 4) flujo que se aproxima a una sumergencia completa.

La sumergencia del vertedero o vertedero de cresta delgada reducirá el coeficiente de descarga correspondiente a un flujo no sumergido. Los resultados de la prueba del Bureau of Reclamation, sobre esta reducción, expresadas en porcentaje del coeficiente de descarga para el flujo no sumergido (figura 14-4), se han presentado en una tabla para los cuatro tipos de flujo antes mencionados. Esta tabla, ligeramente modificada (figura 14-17), fue verificada además con el uso de otros datos[14] por el U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station[15]. El cuadro también es aplicable a la determinación de los coeficientes correspondientes a las formas WES en condiciones sumergidas.

En la tabla (figura 14-17) h_d es la caída desde el nivel del embalse aguas arriba hasta la elevación de la superficie del agua hacia aguas abajo, H_e es la altura total por encima de la cresta y d es la profundidad aguas abajo. El patrón general de las curvas muestra que, para relaciones bajas de $(h_d + d)/H_e$, el flujo es de tipo 1 o supercrítico, y que la reducción en el coeficiente se afecta esencialmente por esta relación y es independiente de h_d/H_e. La sección transversal BB en la parte superior derecha de la tabla muestra la relación de $(h_d + d)/H_e$ en $h_d/H_e = 0.78$. Para valores grandes de $(h_d + d)/H_e$, por otro lado, la reducción en el coeficiente esencialmente se afecta por la relación h_d/H_e. En estas condiciones, para valores de h_d/H_e menores que 0.10, el flujo es de tipo 4, el chorro se localiza en la superficie y no ocurre resalto. Para valores de h_d/H_e, superiores a 0.10, el flujo es de tipo 3 o acompañado por un resalto ahogado con un chorro que se sumerge. La sección transversal AA muestra las relaciones de h_d/H_e en $(h_d + d)/H_e$ cercano a 5.0. El flujo subcrítico o flujo tipo 2 ocurre en la región indicada en el cuadro. También se muestran otras regiones para condiciones de flujo transicional.

Las presiones y los perfiles superficiales comunes para flujo sobre vertederos sumergidos se muestran para diferentes valores de $(h_d + d)/H_e$ y h_d/H_e para los cuatro tipos de flujo (figura 14-18). Éstos se seleccionaron de los datos del Bureau of Reclamation. Son útiles en el diseño de vertederos para obtener estabilidad.

[13] Otros estudios bien conocidos se reportan en [38] a [40].
[14] Datos dados en [41] a [44].
[15] De [20], Hydraulic Design Chart 111-4, WES 4-1-53.

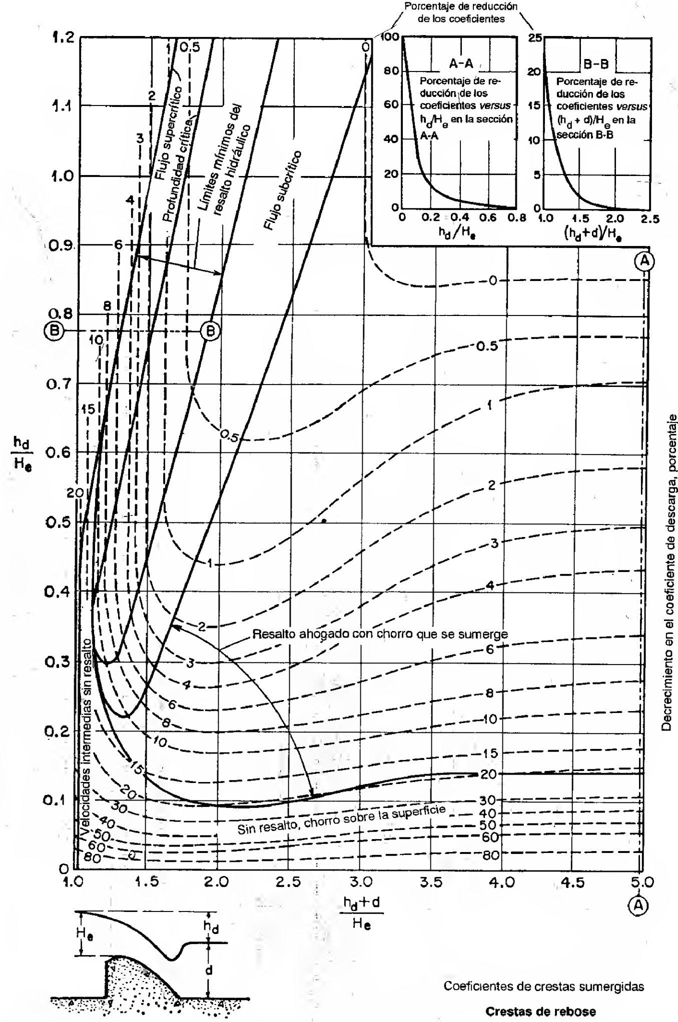


Figura 14-17. Disminución del coeficiente de descarga para vertederos de rebose sumergidos (*U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station*).

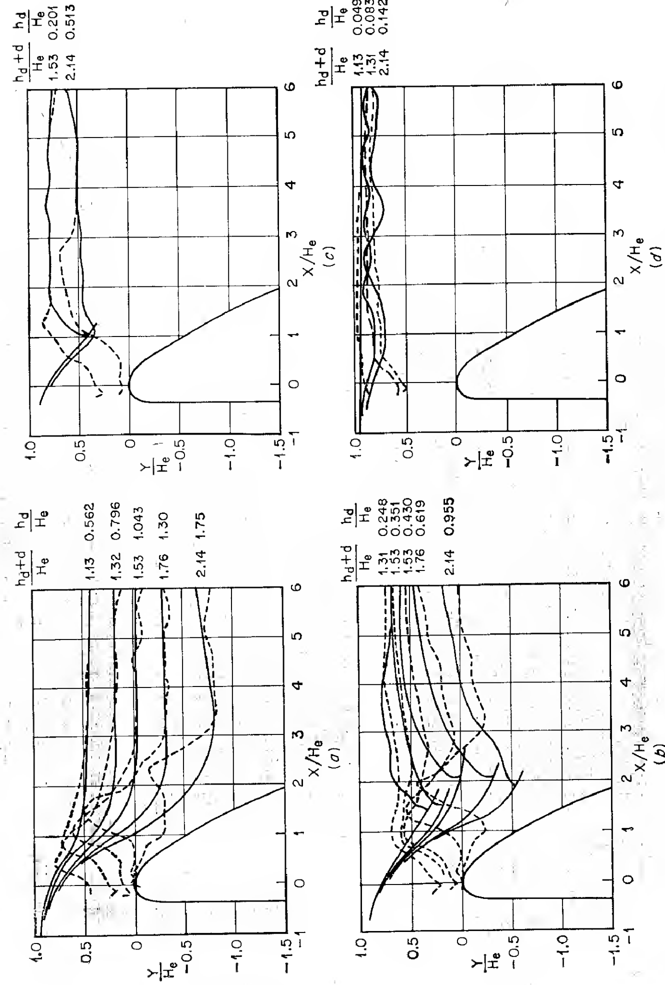


Figura 14-18. Perfiles comunes de presiones (líneas punteadas) y de la superficie (líneas continuas) para el flujo sobre presas de rebose sumergidas (*seleccionados de los datos del U. S. Bureau of Reclamation* [1]). (*a*) Flujo supercrítico; (*b*) flujo con un resalto hidráulico; (*c*) flujo con un resalto hidráulico ahogado; (*d*) flujo que se aproxima a sumergencia completa.

PROBLEMAS

14-1. Un vertedero de cresta delgada vertical, de 20 pies de alto y 60 pies de largo, se construye como un vertedero de rebose sin contracciones laterales. Cuando la altura por encima de la cresta del vertedero es 2.0 pies y la napa se encuentra completamente aireada, calcule: *a*) los perfiles de la napa, y *b*) la carga hidrostática que actúa sobre el vertedero.

14-2. Durante pruebas sobre la aireación del vertedero descrito en el problema anterior se observaron presiones negativas bajo la napa iguales a 9.7 pies de agua. Calcule el incremento en la carga total sobre el vertedero. ¿Cuánto aire, medido en pies^3/s, se requerirá para airear la zona inferior de la napa **hasta** una reducción de presión de 2 pies? Calcule la carga sobre el vertedero después de esta **aireación**.

14-3. Si el piso del canal se encuentra en la cota 975.0 en lugar de la cota 880.0, y los otros datos permanecen iguales, determine la sección del vertedero requerida en el ejemplo 14-1. Se requiere un procedimiento de ensayo y error para la determinación del valor de *C*.

14-4. Si la cara de aguas arriba tiene una pendiente de 3:2 en lugar de una pendiente vertical, y los otros datos permanecen iguales, determine la sección del vertedero requerida en el ejemplo 14-1.

14-5. Determine la curva de calibración para el vertedero desarrollado en el ejemplo 14-1.

14-6. Un vertedero de rebose con perfil desconocido diseñado para una altura total de 14.5 pies tiene una longitud de cresta de 64 pies y un coeficiente de descarga igual a 3.48. Determine la curva de calibración mediante la curva de Bradley.

14-7. Si el vertedero del problema anterior tiene el perfil mostrado por la línea punteada de la figura (14-7), calcule la curva de calibración.

14-8. Calcule el perfil superior de la napa del flujo sobre el vertedero diseñado en el Ejemplo 14-1; suponga que no existen pilares.

14-9. Determine la altura de los muros para la sección de la presa de rebose diseñada en el ejemplo 14-1; suponga seis vanos formados por pilares de nariz redondeada WES y una altura de operación máxima 35% mayor que la altura de diseño.

14-10. Determine el caudal sobre la sección del vertedero diseñado en el ejemplo 14-1 si el vertedero tiene seis vanos formados por pilares de nariz redondeada WES.

14-11. Determine la presión sobre la cresta del vertedero diseñado en el ejemplo 14-1, para una altura de operación igual a 0.50, 1.00 y 1.33 veces la altura de diseño, respectivamente; suponga: *a*) que no existen pilares, y *b*) que existen seis vanos formados por pilares de nariz redondeada WES.

14-12. Una compuerta de tambor (figura 14-19) de 50 pies de longitud y 20 pies de radio se instala sobre la parte superior de un vertedero de rebose alto. Determine la curva de calibración de la compuerta, es decir, el caudal *versus* la elevación del punto más alto de la superficie de la compuerta. La posición del punto más alto sobre la superficie de la compuerta y el valor de θ pueden determinarse gráficamente.

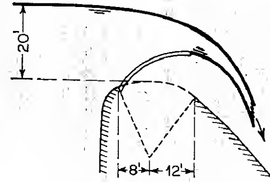


Figura 14-19. La compuerta de tambor para el problema 14-12.

14-13. Estime la velocidad y la profundidad de flujo y el radio de la cubeta a la salida del vertedero diseñado en el ejemplo 14-1.

14-14. Determine el caudal del vertedero diseñado en el problema 14-3 si la elevación de la superficie del agua hacia aguas abajo se encuentra en la cota 990. ¿Sería posible un resalto hidráulico a la salida del vertedero?

REFERENCIAS

1. "Studies of crests for overfall dams", *Boulder Canyon Project Final Reports*, Parte VI, *Hydraulic Investigations, Bulletin 3, U.S. Bureau of Reclamation*, 1948.
2. Julian Hinds, William P. Creager y Joel D. Justin, *Engineering for Dams*, Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1945, pp. 358-361.
3. William P. Creager y Joel D. Justin, *Hydroelectric Handbook*, 2ª ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 362-363.
4. A. T. Ippen, "Channel transitions and controls", capítulo VIII, en Hunter Rouse (editor), *Engineering Hydraulics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 496-588.
5. Fred W. Blaisdell, "Equation of the free-falling nappe", *Proceedings*, Vol. 80, separata Nº 482, *American Society of Civil Engineers*, agosto de 1954, pp. 16.
6. Horace William King , *Handbook of Hydraulics*, revisado por Ernest F. Brater, 4ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954, Sec. 4, pp. 1-67.
7. Carl E. Kindsvater y Rolland W. Carter, "Discharge characteristics of rectangular thin-plate weirs", artículo 1453, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY6, Parte 1, *American Society of Civil Engineers, Hydraulics Division*, diciembre de 1957, pp. 1-36.
8. P. K. Kandaswamy y Hunter Rouse, "Characteristics of flow over terminal weirs and sills", artículo 1345, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY4, *American Society of Civil Engineers, Hydraulics Division*, agosto de 1957, pp. 1-13.
9. J. V. Boussinesq, "Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale" ("Approximate theory of the flow over a knife-edge weir without side contraction"), Paris, 1907.
10. Th. Rehbock, "Discussion on 'Precise weir measurements', por Ernest W. Schoder y Kenneth B. Turner", *Transactions*, Vol. 93, *American Society of Civil Engineers*, 1929, pp. 1143-1162.
11. G. H. Hickox, "Aeration of spillways", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 537-556.
12. H. E. Bazin, "Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir" ("Recent experiments on the flow of water over weirs"), *Mémoires et documents, Annales des ponts et chaussées*, Ser. 6, Vol. 16, 2º semestre de 1888, pp. 393-448; Ser. 6, Vol. 19, 1er. semestre de 1890, pp. 9-82; Ser. 7, Vol. 2, 2º semestre de 1891, pp. 445-520; Ser. 7, Vol. 7, 1er. semestre de 1894, pp. 249-357; Ser. 7, Vol. 12, 2º semestre de 1896, pp. 645-731; y Ser. 7, Vol. 15, 2º trimestre de 1898, pp. 151-264. La primera parte traducida al inglés por Arthur Marichal y John C. Trautwine, Jr., *Proceedings, Engineers' Club of Philadelphia*, Vol. 7, Nº 5, 1890, pp. 259-310; Vol. 9, Nº 3, 1892, pp. 231-244; y Vol. 10, Nº 2, 1893, pp. 121-164. Los datos de Bazin fueron reimpresos casi totalmente por G. W. Rafter en "Report on special water-supply investigation", *Congressional Documents*, Nos 4146 y 4147, Washington, D.C., 1900, pp. 571-950; e "Hydrology of the State of New York", *New York State Museum, Bulletin 85*, Albany, N.Y., 1905.
13. William P. Creager, *Engineering for Masonry Dams*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1929, p. 106.
14. Calvin Victor Davis (editor en jefe), *Handbook of Applied Hydraulics*, 2ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952, pp. 259-263; Sec. 7, "Spillways and streambed protection works", por Emory W. Lane y Calvin V. Davis, pp. 253-289.
15. Ettore Scimemi, "Sulla forma delle vene tracimanti" ("The form of flow over weirs"), *L'Energia elettrica*, Vol. 7, Nº 4, Milano, abril de 1930, pp. 293-305.

16. J. Smetana, "Étude de la surface d'écoulement des grands barrages" ("Study of flow profile of large dams"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 14, Nº 46, Paris, julio de 1948, pp. 185-194; Vol. 15, Nº 49, enero de 1949, pp. 19-32.
17. Giulio De Marchi, "Ricerche sperimentali sulle dighe tracimanti" ("Experimental study on overflow dams"), *Annali dei lavori pubblici*, Vol. 7, Rome, 1928.
18. L. Escande, *Barrages (Dams)*, Hermann & Cie., Paris, 1937.
19. Anton Grzywienski, "Anti-vacuum profiles for spillways of large dams", *Transactions of the 4th. Congress on Large Dams*, Vol. 2, International Commission on Large Dams of the World Power Conference, New Delhi, India, enero de 1951, pp. 105-124.
20. "Corps of Engineers Hydraulic Design Criteria", preparado por Office of the Chief of Engineers, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., 1952; revisado en años subsiguientes.
21. John C. Harrold, "Discussion on 'Equation of the free-falling nappe', por Fred W. Blaisdell", *Proceedings*, Vol. 80, separata Nº 624, *American Society of Civil Engineers*, agosto de 1955, pp. 16-19.
22. J. N. Bradley, "Discharge coefficients for irregular overfall spillways", *Engineering Monograph Nº 9, U.S. Bureau of Reclamation*, marzo de 1952.
23. Bob Buehler, "Discussion on 'Rating curves for flow over drum gates', por Joseph N. Bradley", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 421-428.
24. Ross N. Brudenell, "Flow over rounded crests", *Engineering News-Record*, Vol. 115, Nº 3, julio 18 de 1935, p. 95.
25. M. K. Ganguli y S. K. Roy, "On the standardization of the relaxation treatment of systematic pressure computations for overflow spillway discharges", *Irrigation and Power, The Journal of the Central Board of Irrigation and Power*, Vol. 9, Nº 2, New Delhi, India, abril de 1952, pp. 187-209.
26. Charles W. Harris, "An analysis of the weir coefficient for suppressed weirs", *University of Washington, Engineering Experiment Station, Bulletin 22*, 1923.
27. Joseph N. Bradley, "Rating curves for flow over drum gates", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 403-420.
28. Robert B. Jansen, "Flow characteristics on the ogee spillway", artículo 1452, *Proceedings, Journal, American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, Vol. 83, Nº HY6, Parte 1, diciembre de 1957, pp. 1-11.
29. "Research study on stilling basins, energy dissipators, and associated appurtenances", *Hydraulic Report, U.S. Bureau of Reclamation*, Nº Hyd-399, junio 1 de 1955, pp. 41-43.
30. William J. Bauer, "Turbulent boundary layer on steep slopes", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 1212-1233.
31. J. H. Douma, "Discussion on 'Design of side walls in chutes and spillways', por D. B. Gumensky", *Transactions*, Vol. 119, *American Society of Civil Engineers*, 1954, pp. 364-368.
32. A. Coyne, "Latest development of dams and hydro-electric power stations in France", artículo leído antes de la reunión conjunta del Institution of Civil Engineers y la seccional británica de la Société des Ingénieurs Civils de France, London, noviembre 25 de 1947. Editorial reimpreso como "Development of dams in France", *Engineering*, Vol. 164, Nº 4274, diciembre 26 de 1947, pp. 613-614.
33. A. Coyne, "Barrages-usines de l'Aigle et de Saint-Étienne-Cantalès" ("Dams and hydroplants of Aigle and Saint-Étienne-Cantalès"), *Travaux*, Vol. 34, Nº 185, Paris, marzo de 1950, pp. 194-215.
34. R. Maitre y S. Obolensky, "Étude de quelques caractéristiques de l'écoulement dans la partie aval des évacuateurs de surface" ("Study of some flow characteristics in the downstream part of spillways"), *La Houille blanche*, año 9, Nº 4, Grenoble, julio-agosto de 1954, pp. 481-511.
35. F. Auroy, "Les évacuateurs de crues du barrage de Chastang" ("The spillways of Chastang Dam"), *Transactions of the 4th. Congress on Large Dams*, Vol. II, International Commission on Large Dams of the World Power Conference, New Delhi, enero de 1951, pp. 661-686.

36. E. A. Elevatorski, "Trajectory bucket-type energy dissipators", artículo 1553, *Proceedings, Journal*, Vol. 84, Nº PO1, *American Society of Civil Engineers, Power Division*, febrero de 1958, pp. 1-17.
37. J. N. Bradley, "Studies of flow characteristics, discharge and pressure relative to submerged dams", *Hydraulic Laboratory Report 182*, U.S. Bureau of Reclamation, 1945.
38. Informe del Board of Engineers acerca de "Deep Waterways", U.S. Board of Engineers, 1900, p. 291.
39. R. E. Horton, "Weir experiments, coefficients and formulas", *Water Supply and Irrigation, U.S. Geological Survey*, artículo 200, 1907.
40. Glen Nelson Cox, "The submerged weir as a measuring device", *University of Wisconsin, Engineering Experiment Station, Bulletin 67*, 1928, pp. 48-75.
41. H. J. Koloseus, "Discharge characteristics of submerged spillways", tesis de magister, Colorado Agricultural and Mechanical College, Fort Collins, diciembre de 1951.
42. M. Bar Shany, "Pressure distribution on downstream face of a submerged weir", tesis de magister, State University of Iowa, Iowa City, junio de 1950.
43. "Spillway and lock approach, Jim Woodruff Dam", río Apalachicola, Florida, investigación modelo, *U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Technical Memorandum 2-340*, mayo de 1952.
44. "Morgantown spillway, Special tests", informe no publicado, U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., 1949.

CAPÍTULO **15**

RESALTO* HIDRÁULICO Y SU USO COMO DISIPADOR DE ENERGÍA

15-1. El resalto hidráulico. En 1818[1], el italiano Bidone [1, 2] realizó las primeras investigaciones experimentales del resalto hidráulico. Esto llevó a Bélanger [3] en 1828 a diferenciar entre las pendientes suaves (subcríticas) y las empinadas (supercríticas), debido a que observó que en canales empinados a menudo se producían resaltos hidráulicos generados por barreras en el flujo uniforme original. De ahí en adelante muchos autores han realizado numerosos estudios y han citado sus resultados. Algunos contribuyentes destacados a nuestro conocimiento presente sobre este tema son Bresse (1860) [4], Darcy y Bazin (1865) [5], Ferriday y Merriman (1894) [6], Gibson (1913) [7], Kennison (1916) [8], Woodward y Riegel-Beebe (1917) [9], Koch y Carstanjen (1926) [10], Lindquist (1927) [11], Safranez (1927) [12], Einwachter (1933) [13, 14], Smetana (1934) [15, 16], Bakhmeteff y Matzke (1936) [17], Escande (1938) [18], Citrini (1939) [19], Nebbia (1940) [20], Kindsvater (1944) [21], Blaisdell (1948) [22], Forster y Skrinde (1950) [23], Rouse, Siao y Nagaratnam (1958) [24] y muchos otros[2].

En principio, la teoría del resalto desarrollada corresponde a canales horizontales o ligeramente inclinados en los que el peso del agua dentro del resalto tiene muy poco efecto sobre su comportamiento y, por consiguiente, no se considera en el análisis. Sin embargo, los resultados obtenidos de este modo pueden aplicarse a la mayor parte de los canales encontrados en problemas de ingeniería. Para canales

* Denominado también salto.

1 El experimento se realizó en París en 1818 y se reportó el año siguiente en [1]. El resalto hidráulico también se conoce como una *onda estacionaria*. En francés se conoce como *le ressaut hydraulique*. En alemán, como *der Wassersprung*. En honor de Bidone, en italiano el resalto hidráulico se conoce como *il salto di Bidone* (el resalto de Bidone).

2 Para una revisión completa de los estudios sobre resalto hidráulico, *véase* [25]. Para un tratamiento matemático del tema, *véase* [26].

con pendiente alta el efecto del peso del agua dentro del resalto puede ser tan significativo que debe incluirse en el análisis.

Las aplicaciones prácticas del resalto hidráulico son muchas; se utiliza para: 1) disipar la energía del agua que fluye sobre presas, vertederos y otras estructuras hidráulicas, y prevenir de esta manera la socavación aguas abajo de las estructuras (sección 15- 8); 2) recuperar altura o aumentar el nivel del agua en el lado de aguas abajo de una canaleta de medición y mantener un nivel alto del agua en el canal de irrigación o de cualquier estructura para distribución de aguas; 3) incrementar el peso sobre la zona de aguas abajo de una estructura de mampostería y reducir la presión hacia arriba bajo dicha estructura aumentando la profundidad del agua en su zona de aguas abajo; 4) aumentar el caudal por debajo de una compuerta deslizante manteniendo alejada la profundidad de aguas abajo, debido a que la altura efectiva se reducirá si la profundidad de aguas abajo ahoga el resalto[3]; 5) para indicar condiciones especiales de flujo, como la existencia de flujo supercrítico o la presencia de una sección de control, de tal manera que pueda localizarse una estación de aforo; 6) mezclar químicos utilizados para la purificación de agua y casos similares [28]; 7) airear el agua en sistemas de suministros urbanos; y 8) remover bolsas de aire en las líneas de suministro de agua y prevenir el taponamiento por aire [29].

15-2. Resalto en canales rectangulares horizontales[4]. Para flujo supercrítico en una canal rectangular horizontal, la energía del flujo se disipa a través de la resistencia friccional a lo largo del canal, dando como resultado un descenso en la velocidad y un incremento en la profundidad en la dirección del flujo. Un resalto hidráulico se formará en el canal si el número de Froude $\mathbf{F}_1$ del flujo, la profundidad de flujo y_1 y la profundidad y_2 aguas abajo satisfacen la ecuación

$$\frac{y_2}{y_1} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1\right) \tag{3-21}$$

Esta ecuación puede representarse mediante la curva mostrada en la figura 15-1. Esta curva se verificó a satisfacción con muchos datos experimentales y es muy útil para el análisis y el diseño de resaltos hidráulicos.

15-3. Tipos de resalto. Los resaltos hidráulicos en fondos horizontales se clasifican en varias clases. De acuerdo con los estudios del U. S. Bureau of Reclamation [34, 35] éstos pueden clasificarse convenientemente según el número de Froude $\mathbf{F}_1$ del flujo entrante (figura 15-2), como sigue:

Para $\mathbf{F}_1 = 1$, el flujo es crítico y por consiguiente no se forma resalto.

Para $\mathbf{F}_1 = 1$ a 1.7, la superficie del agua muestra ondulaciones y se presenta el *resalto ondulante*.

[3] Este principio lo aplicó Saugey [27] a un aparato interesante conocido como *incrementador de caída*. El aparato se utiliza para incrementar la altura efectiva en una planta de generación hidroeléctrica durante los períodos de creciente manteniendo alejado el nivel de agua del lado de aguas abajo de la salida del tubo de aspiración mediante un resalto hidráulico.

[4] Para resaltos hidráulicos en canales trapezoidales, *véanse* [30] y [31]. Para resaltos en conductos cerrados, *véanse* [29] y [32]. Para un tratamiento general en canales no rectangulares, *véase* [33].

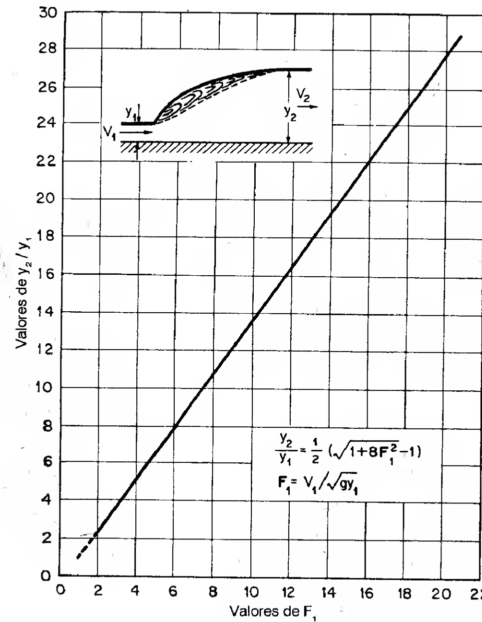


Figura 15-1. Relación entre $\mathbf{F}_1$ y y_2/y_1 para un resalto hidráulico en un canal rectangular horizontal.

Para $\mathbf{F}_1 = 1.7$ a 2.5, se desarrolla una serie de remolinos sobre la superficie del resalto, pero la superficie del agua hacia aguas abajo permanece uniforme. La velocidad a través de la sección es razonablemente uniforme y la pérdida de energía es baja. Se presenta entonces el *resalto débil*.

Para $\mathbf{F}_1 = 2.5$ a 4.5, existe un chorro oscilante que entra desde el fondo del resalto hasta la superficie y se devuelve sin ninguna periodicidad. Cada oscilación produce una onda grande con periodo irregular, muy común en canales, que puede viajar a lo largo de varias millas causando daños ilimitados a bancas en tierra y a enrocados de protección. Se produce entonces el *resalto oscilante*.

Para $\mathbf{F}_1 = 4.5$ a 9.0, la extremidad de aguas abajo del remolino superficial y el punto sobre el cual el chorro de alta velocidad tiende a dejar el flujo ocurren prácticamente en la misma sección vertical. La acción y la posición de este resalto son menos sensibles a la variación en la profundidad de aguas abajo. El resalto se encuentra bien balanceado y su comportamiento es el mejor. La disipación de energía varía de 45% a 70%. Se presenta entonces el *resalto estable*.

Para $\mathbf{F}_1 = 9.0$ y mayores, el chorro de alta velocidad choca con paquetes de agua intermitentes que corren hacia abajo a lo largo de la cara frontal del resalto, generando ondas hacia aguas abajo, y puede prevalecer una superficie rugosa. La

acción del resalto es brusca pero efectiva debido a que la disipación de energía puede alcanzar un 85%. Se produce entonces el *resalto fuerte*.

Nótese que los rangos del número de Froude dados arriba para los diferentes tipos de resalto no están claramente demarcados sino que se traslapan en cierto modo según las condiciones locales.

15-4. Características básicas del resalto. A continuación se estudian varias características básicas del resalto hidráulico en canales rectangulares horizontales:

Pérdida de energía. En el resalto la pérdida de energía es igual a la diferencia de las energías específicas antes y después del resalto. Puede demostrarse que la pérdida es

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \qquad (3\text{-}24)$$

La relación $\Delta E/E_1$ se conoce como *pérdida relativa.*

Eficiencia. La relación entre la energía específica antes y después del resalto se define como la *eficiencia del resalto.* Puede demostrarse que la eficiencia es

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(8\mathbf{F}_1^2 + 1)^{3/2} - 4\mathbf{F}_1^2 + 1}{8\mathbf{F}_1^2(2 + \mathbf{F}_1^2)} \qquad (15\text{-}1)$$

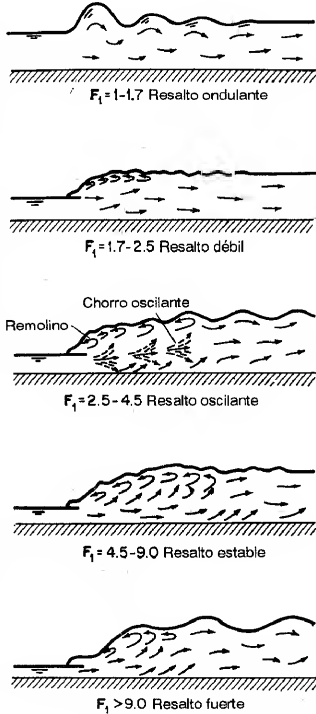
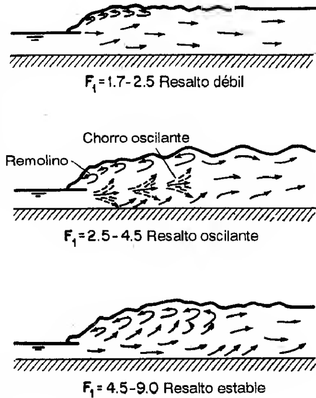



Figura 15-2. Diferentes tipos de resaltos hidráulicos.

Esta ecuación indica que la eficiencia de un resalto es una función adimensional, que depende sólo del número de Froude del flujo de aproximación. La pérdida relativa es igual a $1 - E_2/E_1$; ésta también es una función adimensional de $\mathbf{F}_1$.

Altura del resalto. La diferencia entre las profundidades antes y después del resalto es la *altura del resalto*, o $h_j = y_2 - y_1$. Al expresar cada término como la relación con respecto a la energía específica inicial,

$$\frac{h_j}{E_1} = \frac{y_2}{E_1} - \frac{y_1}{E_1}$$

donde h_j/E_1 es la *altura relativa*, y_1/E_1 es la *profundidad inicial relativa*, y y_2/E_1 es la *profundidad secuente relativa*. Puede demostrarse que todas estas relaciones son funciones adimensionales de $\mathbf{F}_1$. Por ejemplo,

$$\frac{h_j}{E_1} = \frac{\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 3}{\mathbf{F}_1^2 + 2} \qquad (15\text{-}2)$$

Como la pérdida relativa, la eficiencia, la altura relativa y las profundidades inicial relativa y secuente relativa de un resalto hidráulico en un canal rectangular horizontal son funciones de $\mathbf{F}_1$, pueden graficarse contra $\mathbf{F}_1$, dando como resultado un conjunto de curvas características (figura 15-3). Con referencia a estas curvas, nótense los siguientes aspectos:

Figura 15-3. Curvas características de resaltos hidráulicos en canales rectangulares horizontales.

1. La máxima altura relativa h_j/E_1 es 0.507, la cual ocurre cuando $\mathbf{F}_1 = 2.77$.
2. La máxima profundidad relativa y_2/E_1 es 0.8, la cual ocurre en $y_1/E_1 = 0.4$ y $\mathbf{F}_1 = 1.73$. Los experimentos han demostrado que la transición desde un resalto ondulante a uno directo ocurre aproximadamente en el punto $\mathbf{F}_1 = 1.73$.
3. Cuando $\mathbf{F}_1 = 1$, el flujo es crítico y $y_1 = y_2 = 2/3\, E_1$.
4. Cuando $\mathbf{F}_1$ aumenta, los cambios en todas las relaciones características se vuelven graduales.

Las curvas características darán al diseñador una idea general del rango de condiciones en las cuales la estrucutura debe operarse. Por ejemplo, en el diseño de una compuerta deslizante que involucre un resalto por debajo de la compuerta, estas curvas mostrarán con claridad la formación del resalto para diferentes aberturas de la compuerta bajo una altura determinada. El análisis anterior se aplica a canales horizontales rectangulares y no rectangulares.

Bakhmeteff y Matzke [17] verificaron experimentalmente las curvas teóricas para y_2/E_1 y h_j/E_1 y encontraron que estas curvas dan valores de y_2/E_1 y h_j/E_1 alrededor de un 3% al 4% mayores que los valores experimentales[5]. Las curvas características también fueron verificadas por el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35] con datos obtenidos en seis canaletas de prueba. Se encontró concordancia perfecta entre la

[5] Es posible que al menos parte de esta discrepancia se deba al efecto de escala del modelo de prueba (*véase* la sección siguiente).

curva y_1/E_1 y los datos. La correspondencia entre las curvas E_2/E_1 o $\Delta E/E_1$ y los datos fue razonablemente buena excepto para $\mathbf{F}_1 < 2$. La curva experimental para $\Delta E/E_1$ recomendada por el Bureau se muestra mediante la línea punteada (figura 15-3). La correspondencia entre las curvas y_2/E_1 y h_j/E_1 y los datos fue buena para valores altos de $\mathbf{F}_1$, pero los datos dispersos no lograron definir con exactitud las curvas para $\mathbf{F}_1 < 3$.

15-5. Longitud del resalto. Ésta puede definirse como la distancia medida desde la cara frontal del resalto hasta un punto en la superficie inmediatamente aguas abajo del remolino. En teoría, esta longitud no puede determinarse con facilidad, pero ha sido investigada experimentalmente por muchos ingenieros hidráulicos[6].

Los datos experimentales sobre la longitud del resalto pueden graficarse mediante el número de Froude $\mathbf{F}_1$ contra una relación adimensional $L/(y_2 - y_1)$, L/y_1 o L/y_2. La gráfica de $\mathbf{F}_1$ *versus* L/y_1 es tal vez la mejor, debido a que la curva resultante es la que mejor definen los datos. Sin embargo, para propósitos prácticos, la gráfica de $\mathbf{F}_1$ *versus* L/y_2 es conveniente, debido a que la curva resultante muestra la regularidad de una parte plana para el rango de los resaltos bien establecidos. Una curva de $\mathbf{F}_1$ *versus* L/y_2 (figura 15-4) basada en los datos experimentales de seis canaletas de prueba la preparó el Bureau of Reclamation. Al comparar esta curva con la muy conocida de Bakhmeteff-Matzke [17], se encontró una discrepancia muy importante. La investigación sobre este tema ha llevado a la creencia de que esta discrepancia se debe al efecto de escala involucrado en los datos experimentales de

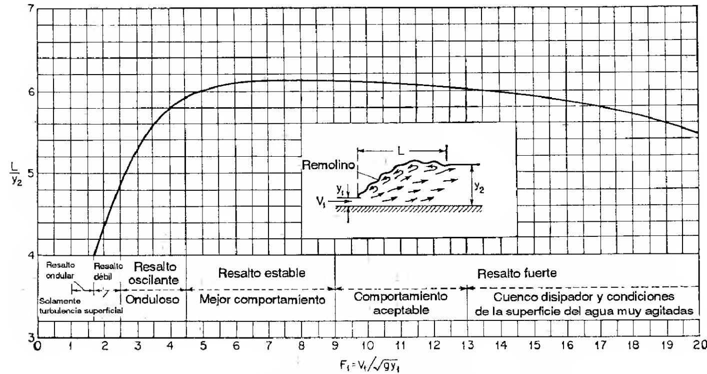


Figura 15-4. Longitud en términos de la profundidad secuente y_2 de resaltos en canales horizontales (*con base en los datos y recomendaciones del U. S. Bureau of Reclamation* [34]).

[6] Entre ellos Safranez en el Technical University of Berlin [36, 37], Wóycicki en el Federal Institute of Technology, en Zürich, Suiza [38], Aravin en Rusia [39], Bakhmeteff y Matzke en Columbia University [17], Moore en California Institute of Technology [40] e ingenieros en el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35].

Bakhmeteff y Matzke. Este efecto de escala significa que la acción del prototipo no se reprodujo con fidelidad en el modelo. La curva mostrada en la figura 15-4 se desarrolló ante todo para resaltos en canales rectangulares. En ausencia de datos adecuados, esta curva puede aplicarse aproximadamente a resaltos formados en canales trapezoidales.

15-6. El perfil superficial. El conocimiento del perfil superficial de un resalto es necesario en el diseño del borde libre para los muros laterales del cuenco disipador donde ocurre el resalto. También es importante para determinar la presión que debe utilizarse en el diseño estructural, debido a que experimentos han demostrado que la presión vertical en el piso horizontal bajo un resalto hidráulico es prácticamente la misma que indicaría el perfil de la superficie del agua.

Con base en sus datos experimentales, Bakhmeteff y Matzke [17], encontraron que el perfil superficial de un resalto hidráulico puede representarse mediante curvas adimensionales para varios valores de $\mathbf{F}_1$, como se muestra en la figura 15-5. Moore [40] desarrolló curvas similares para resaltos por debajo de una caída libre. Los perfiles mostrados por Moore al principio aumentan con mayor rapidez que los perfiles de Bakhmeteff y Matzke. Se cree que esto se debe a la distribución no hidrostática de presiones en el resalto, que las mediciones piezométricas en los datos de Bakhmeteff y Matzke no registraron de manera adecuada. Además, la longitud del resalto dada por Moore fue alrededor de un 20% mayor que la mostrada por las curvas de Bakhmeteff-Matzke. Debido a que el resalto en este último caso se formó aguas abajo de una compuerta deslizante, la falta de acuerdo puede deberse a una diferencia en el perfil de velocidad del flujo ultrarrápido que entra al resalto.

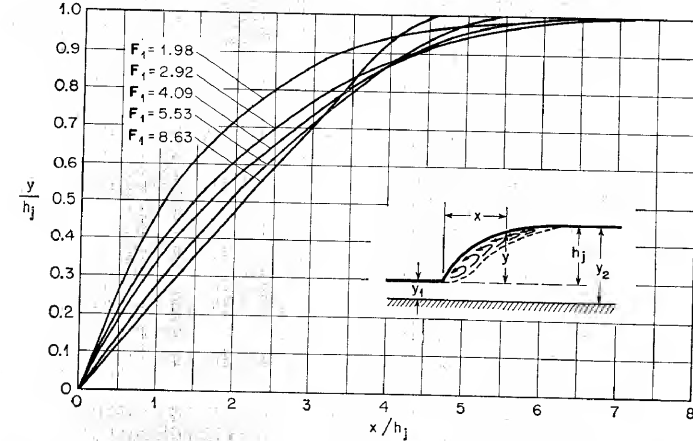


Figura 15-5. Perfiles superficiales adimensionales de resaltos hidráulicos en canales horizontales (*con base en los datos de Bakhmeteff-Matzke* [17]).

15-7. Localización del resalto. El resalto hidráulico ocurre en un flujo supercrítico cuando su profundidad cambia abruptamente a su profundidad secuente. En teoría, el resalto ocurrirá en un canal horizontal rectangular si las profundidades inicial y secuente y el número de Froude de aproximación satisfacen la ecuación (3-21). Esta condición teórica por lo general se utiliza para localizar la posición de un resalto. Para un cálculo más exacto de la posición del resalto, sin embargo, debe considerarse la longitud del mismo. A continuación se ilustrará la localización de un resalto hidráulico en tres casos comunes (figura 15-6):

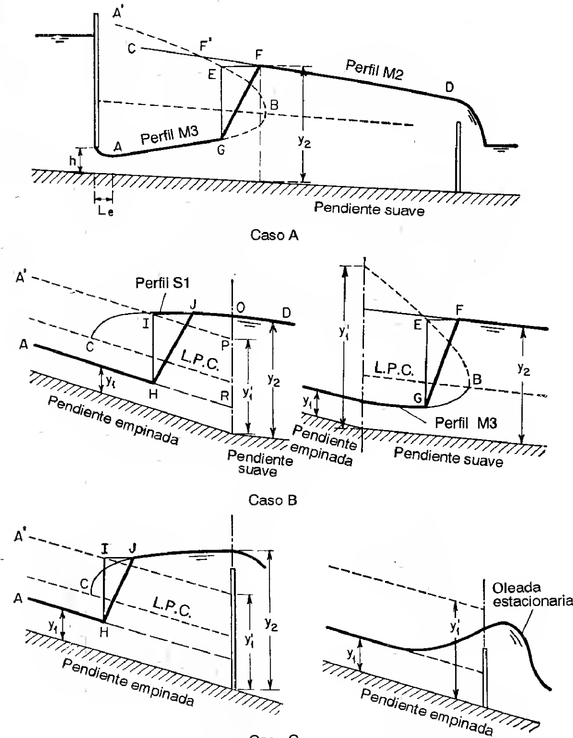


Figura 15-6. Localización de un resalto hidráulico.

El *caso A* muestra el resalto por debajo de una compuerta deslizante en un canal de pendiente suave. Los perfiles *AB* y *CD* pueden identificarse con facilidad como del tipo *M*3 y *M*2, respectivamente. Los métodos de cálculo de estos perfiles se estudiaron en el capítulo 10. La curva *A'B* es una gráfica de la profundidad

secuente con respecto a *AB*. Mediante la posición de *F'*, puede estimarse la longitud del resalto. Mediante ensayo y error puede encontrarse una intersección horizontal entre las curvas *A'B* y *CD* igual a la longitud del resalto. Por ejemplo, la distancia horizontal *EF* es igual a dicha longitud, correspondiente a la profundidad y_2 en *F*. Es claro que el resalto se formará entre *G* y *F*, debido a que la profundidad en *F* es secuente a la profundidad en *G* y a que la distancia *EF* mide la longitud del resalto. Nótese que si la longitud del resalto no se hubiera considerado en el análisis, se consideraría que el resalto se forma en el punto *F'* aguas arriba, dando como resultado un error representado por *F'F*. En el caso *A*, puede verse que al incrementar la profundidad del agua hacia aguas abajo o al subir la curva *CD*, el resalto puede moverse hacia aguas arriba. La profundidad de aguas abajo puede subirse hasta una altura para la cual el resalto eventualmente se ahogue al frente de la compuerta deslizante. Al bajar la profundidad de aguas abajo o al disminuir *CD* el resalto se moverá hacia aguas abajo.

El análisis anterior se aplica también a la localización de un resalto formado a la salida de un vertedero de cresta delgada o de uno de rebose.

Cuando existe un resalto hidráulico por debajo de una compuerta deslizante, el flujo que sale de la compuerta formará un chorro que posee una vena contracta. La distancia L_e desde la vena contracta hasta la apertura de la compuerta deslizante a menudo es corta. Con respecto a esta distancia, existe una regla general adoptada, la cual establece que la vena contracta se localiza aproximadamente a una distancia *h* desde la apertura de la compuerta deslizante[7].

El *caso B* muestra el resalto en un canal que tiene un quiebre en su pendiente de fondo que cambia de empinada a suave. Por simplicidad, se supone que el flujo es uniforme a lo largo del canal con excepción del tramo entre el resalto y el quiebre. El resalto puede ocurrir en el canal empinado o en el suave, según si la profundidad aguas abajo y_2 es menor o mayor que la profundidad y_1' secuente a la profundidad de aguas arriba y_1. Si la profundidad y_2 es mayor que y_1', el resalto ocurrirá en la región empinada. Luego la superficie curva *OC* es del tipo *S*1. La línea *A'P* indica la profundidad secuente a la línea *AR*. Ahora, determine una intersección horizontal *IJ* entre *A'P* y *CO*, el cual es igual a la longitud del resalto. Es claro que un resalto *HJ* empezará en la sección que contiene a *I*. Si la profundidad y_2 se baja aproximadamente a algo menor que y_1', el resalto empezará a moverse dentro del canal suave. En este caso el resalto se localiza como se describió en el caso *A*.

El *caso C* muestra el resalto por detrás de una barrera de rebose. En teoría, se formará un resalto si la profundidad en la barrera es mayor que la profundidad secuente y_1' correspondiente a la profundidad supercrítica de aproximación y_1. La localización del resalto es igual a la del caso *B* si éste ocurre en la región empinada. Al aumentar la altura de la barrera el resalto se moverá hacia aguas arriba. Al disminuirla se moverá hacia aguas abajo. Cuando la profundidad de la barrera es menor que la secuente y_1', la barrera será sobrepasada por una *oleada estacionaria*

[7] Esta regla la utilizó por primera vez Agroskin [41]. Se basa en la suposición de que el flujo en una compuerta deslizante corresponde a la mitad de flujo de un orificio circular, y que la *vena contracta* en el flujo desde un orificio circular se localiza aproximadamente a una distancia igual a la mitad del diámetro del orificio medida desde el orificio. Esta regla la originó Weisbach [42].

en la forma de un ascenso superficial ondular solitario, a la que no seguirán ondulaciones adicionales.

Ejemplo 15-1. Localice el resalto hidráulico del ejemplo 10-3 si el flujo aguas abajo del resalto es uniforme.

Solución. A partir de los datos dados, la curva de energía específica $E = y + \alpha V^2/2g$ y la fuerza específica $F = \beta Q^2/gA + \bar{z}A$ del canal pueden construirse como se muestra en la figura 15-7. En el cálculo de la curva de fuerza específica, los valores de β pueden estimarse como 1.04 para $\alpha = 1.10$ [utilizando las ecuaciones (2-6) y (2-7)].

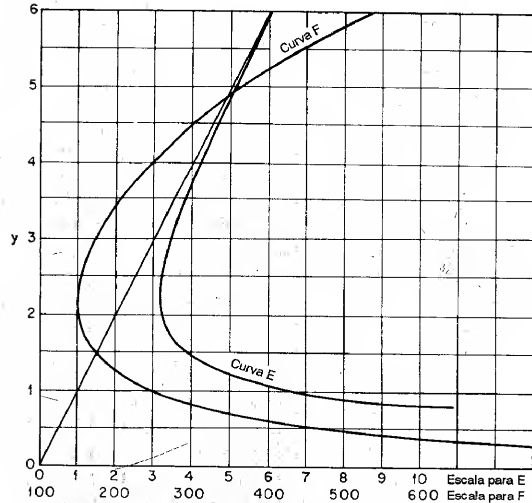


Figura 15-7. Las curvas E y F para la determinación de la localización del resalto.

Por debajo de la compuerta deslizante el perfil $M3$ se calculó en el ejemplo 10-3, como se muestra mediante la línea AGB en la figura 15-8. Mediante las curvas de la figura 15-7 y el método descrito en la sección 3-7 puede determinarse la curva de profundidad secuente $A'F'B$ correspondiente a la curva de profundidad inicial AGB[8]. La curva $A'F'B$ y el perfil de flujo aguas abajo CFD (igual a la línea de profundidad normal en este ejemplo) se intersecan en F'. Luego, utilizando el perfil $M3$, se encuentra la profundidad inicial de flujo en F' la cual es 1.70 pies. El número de Froude correspondiente es $\mathbf{F} = 1.52$ y, a partir de la figura 15-4, $L/y^2 = 3.6$. Por consiguiente la longitud del resalto es igual a $L = 3.6 \times 2.67 = 9.6$ pies. En este punto se involucra una aproximación, debido a que la longitud del resalto debe basarse en $\mathbf{F}$ en E (en lugar de F'), la cual, sin embargo, todavía se desconoce.

[8] Debido a la diferencia entre α y β, las profundidades críticas calculadas indicadas por las curvas de fuerza específica y energía específica no son idénticas. Sin embargo, la discrepancia es tan pequeña que puede ignorarse.

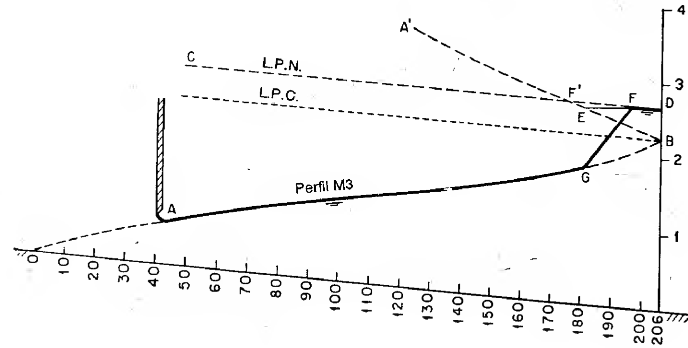


Figura 15-8. Localización de un resalto hidráulico.

En este ejemplo y_2 es igual a la profundidad normal de flujo en el canal debido a que el flujo aguas abajo es uniforme. Si el flujo aguas abajo no es uniforme sino gradualmente variado, entonces la profundidad en la intersección F' del perfil de aguas abajo con la curva $A'F'B$ debe tomarse como y_2. Esto también es una aproximación debido a que la profundidad real y_2 debe localizarse en F, cuya posición todavía se desconoce.

Una vez determinada la longitud del resalto, se encuentra una intersección horizontal EF igual a 9.6 pies entre la curva $A'F'B$ y $CF'D$. Por consiguiente, el resalto ocurrirá entre G y F. Como se muestra en la figura 15-8, el resalto parece empezar a una distancia de alrededor de 140 pies desde la *vena contracta.* Como la localización del resalto está determinada, las aproximaciones mencionadas antes pueden verificarse y, si se desea, se repite el proceso para hacer una determinación más exacta. Sin embargo, tal verificación parece innecesaria si se consideran las aproximaciones involucradas en la teoría y otros aspectos del problema.

15-8. El resalto como disipador de energía. Desde un punto de vista práctico, el resalto hidráulico es un medio útil para disipar el exceso de energía en un flujo supercrítico. Su mérito está en prevenir la posible erosión aguas abajo de vertederos de rebose, rápidas y compuertas deslizantes, debido a que reduce rápidamente la velocidad del flujo sobre un piso protegido hasta un punto donde el flujo pierde su capacidad de socavar el lecho del canal natural aguas abajo.

El resalto hidráulico utilizado para la disipación de energía a menudo se confina parcial o totalmente en un tramo del canal que se conoce como *cuenco de disipación* o cuenco de aquietamiento, cuyo fondo se recubre para resistir la socavación. En la práctica, el cuenco disipador rara vez se diseña para confinar toda la longitud de un resalto hidráulico libre sobre la zona revestida, debido a que sería muy costoso. En consecuencia, a menudo se instalan accesorios para controlar el resalto dentro del cuenco. El principal propósito de este control es acortar el rango dentro del cual el resalto ocurrirá y por consiguiente reducir el tamaño y el costo del cuenco disipador. El control tiene ventajas adicionales, debido a que mejora la función de disipación del cuenco, estabiliza la acción del resalto y, en algunos casos,

incrementa el factor de seguridad. En el diseño de un cuenco disipador con un resalto hidráulico como disipador de energía, deben considerarse los siguientes aspectos prácticos[9].

A. Posición del resalto. Existen tres modelos alternativos (figura 15-9) que permiten que un resalto se forme aguas abajo de una fuente (tal fuente puede ser un vertedero de rebose, una rápida o una compuerta deslizante):

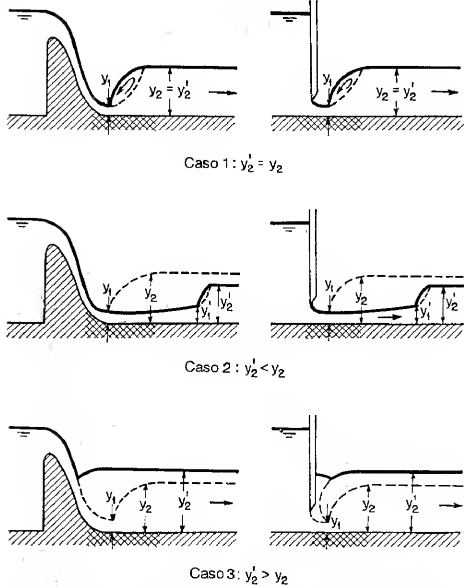


Figura 15-9. Efecto de la profundidad de salida en la formación de un resalto hidráulico aguas abajo de un vertedero o por debajo de una compuerta deslizante.

El caso 1 representa el modelo para el cual la profundidad de aguas abajo y_2' es igual a la profundidad y_2 secuente a y_1. En este caso los valores de $\mathbf{F}_1$, y_1 y $y_2'(=y_2)$ satisfarán la ecuación (3-21) y el resalto ocurrirá sobre un piso sólido inmediatamente adelante de la profundidad y_1. Para propósitos de protección contra la socavación, éste es un caso ideal. Una objeción importante a este modelo, sin embargo, es que una pequeña diferencia entre los valores reales y supuestos de los coeficientes hidráulicos relevantes puede causar que el resalto se mueva hacia aguas abajo desde su posición estimada. En consecuencia, siempre es necesario algún dispositivo para controlar su posición.

[9] Por simplicidad, la longitud del resalto no se considerará en el estudio. *Véanse* [25], [34], [35], [43], y "Hydraulic Energy Dissipators" por E. A. Elevatorski, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1959, para información adicional sobre el diseño de cuencos disipadores.

El caso 2 representa el patrón para el cual la profundidad de salida y_2' es menor que y_2. Esto significa que la profundidad de salida del caso 1 se disminuye. Como resultado, el resalto se desplazará hacia aguas abajo hasta un punto donde se satisfaga nuevamente la ecuación (3-21). En lo posible, este caso debe evitarse en el diseño, debido a que el resalto rechazado fuera de la zona resistente a la socavación ocurrirá en un lecho de cantos rodados sueltos o, peor aun, en un canal completamente desprotegido, dando como resultado una erosión severa. La solución para el diseño es utilizar cierto control en el fondo del canal, el cual incrementará la profundidad de agua a la salida y asegurará un resalto dentro de la zona protegida.

El caso 3 representa un modelo en el cual la profundidad de salida y_2' es mayor que y_2. Esto significa que la profundidad de salida con respecto al caso 1 se incrementa. Como resultado, el resalto se verá forzado hacia aguas arriba, y finalmente puede ahogarse en la fuente y convertirse en un resalto sumergido. Éste tal vez es el caso más seguro para el diseño, debido a que la posición del resalto sumergido puede fijarse con rapidez. Infortunadamente el diseño no es eficiente, debido a que se disipará muy poca energía.

B. Condiciones a la salida. En la descripción anterior se supone que la profundidad de salida tiene una cierta posición fija, para la cual su profundidad y_2' es igual a la profundidad secuente y_2 o diferente de ella. Sin embargo, en la mayor parte de los problemas prácticos, la profundidad de agua a la salida fluctúa, debido a cambios en el caudal de flujo en el canal. En tales casos, a menudo se dispone de una curva de calibración de la profundidad de salida que muestra la relación entre el nivel de salida y_2' y el caudal Q. De la misma manera, puede construirse una curva de calibración del resalto para mostrar la relación entre la profundidad secuente y_2 y el caudal Q. Debido a la diferencia en la posición relativa de las dos curvas de calibración, Leliavsky [43] sugirió que el diseño puede considerarse según cinco diferentes clases de condiciones (mostradas respectivamente por los cinco casos de la figura 15-10).

La clase 1 representa una condición ideal para la cual las dos curvas de calibración siempre coinciden. Esto significa que existe el caso 1 de la figura 15-9 y que siempre se formará un resalto en el lugar deseado sobre una zona protegida para todos los caudales. Condiciones de esta clase rara vez se encuentran en la naturaleza.

La clase 2 representa las condiciones para las cuales la curva de calibración del resalto siempre se encuentra en un nivel mayor que la curva de calibración de profundidad de salida. Esto significa que siempre existe caso 2 en la figura 15-9 (es decir, la profundidad de salida es menor que la secuente) y que el resalto se formará en un lugar alejado hacia aguas abajo. Un método efectivo para asegurar que el resalto ocurra en la zona protegida es utilizar bloques para crear un cuenco disipador (sección 15-9).

La clase 3 representa las condiciones para las cuales la curva de calibración del resalto se encuentra siempre a un nivel menor que la de calibración de profundidad de salida. Esto significa que siempre ocurre el caso 3 de la figura 15-9 (es decir

la profundidad de salida es mayor que la secuente) y que el resalto se moverá hacia aguas arriba y tal vez se ahogará en la fuente. En consecuencia, se disipará muy poca energía. Un método efectivo para asegurar un resalto es construir una zona de aproximación por encima del nivel del lecho del canal (sección 15-16). La pendiente de la aproximación puede ser tal que las condiciones apropiadas para un resalto se desarrollen allí para todos los caudales. Otro método es proveer una caída en el fondo del canal para bajar la profundidad de salida (sección 15-10).

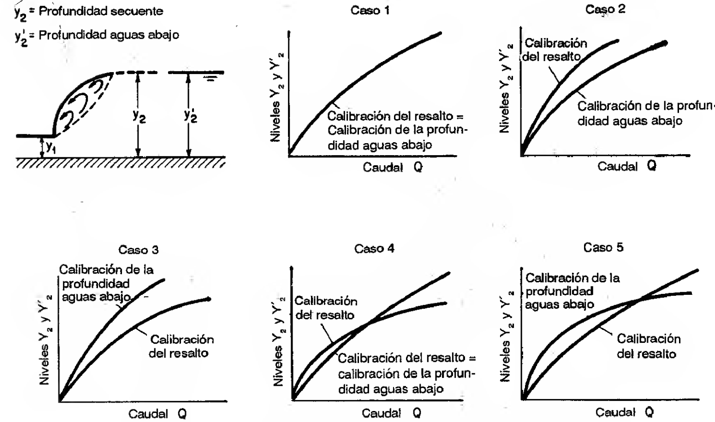


Figura 15-10. Clasificación de las condiciones de profundidad de salida para el diseño de obras de protección contra la socavación.

La clase 4 representa las condiciones para las cuales la curva de calibración del resalto se encuentra a un nivel mayor que la de calibración de profundidad de salida para caudales bajos pero a un nivel menor para caudales altos. Un método efectivo para asegurar un resalto es proveer un cuenco disipador para formarlo a bajos caudales y combinar el cuenco con una aproximación inclinada para desarrollarlo a satisfacción para todos los caudales.

La clase 5 representa las condiciones para las cuales la curva de calibración del resalto se encuentra a un nivel más bajo que la de calibración de profundidad de salida para caudales bajos pero a un nivel más alto para caudales altos. Un método efectivo para asegurar el resalto es incrementar la profundidad de aguas abajo lo suficientemente mediante la construcción de una piscina de aquietamiento formándolo así para caudales altos.

C. Tipos de resalto. Al considerar los diferentes tipos de resalto hidráulico descritos en la sección 15-3, el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35] da las siguientes recomendaciones prácticas:

1. Todos los tipos de resalto se encuentran en el diseño de cuencos disipadores.

2. El resalto débil no requiere bloques o consideraciones especiales. Lo único que se necesita es dar la longitud apropiada al cuenco, la cual es relativamente corta. Ésta puede determinarse mediante la figura 15-4.

3. El resalto oscilante, encontrado a menudo en el diseño de estructuras de canales, presas de derivación y aun obras de descarga es difícil de manejar. En lo posible, deben evitarse los resaltos con número de Froude dentro del rango 2.5 a 4.5. En muchos casos no puede evitarse el uso de este resalto pero, en otros casos, alterando las dimensiones puede llevarse al rango deseable. Los bloques deflectores o accesorios tienen muy poco valor. Las ondas son la principal fuente de dificultad; por consiguiente pueden utilizarse supresores de onda diseñados para manejarlas.

4. No se encuentra una dificultad particular para el resalto estacionario. Arreglos de deflectores y de bloques, los cuales se estudiarán más adelante, son muy útiles como medios para acortar la longitud del cuenco disipador.

5. A medida que el número de Froude aumenta, el resalto se vuelve más sensible a la profundidad de salida. Para números de Froude tan bajos como 8, se recomienda una profundidad de salida mayor que la secuente para asegurar que el resalto permanecerá en la zona protegida.

6. Cuando el número de Froude es mayor que 10, un cuenco disipador de resalto puede no ser lo más económico. En este caso, la diferencia entre las profundidades inicial y secuente es alta y, por lo general, se requiere un cuenco muy profundo con muros de retención muy altos. El costo del cuenco disipador no compensa los resultados obtenidos. Un disipador del tipo cubeta deflectora[10] dará resultados similares a menor costo.

15-9. Control del resalto mediante obstáculos. El resalto hidráulico puede controlarse o afectarse por medio de obstáculos de diferentes diseños, como vertederos de cresta delgada, de cresta ancha y subidas y descensos abruptos en el fondo del canal. La función del obstáculo es asegurar la formación del resalto y controlar su posición en todas las condiciones probables de operación.

Experimentos interesantes [46] han demostrado que las fuerzas que actúan sobre el obstáculo en un resalto disminuyen rápidamente hasta un mínimo a medida que el extremo de aguas abajo del resalto se mueve hacia aguas arriba hasta una posición encima del obstáculo. De ahí en adelante la fuerza se incrementa con lentitud hasta un valor constante a medida que el resalto se aleja más hacia aguas arriba. Este cambio en la fuerza sobre el obstáculo tal vez se debe a un cambio en la distribución de velocidades desde un extremo del resalto hasta el otro, ya que la distribución no uniforme de velocidades es una característica de un flujo rápidamente variado como éste. Como resultado, el *momentum* en la sección de distribución no uniforme se incrementa de manera sustancial. En teoría, el control del resalto hidráulico mediante obstáculos puede analizarse utilizando la teoría del

[10] Ésta es una cubeta que apunta hacia arriba, colocada en la pata de un vertedero para deflectar el flujo hacia arriba de la profundidad de salida. Si ésta es lo suficientemente alta para sumergir la cubeta, se formará un remolino aguas abajo de la cubeta, el cual tenderá a mover materiales del lecho hacia la presa, previniendo de esta manera socavación seria en su pata. Por otra parte, si la profundidad de salida es baja, el flujo se lanzará hacia arriba y hacia afuera de tal manera que golpeará un canal de roca sólida, si existe, a una distancia segura aguas abajo de la presa. *Véanse* [44], [45] y secciones 14-10 y 14-11.

momentum. Debido a la falta de conocimiento preciso sobre la distribución de velocidades, el análisis teórico no puede predecir el resultado cuantitativo con exactitud. La información útil para propósitos de diseño se basa en estudios experimentales.

El análisis dimensional muestra que la relación entre el número de Froude $\mathbf{F}_1$ o $\mathbf{F}$ del flujo de aproximación, la altura h del obstáculo, la profundidad de aproximación y_1, la profundidad y_2 aguas arriba del obstáculo, la distancia X desde el pie del resalto hasta el obstáculo, y la profundidad de aguas abajo y_3 puede expresarse como

$$\frac{h}{y_1} = \phi\left(\mathbf{F}, \frac{X}{y_2}, \frac{y_3}{y_1}\right) \qquad (15\text{-}3)$$

Esta función puede determinarse cuantitativamente mediante estudios sobre modelos. La posición exacta del resalto, controlada por el obstáculo, no puede determinarse de manera analítica. En el estudio sobre modelos, esta posición puede representarse por la relación entre X y y_2, constante en cada prueba, con una magnitud suficiente para asegurar un resalto completo. En el diseño, la longitud de un cuenco disipador debe ser por lo menos igual a X. Sin embargo, por razones económicas, la longitud del cuenco puede diseñarse para valores menores que X, siempre y cuando las altas velocidades en el fondo al final del cuenco alcancen un valor seguro para las condiciones del canal aguas abajo.

A. Control mediante un vertedero de cresta delgada. Con base en datos experimentales y análisis teóricos, Forster y Skrinde [23] desarrollaron un diagrama (figura 15-11) que muestra las relaciones entre: 1) el número de Froude $\mathbf{F}$ del flujo de aproximación, 2) la razón entre la altura del vertedero h y la profundidad de aproximación y_1, y 3) la razón entre la distancia X desde el pie del resalto hasta el vertedero y la profundidad y_2 aguas arriba de éste. Este diagrama permite un análisis del efecto de un vertedero determinado para condiciones conocidas de aproximación y de profundidad de salida, siempre y cuando la profundidad de salida normal y_3 no afecte el caudal por encima de la cresta del vertedero[11]; es decir, siempre que $y_3 < y_2 - 0.75h$. Por lo general prevalecen condiciones no sumergidas durante un amplio rango de caudales. Luego y_3/y_1 de la ecuación (15-3) puede eliminarse. Si ocurre sumergencia, el resalto se mueve hacia aguas arriba con un posible ahogamiento.

En el diagrama, cualquier punto se representa por un par de coordenadas ($\mathbf{F}$, h/y_1). Si el punto se localiza dentro de las curvas, ocurrirá el resalto hidráulico, con su posición relativa indicada por el valor interpolado correspondiente de X/y_2. Los puntos por encima y a la izquierda de una curva interpolada representan las condiciones en las que el vertedero es muy alto, de tal modo que el resalto se moverá hacia aguas arriba y tal vez se ahogará en la fuente. Los puntos a la derecha de la curva representan las condiciones en las que el vertedero es muy bajo, de tal manera que el resalto se moverá hacia aguas abajo y posiblemente desaparecerá. Si el

[11] Esta condición la observó por primera vez Bazin (*Véase* [12] del capítulo 14) y posteriormente Bakhmeteff [27] la demostró teóricamente.

vertedero es tan bajo como éste, puede sobrepasarse sólo mediante un aumento superficial en forma de onda solitaria, originando una oleada estacionaria (figura 15-6).

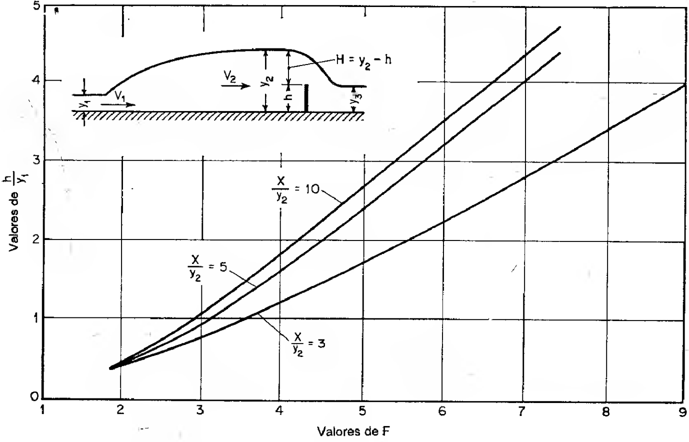


Figura 15-11. Relaciones experimentales entre $\mathbf{F}$, h/y_1 y X/y_2 para un vertedero de cresta delgada (*según Forster y Skrinde* [23]).

Para propósitos de diseño, se propone utilizar la curva $X/y_2 = 5$ del diagrama. La experiencia en laboratorio ha demostrado que el vertedero más alto requerido no necesariamente ocurre en las condiciones de caudal máximo [20]. En consecuencia, tal vertedero debe tener el mayor valor requerido de h dentro del rango de caudal esperado, como se determina mediante el diagrama.

B. Control mediante un vertedero de cresta ancha. Si la profundidad de aguas abajo es menor que la profundidad crítica sobre el vertedero, es decir, si $y_3 < (2y_2 + h)/3$, el nivel de salida no afectará de manera significativa la relación entre la elevación de la profundidad aguas arriba y el caudal. Luego el caudal por unidad de ancho del vertedero puede escribirse como[12]

$$q = 0.433\sqrt{2g}\left(\frac{y_2}{y_2 + h}\right)^{1/2} H^{3/2} \qquad (15\text{-}4)$$

Como $q = V_1y_1$, $H = y_2 - h$ y $\mathbf{F} = V_1\sqrt{g\,y_1}$, la ecuación anterior puede reducirse a

$$2.667\mathbf{F}^2\left(1 + \frac{h/y_1}{y_2/y_1}\right) = (y_2/y_1 - h/y_1)^3 \qquad (15\text{-}5)$$

[12] Ésta es la ecuación (3-17) excepto que y_1 se remplaza por y_2.

Cuando un resalto hidráulico está influido por el vertedero, y_2/y_1 puede relacionarse con **F** por medio de la ecuación (3-21). Entonces la ecuación (15-5) se convierte en

$$\frac{21.33\mathbf{F}^2}{\sqrt{1-8\mathbf{F}^2}-1} = \frac{(\sqrt{1+8\mathbf{F}^2}-1-2h/y_1)^3}{(\sqrt{1+8\mathbf{F}^2}-1+2h/y_1)} \tag{15-6}$$

Esta ecuación da la relación entre h/y_1 y **F** y puede graficarse como la curva mostrada en la figura 15-12. Forster y Skrinde [23] encontraron que esta curva coincide con los datos experimentales para una elevación abrupta con $y_3 = y_c$ para $X = 5(h + y_3)$. A pesar de la falta de datos experimentales adicionales, esta curva puede utilizarse como guía para el dimensionamiento de un cuenco disipador con un vertedero de cresta ancha como control de resalto, siempre y cuando $y_3 < (2y_2 + h)/3$.

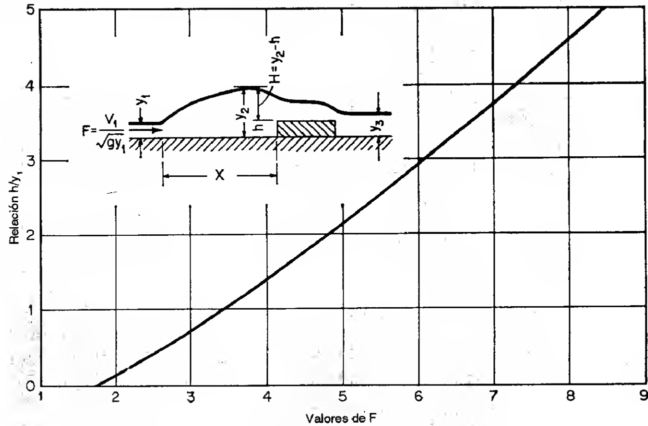


Figura 15-12. Relaciones analíticas entre **F** y h/y_1 para un vertedero de cresta ancha (*según Forster* y *Skrinde* [23]).

Un vertedero de cresta ancha tiene ciertas ventajas en comparación con algunos otros tipos de control. Tiene una estabilidad estructural mayor que un vertedero de cresta delgada y a menudo requiere menores costos de excavación que una elevación abrupta.

C. Control mediante una elevación abrupta. A partir de datos experimentales, Forster y Skrinde [23] desarrollaron un diagrama (figura 15-13) que muestra las relaciones entre **F**, y_3/y_1 y h/y_1 de una elevación abrupta para $X = 5(h + y_3)$. La consistencia de las relaciones se verificó mediante un análisis teórico, utilizando la teoría de *momentum*, similar al hecho para un vertedero de cresta ancha (ejemplo 3-2). Este diagrama permite la predicción del comportamiento de una elevación abrupta cuando se conocen V_1, y_1, y_2, y_3 y h.

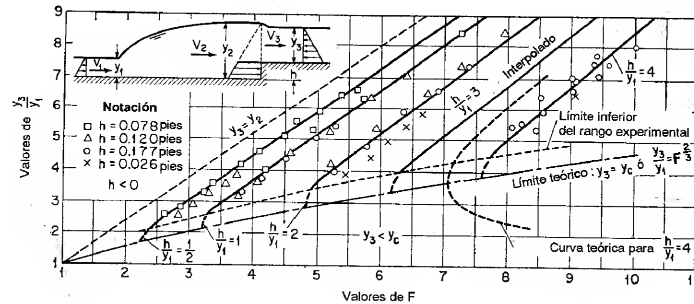


Figura 15-13. Relaciones experimentales entre **F**, y_3/y_1 y h/y_1 para una elevación abrupta (*según Forster y Skrinde* [23]).

En el diagrama, un punto (**F**, y_3/y_1) localizado por encima de la línea $y_3 = y_2$ representa la condición $y_3 > y_2$, para la cual la condición abrupta sólo serviría para incrementar el efecto de ahogamiento. En un punto localizado dentro del rango experimental entre las líneas para $y_3 = y_2$ y $y_3 = y_c$, su posición con relación a la curva h/y_1 correspondiente indica el efecto de la elevación abrupta sobre el patrón de flujo. Luego, si el punto se localiza en la curva h/y_1 correspondiente, se formará un resalto con $X = 5(h + y_3)$. Si se localiza a la izquierda y por encima de la curva, la elevación es muy alta y el resalto se verá forzado hacia aguas arriba y se ahogará. Si se localiza a la derecha de la curva, la elevación es muy baja y el resalto se verá forzado hacia aguas abajo y en dirección de la elevación abrupta y desaparecerá.

Si un punto (**F**, y_3/y_1) se localiza en el diagrama por debajo de la línea $y_3 = y_c$, entonces el flujo normal aguas abajo es supercrítico. Al resalto seguirá una sección crítica creada por encima de la cresta de la elevación abrupta, de manera que ésta actúa como un vertedero, lo cual implica que puede utilizarse el diagrama de diseño (figura 15-11) para el vertedero de cresta delgada.

Para propósitos de diseño puede utilizarse el diagrama (figura 15-13) para determinar la longitud y la profundidad necesarias de un cuenco disipador cuando se conocen V_1, y_1 y y_3. Se propone que primero se defina un punto (**F**, y_3/y_1) para las condiciones de máximo caudal y se determine el correspondiente valor de h/y_1 mediante interpolación. Al repetir este procedimiento para otros caudales dentro del rango de caudales esperado, puede obtenerse un valor de h requerido mayor, que debe utilizarse para la elevación más alta. También puede determinarse una altura mínima de elevación necesaria para prevenir que el resalto desaparezca.

15-10. Control del resalto mediante una caída abrupta. El control del resalto mediante obstáculos es útil si la profundidad de aguas abajo es menor que la profundidad secuente para un resalto normal, pero si la primera es mayor que la segunda, debe utilizarse una caída en el piso del canal para asegurar un resalto. Por lo general esta condición ocurre a la salida de una expansión con flujo supercrítico.

Para determinado número de Froude de aproximación, la profundidad de aguas abajo de una caída puede localizarse en cualquiera de cinco posibles regiones, como se muestra en la figura 15-14*a*. El límite inferior de la región 1 es la profundidad para la cual el resalto empezará a viajar hacia aguas arriba. El límite superior de la región 5 es la profundidad para la cual el resalto empezará a moverse hacia aguas abajo. En efecto, la caída no controla el resalto en estas dos regiones porque éste es estable y la caída es efectiva para sus propósitos deseados sólo en las regiones 2 y 4. La región intermedia 3 representa un estado ondulatorio de flujo sin un frente de rompimiento.

Al aplicar las ecuaciones de continuidad y de *momentum* en un análisis similar al realizado para el vertedero de cresta ancha (ejemplo 3-2), Hsu [47] demostró que para la región 2,

$$\mathbf{F}^2 = \tfrac{1}{2}\frac{y_3/y_1}{1 - y_3/y_1}\left[1 - \left(\frac{y_3}{y_1} - \frac{h}{y_1}\right)^2\right] \tag{15-7}$$

y para la región 4,

$$\mathbf{F}^2 = \tfrac{1}{2}\frac{y_3/y_1}{1 - y_3/y_1}\left[\left(\frac{h}{y_1} + 1\right)^2 - \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2\right] \tag{15-8}$$

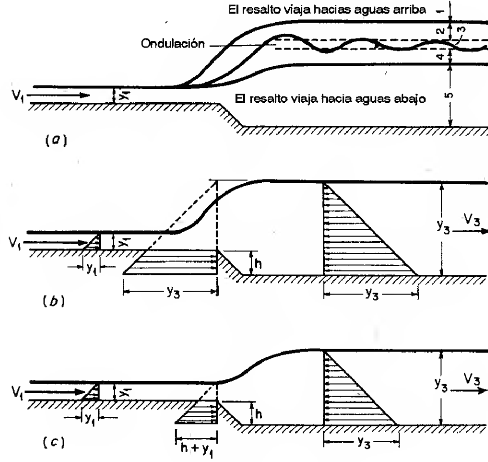
Estas ecuaciones se verificaron mediante experimentos[13]. Las relaciones entre **F**, y_3/y_1 y h/y_1 se muestran en la figura 15-14.

En la figura 15-14 cada curva para determinado h/y_1 tiene dos ramas relativamente rectas conectadas mediante una parte recta corta cerca de la mitad. El brazo del lado izquierdo representa la condición correspondiente a la región 2 y el del lado derecho, la región 4. Este diagrama puede utilizarse para propósitos de diseño con el fin de determinar la altura relativa de caída requerida para estabilizar un resalto en cualquier combinación de caudal, profundidad de aguas arriba y profundidad de aguas abajo.

15-11. Cuenco disipador de diseño generalizado. En trabajos importantes o en aquéllos que involucran un gran número de cuencos disipadores, a menudo se necesitan diseños generalizados de los cuencos por razones económicas y para cumplir requerimientos específicos. Estos diseños pueden desarrollarse a través de años de experiencia y observaciones sobre estructuras existentes, o mediante investigaciones en modelo, o ambos. Los cuencos diseñados de esta manera a menudo están provistos de accesorios especiales, incluidos bloques de rápida, umbrales y pilares deflectores.

Los bloques en la rápida se utilizan para conformar una estructura dentada a la entrada del cuenco disipador. Su función es partir el chorro de entrada y elevar una parte de él desde el piso, produciendo una longitud de resalto más corta que la que sería posible sin ellos. Estos bloques también tienden a estabilizar el resalto y por consiguiente a mejorar su comportamiento.

[13] Moore y Morgan [48] realizaron un análisis simplificado y experimentos adicionales.



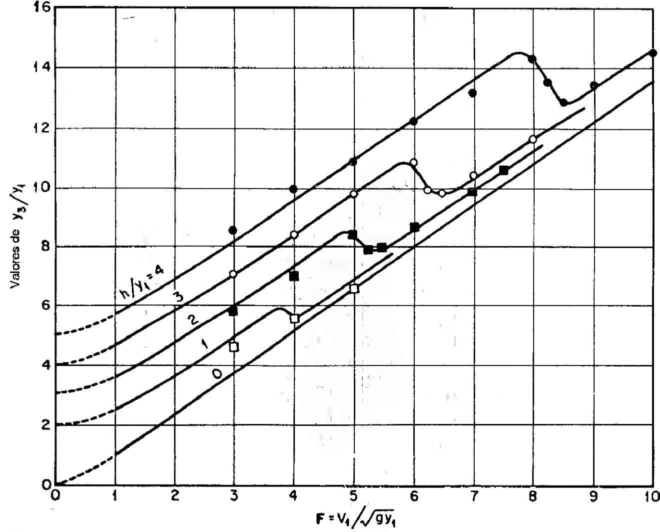


Figura 15-14. Relaciones experimentales y analíticas entre **F**, y_3/y_1 y h/y_1, para una caída abrupta (*según E. Y. Hsu* [47]).

Los umbrales dentados[14], o sólidos, a menudo se colocan al final del cuenco disipador. Su función es reducir además la longitud del resalto y controlar la socavación. Para cuencos grandes diseñados para altas velocidades de entrada, el umbral por lo general es dentado para llevar a cabo la función adicional de difundir la parte residual del chorro de alta velocidad que puede alcanzar el extremo del cuenco.

Los pilares deflectores son bloques localizados en posiciones intermedias sobre el piso del cuenco. Su función es disipar la energía principalmente mediante una acción de impacto. Los bloques deflectores son muy útiles en pequeñas estructuras con velocidades de entrada bajas. Sin embargo, no son recomendables cuando las altas velocidades hacen posible la cavitación. En ciertas circunstancias, deben diseñarse para soportar el impacto de hielo o desechos flotantes.

Existen muchos diseños generalizados de cuencos disipadores que utilizan un resalto hidráulico como medio para la disipación de energía[15]. En las siguientes secciones se describirán tres diseños comunes:

1. El cuenco SAF. Se recomienda para ser utilizado en estructuras pequeñas de vertederos, obras de salida y canales donde $\mathbf{F}_1 = 1.7$ a 17. La reducción en la longitud del cuenco conseguida por el uso de accesorios diseñados para el mismo es de alrededor del 80% (70% a 90%).

2. El cuenco USBR II. Se recomienda para ser utilizado en estructuras grandes de vertederos, canales, etc., donde $\mathbf{F}_1 > 4.5$. La longitud del resalto y del cuenco se reduce alrededor del 33% mediante el uso de accesorios.

3. El cuenco USBR IV. Se recomienda para ser utilizado con resaltos de $\mathbf{F}_1 = 2.5$ a 4.5, lo cual a menudo ocurre en estructuras de canal y en presas de derivación. Este diseño reduce las ondas excesivas creadas en resaltos imperfectos.

Nótese que estos diseños sólo son ejemplos comunes y debe tenerse cuidado al utilizarlos en aplicaciones de cuencos disipadores en condiciones de diseño completamente diferentes.

El principio del cuenco disipador también se aplica al diseño de una *caída de canal* (o *descenso de canal*), la cual es una estructura construida para asegurar un descenso en la superficie del agua de un canal y una destrucción segura de la energía liberada de esta manera. La caída del canal algunas veces se diseña con un ancho contraído parecido al de la canaleta Parshall, y se conoce como *caída contraída*, la cual puede construirse a bajo costo en conjunto con un puente y utilizarse también como un medidor o regulador [50, 60-63].

15-12. Cuenco disipador SAF. Este cuenco (figura 15-15; SAF proviene del inglés *San Anthony Falls*, Cataratas de san Antonio) se desarrolló en el Laboratorio de Hidráulica San Anthony Falls, en la Universidad de Minnesota, para ser utilizado en pequeñas estructuras de drenaje, como las construidas por el U. S. Soil Conservation Service. Las reglas de diseño resumidas por el investigador Blaisdell [22, 64] son las siguientes:

[14] El umbral dentado o deflector aserrado también se conoce como *umbral Rehbock*, debido a que lo patentó por primera vez el profesor Theodor Rehbock después de desarrollarlo en experimentos hechos durante 1924 a 1927 en la Technical University of Karlsruhe, Alemania.

[15] Para más información, *véase* [9], [25], [34], [35], [43] y [49] a [58]. Para diseños desarrollados por el U. S. Army Corps of Engineers, *véase* [59].

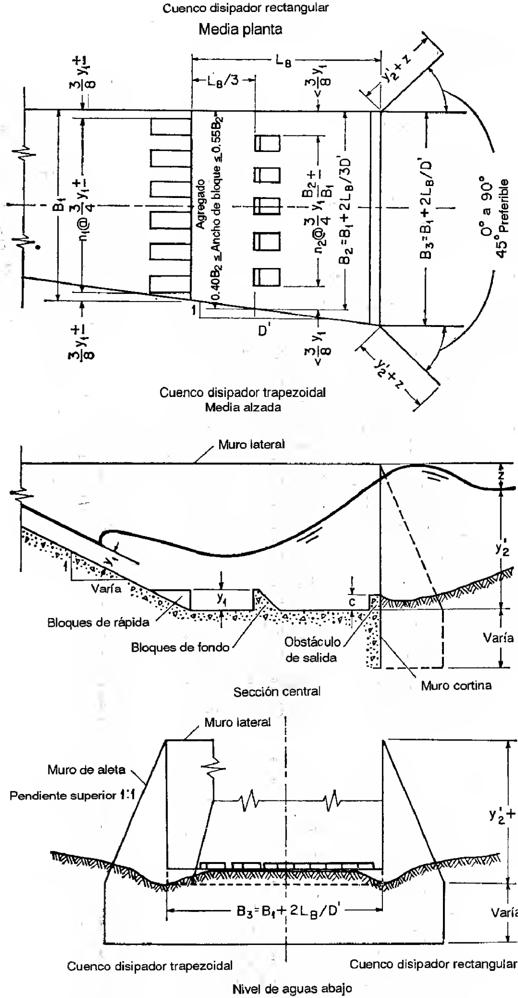


Figura 15-15. Dimensiones del cuenco SAF (*U. S. Soil Conservation Service* [64]).

1. La longitud L_B del cuenco disipador para números de Froude entre $\mathbf{F}_1 = 1.7$ y $\mathbf{F}_1 = 17$ se determina mediante $L_B = 4.5y_2/\mathbf{F}_1^{0.76}$.

2. La altura de los bloques de entrada y los bloques del piso es y_1 y su ancho y espaciamiento es aproximadamente $0.75y_1$.

3. La distancia desde el extremo de aguas arriba del cuenco disipador hasta los bloques del piso es $L_B/3$.

4. No deben localizarse bloques en el piso más cerca de las paredes laterales que $3y_1/8$.

5. Los bloques del piso deben localizarse aguas abajo enfrentados a las aberturas entre los bloques de la rápida.

6. Los bloques del piso deben ocupar entre el 40% y el 55% del ancho del cuenco disipador.

7. Los anchos y el espaciamiento de los bloques del piso para cuencos disipadores divergentes deben incrementarse en proporción al aumento del ancho del cuenco disipador en la sección donde se localizan los bloques.

8. La altura del umbral de salida está dada por $c = 0.07y_2$, donde y_2 es la profundidad secuente teórica, correspondiente a y_1.

9. La profundidad de salida de aguas abajo por encima del piso del cuenco disipador está dada por $y_2' = (1.10 - \mathbf{F}1^2/120)y_2$ para $\mathbf{F}_1 = 1.7$ a 5.5; por $y_2' = 0.85y_2$, para $\mathbf{F}_1 = 5.5$ a 11; y por $y_2' = (1.00 - \mathbf{F}1^2/800)y_2$, para $\mathbf{F}_1 = 11$ a 17.

10. La altura de los muros laterales por encima de la profundidad de salida máxima esperada dentro de la vida útil de la estructura está dada por $z = y_2/3$.

11. Los muros de salida deben ser iguales en altura a los muros laterales del cuenco disipador, y su parte superior debe tener una pendiente de 1 en 1.

12. El muro de salida debe localizarse con un ángulo de 45° con respecto al eje central de la salida.

13. Los muros laterales del cuenco disipador pueden ser paralelos (como en un cuenco disipador rectangular) o diverger como una extensión de los muros laterales de la transición (como en un cuenco disipador trapezoidal).

14. Debe utilizarse un muro cortina de profundidad nominal en el extremo del cuenco disipador.

15. El efecto de atrapamiento de aire no se considera en el diseño del cuenco disipador.

15-13. Cuenco disipador USBR II. A partir de los estudios intensivos de muchas estructuras existentes y de investigaciones de laboratorio, el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35] desarrolló varios tipos de diseños generalizados de cuencos disipadores. El cuenco USBR I lo origina un resalto hidráulico que ocurre en un piso plano sin ningún accesorio, y puede diseñarse con facilidad siguiendo los principios descritos en las secciones iniciales de este capítulo. Sin embargo, tal cuenco por lo general es muy práctico, debido a que su longitud lo hace costoso y a su falta de control. El cuenco USBR III se diseña para un propósito similar al del cuenco SAF, pero tiene un factor de seguridad mayor, ajustado a las necesidades del Bureau. El comportamiento de este cuenco indica que su longitud y la del resalto pueden reducirse alrededor del 60%, con accesorios en comparación con el 80% para el cuenco SAF. Por consiguiente, el cuenco SAF es más corto y más económico, pero menos seguro.

El cuenco USBR V se utiliza cuando la economía estructural implica el uso de un canal de aproximación inclinado, el cual es usual en vertederos de presas altas. El principio de diseño para resaltos hidráulicos en canales de aproximación inclinados se descubrirá en la sección 15-16, y los cuencos USBR II y IV en esta sección y la siguiente, respectivamente.

El cuenco USBR II se desarrolló para cuencos disipadores de uso común en vertederos de presas altas y de presas de tierra y para estructuras de canales grandes. El cuenco contiene bloques en la rápida del extremo de aguas arriba y un umbral dentado cerca del extremo de aguas abajo. No se utilizan bloques de impacto debido a que las velocidades relativamente altas que entran al resalto pueden causar cavitación en dichos bloques. En la figura 15-16 se muestran el diseño detallado y los datos necesarios para el cálculo. Las reglas recomendadas para el diseño son las siguientes:

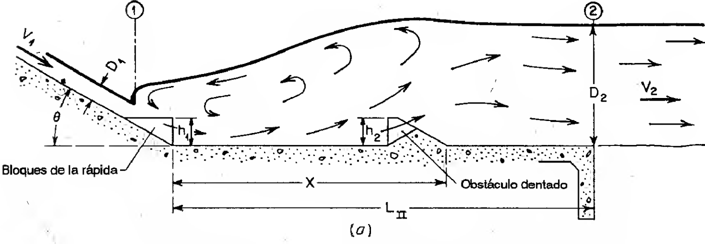
1. Fijar la elevación del piso para utilizar la profundidad secuente de aguas abajo completa, más un factor de seguridad adicional si es necesario. Las líneas punteadas de la figura 15-16*b* sirven como guía para diferentes relaciones de la profundidad real de aguas abajo con respecto a la profundidad secuente. Estudios de diseños existentes indican que la mayor parte de los cuencos se diseñaron para profundidades de salida secuentes o menores. Sin embargo, existe un límite, el cual es establecido por la curva denominada *Mínima profundidad de salida*, que indica el punto para el cual el frente del resalto se mueve hacia afuera de los bloques de la rápida. En otras palabras, cualquier reducción adicional de la profundidad de salida hará que el resalto se salga del cuenco; es decir, producirá un "barrido de resalto". El cuenco no debe diseñarse para una profundidad menor que la secuente. Para mayor seguridad, de hecho, el Bureau recomienda un margen de seguridad mínimo del 5% de D_2, que debe sumarse a la profundidad secuente.

2. El cuenco II puede ser efectivo hasta un número de Froude tan bajo como 4, pero para valores menores esto no necesariamente es cierto. Para valores bajos, se recomiendan diseños que consideren la supresión de ondas.

3. La longitud del cuenco puede obtenerse de la curva de longitud del resalto dada en la figura 15-16*c*.

4. La altura de los bloques de la rápida es igual a la profundidad D_1 del flujo que entra al cuenco. El ancho y el espaciamiento deben ser aproximadamente iguales a D_1; sin embargo, esto puede modificarse para eliminar la necesidad de fracciones de bloques. Con respecto a las paredes laterales es preferible un espaciamiento igual a $0.5D_1$ para reducir salpicaduras y mantener presiones adecuadas.

5. La altura del umbral dentado es igual a 0.2_2, y el ancho máximo y el espaciamiento máximos recomendados son aproximadamente $0.15D_2$. En este diseño se recomienda colocar un bloque adyacente a cada pared lateral (figura 15-16*e*). La pendiente de la parte continua del umbral de salida es 2:1. En el caso de cuencos angostos, lo cual involucraría sólo algunos dientes según la regla anterior, es recomendable reducir el ancho y el espaciamiento, siempre y cuando esto se haga de manera proporcional. La reducción del ancho y del espaciamiento en realidad mejora el comportamiento en estos cuencos; luego los anchos y los espaciamientos mínimos entre los dientes se establecen sólo por consideraciones estructurales.



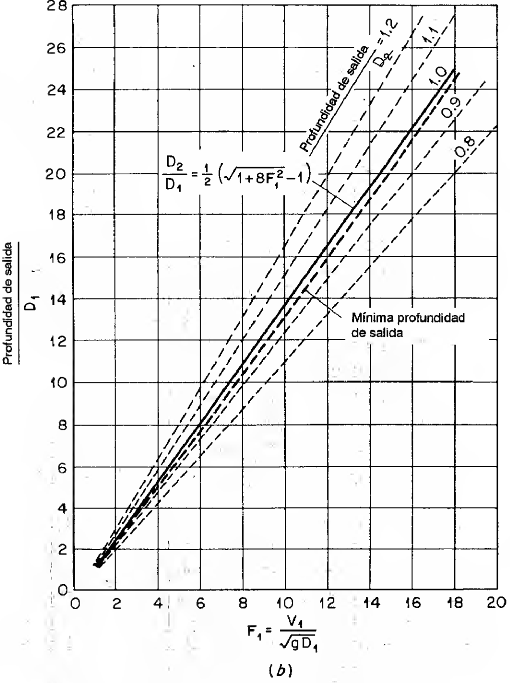
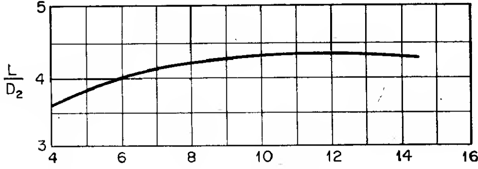
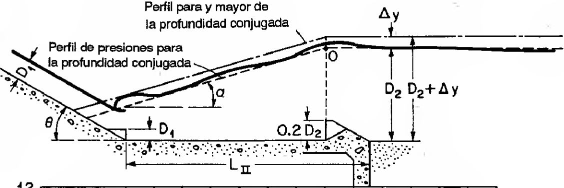
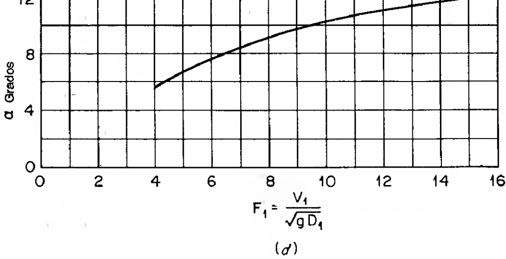


Figura 15-16. Curvas de diseño y dimensiones del cuenco USBR II (*U. S. Bureau of Reclamation* [34]). (*a*) Definición de símbolos; (*b*) profundidades de salida mínimas; (*c*) longitud del resalto hidráulico; (*d*) superficie del agua y perfiles de flujo aproximados (profundidad conjugada = profundidad secuente); (*e*) dimensiones recomendadas.







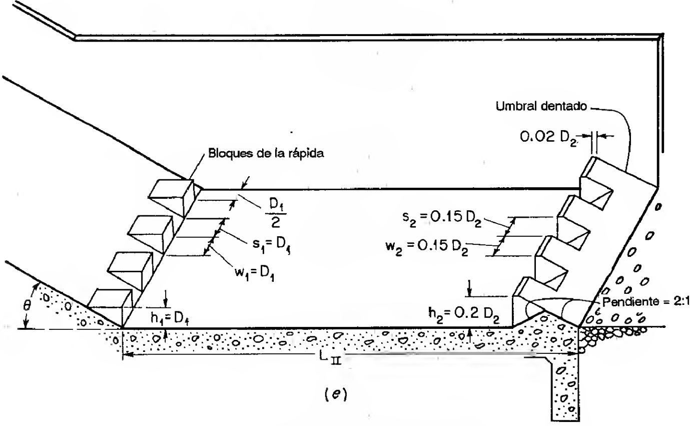


Figura 15-16 (*continuación*).

6. No es necesario escalonar los bloques de la rápida y el umbral dentado. De hecho, esta práctica no es recomendable desde un punto de vista constructivo.

7. Las pruebas de verificación sobre los cuencos II no indican cambios perceptibles en la acción del cuenco disipador con respecto a la pendiente de la rápida aguas arriba del cuenco. En estas pruebas la pendiente de la rápida varía desde 0.6:1 a 2:1. En realidad, la pendiente de la rápida tiene un efecto sobre el resalto hidráulico en algunos casos[16]. Es recomendable que la intersección aguda entre la rápida y el cuenco se remplace por una curva de radio razonable ($R \geq 4D_1$) cuando la pendiente de la rápida es 1:1 o mayor. Los bloques de la rápida pueden incorporarse a la superficie curva con tanta facilidad como a las planas. En rápidas empinadas la longitud de la superficie superior de los bloques debe hacerse lo suficientemente larga para deflectar el chorro.

Las reglas anteriores darán como resultado un cuenco más seguro para vertederos con caída hasta 200 pies y para caudales hasta 500 pies^3/s por pie de ancho, siempre y cuando el chorro que entra al cuenco sea razonablemente uniforme tanto en velocidad como en profundidad. Para caídas superiores, caudales unitarios mayores o asimetrías posibles, se recomienda un estudio en modelo del diseño específico.

8. Los perfiles aproximados para la superficie del agua y para las presiones de un resalto en el cuenco se muestran en la figura 15-16*d*.

Ejemplo15-2. Dimensione un cuenco disipador USBR II para el vertedero de rebose diseñado en el ejemplo 14-1. La elevación de la profundidad de salida se localiza en la cota 920.0.

Solución. Al registrar en la figura 14-15 una altura de 17.7 pies por encima de la cresta y una caída total de 120 pies, la velocidad de flujo a la salida del vertedero es 79 pies/s. Por consiguiente, la profundidad de flujo es 75,000/(250 × 79) = 3.8 pies y el número de Froude es $79/\sqrt{3.8g} = 7.13$.

Al ingresar a la figura 15-16*b* con $\mathbf{F}_1 = 7.13$, la línea continua da una relación de la profundidad de salida con respecto a D_1 igual a 9.7. Debido a que la profundidad de salida y la secuente D_2 en este caso son idénticas, $D_2 = 9.7 \times 3.8 = 36.9$ pies. La línea de profundidad de salida mínima para el cuenco II en la figura 15-16*b* muestra un margen de seguridad de 4% que es de esperarse para el número de Froude mencionado. La elevación del piso del cuenco se coloca en la cota 883.1. Luego, la caída total será 116.9 pies, pero esto no cambiará la velocidad de flujo de manera significativa.

Si se desea dar un margen de seguridad del 8% se sigue el siguiente procedimiento. A partir de la figura 15-16*b*, la línea de profundidad de salida mínima para el cuenco II da una profundidad de salida/D_1 = 9.2 para $\mathbf{F}_1 = 7.13$ y cuando el barrido de resalto es incipiente, entonces $PS_{ba} = 9.2 \times 3.8 = 35.0$ pies. Al agregar un 8% a esta cifra, el cuenco disipador debe posicionarse de nuevo para una profundidad de salida de $35.0 \times 1.08 = 37.8$ pies o $1.024D_2$. El piso del cuenco debe localizarse en la cota 882.2.

[16] La pendiente de la rápida tiene muy poco efecto sobre el resalto siempre y cuando la distribución de velocidades y la profundidad de flujo sean razonablemente uniformes a la entrada del resalto. Si la rápida es larga y plana, la velocidad puede concentrarse en una parte de la sección de flujo, originando un resalto asimétrico con remolinos laterales fuertes. Esta operación es costosa y debe evitarse en todos los cuencos disipadores. También, cuando el ángulo de divergencia de la rápida es muy grande para conducir el agua de manera apropiada, el resalto se volverá muy picado y su posición será incierta.

La longitud del cuenco puede obtenerse entrando a la curva de la figura 15-16*c* con $\mathbf{F}_1 = 7.13$. Luego, $L/D_2 = 4.16$ o $L = L_{II} = 4.16 \times 36.9 = 154$ pies.

La altura, el ancho y el espaciamiento recomendados entre los bloques de la rápida son D_1; luego estas dimensiones pueden ser 3 pies 10 pulg. La altura del umbral dentado es $0.2D_2$, o 7 pies 5 pulg, y el ancho y el espaciamiento de los dientes es $0.15D_2$, o 5 pies 6 pulg.

15-14. Cuenco disipador USBR IV. Cuando $\mathbf{F}_1 = 2.5$ a 4.5, se producirá un resalto oscilante en el cuenco disipador, el cual genera una onda que es difícil de atenuar (sección 15-3). El cuenco USBR IV (figura 15-17) se diseña para combatir este problema eliminando la onda en su fuente[17]. Esto se lleva a cabo intensificando el remolino, que aparece en la parte superior del resalto (figura 15-2), con los chorros direccionales deflectados utilizando grandes bloques en la rápida cuyo número mínimo requerido para este propósito se muestra en la figura 15-17. Para un comportamiento hidráulico mejor, es conveniente construir estos bloques más angostos que lo indicado, preferiblemente con un ancho igual a $0.75D_1$, y fijar la profundidad de salida, de tal manera que sea un 5% a 10% mayor que la profundidad secuente del resalto. La longitud del cuenco se hace igual a la del resalto en un cuenco disipador horizontal sin accesorios y, por consiguiente, puede determinarse mediante la curva de la figura 15-4 (es decir, también igual a la longitud del cuenco USBR I o L_I). El cuenco IV sólo se utiliza en las secciones transversales rectangulares.

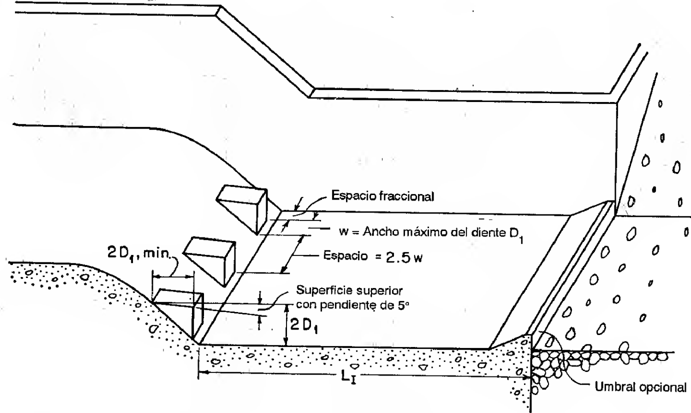


Figura 15-17. Dimensiones del cuenco USBR IV (*U. S. Bureau of Reclamation* [34]).

15-15. Vertedero de caída recta. La napa de una caída libre aireada de un vertedero de caída recta (figura 15-18) invertirá su curvatura y se convertirá suavemente en un flujo supercrítico en el piso de aguas abajo. En consecuencia,

[17] El Bureau también ha desarrollado diseños alternativos para sustituir el cuenco IV, como el disipador de energía de caída (sección 15-15), el de tipo impacto [34, 35] y los supresores de onda.

puede formarse un resalto hidráulico aguas abajo. Con base en sus propios datos experimentales y los de Moore [40] y Bakhmeteff y Feodoroff [65], Rand [66] encontró que la geometría de flujo en vertederos de caída recta pueden describirse mediante funciones del *número de caída*, el cual se define como

$$\mathbf{D} = \frac{q^2}{gh^3} \tag{15-9}$$

donde q es el caudal por unidad de ancho de la cresta de la caída, g es la aceleración de la gravedad y h es la altura de la caída. Las funciones son

$$\frac{L_d}{h} = 4.30\mathbf{D}^{0.27} \tag{15-10}$$

$$\frac{y_p}{h} = 1.00\mathbf{D}^{0.22} \tag{15-11}$$

$$\frac{y_1}{h} = 0.54\mathbf{D}^{0.425} \tag{15-12}$$

$$\frac{y_2}{h} = 1.66\mathbf{D}^{0.27} \tag{15-13}$$

donde L_d es la longitud de caída, es decir, la distancia desde el muro de caída hasta la posición de la profundidad y_1; y_p es el nivel de la piscina bajo la napa; y_1 es la profundidad en el pie de la napa o el inicio del resalto hidráulico; y y_2 es la profundidad secuente de salida correspondiente a y_1. La posición de la profundidad y_1 puede determinarse aproximadamente mediante la línea *ABC*, que une el punto *A* sobre el piso en la posición donde ocurre y_1, el punto *B* en el eje de la napa a la altura de la profundidad de piscina y el punto *C* en el eje de la napa sobre la cresta de la caída. El hecho de que estos tres puntos se localicen sobre una línea se verificó experimentalmente.

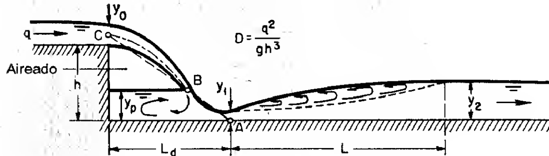


Figura 15-18. Geometría del flujo en un vertedero de caída recta.

Para una altura h y un caudal q por unidad de ancho, dados en la cresta de la caída, la profundidad secuente y_2 y la longitud de caída L_d puede calcularse mediante las ecuaciones (15-10) y (15-13). Si la profundidad de salida es menor que y_2 el resalto hidráulico se moverá hacia aguas abajo, y si es mayor, el resalto se ahogará. A medida que el nivel de salida aumente, la cresta del vertedero se sumergirá. El vertedero será aún efectivo si la sumergencia no alcanza la profundidad de control en la cresta del mismo. La superficie superior de la napa sumergida puede suponerse como una línea recta tangente a la de la napa libre en el punto donde ésta entra en el agua de aguas abajo. La superficie superior de la napa libre puede representarse mediante la ecuación general dada en la sección 14-1.

En el análisis anterior se supuso que la longitud de la cresta del vertedero es igual al ancho del canal de aproximación. Si la longitud de la cresta es menor que el ancho del canal de aproximación, la contracción en los extremos del vertedero será tan grande que los extremos de la napa pueden caer más allá de los muros laterales del cuenco disipador, y la concentración de velocidades en el centro de la salida puede causar socavación adicional en el canal de aguas abajo. Por consiguiente, es importante diseñar el extremo de aproximación de manera apropiada mediante la conformación del canal de aproximación para reducir el efecto de las contracciones laterales.

El vertedero de caída recta por lo general lo instala el U. S. Soil Conservation Service en pequeñas estructuras de drenaje. La forma más simple de este tipo de estructura, conocida como *vertedero de caída con entrada rectangular*, es una caja rectangular abierta en la parte superior y en el extremo de aguas abajo [67-69]. La escorrentía de aguas lluvias se dirige hacia la caja mediante diques y muros, entra por el extremo de aguas arriba y por los dos lados, y sale a través del extremo abierto de aguas abajo hacia un canal de descargue. Un diseño generalizado también lo desarrolló el Service como resultado de pruebas y de análisis en el Laboratorio de Hidráulica de St. Anthony Falls [70, 71].

Al colocar una malla de hierro o parrilla sobre la superficie del vertedero de caída recta, el chorro de caída puede separarse en un determinado número de láminas delgadas largas de agua, que caen casi verticalmente hacia el canal de aguas abajo. Luego la energía del chorro puede disiparse sin necesidad de utilizar un resalto hidráulico y, por consiguiente, puede reducirse la acción de ondas si $\mathbf{F}_1 = 2.5$ a 4.5. Este esquema lo adoptó el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35] para desarrollar el *disipador de energía de caída* como sustituto de diseño para el cuenco USBR IV (sección 15-14). En este diseño, la parrilla puede estar compuesta por una serie de vigas, como rieles de acero, canaletas de hierro o maderos, que formen ranuras paralelas a la dirección del flujo. El ancho de la ranura es igual a dos tercios del ancho de las vigas. Si los rieles están inclinados hacia abajo formando un ángulo de 3° o mayor, la parrilla misma realiza su limpieza. Si la parrilla se inclina hacia arriba, puede controlar el nivel del agua del lado aguas arriba, pero puede generar un problema de limpieza. La longitud de las ranuras de la parrilla puede calcularse mediante

$$L_G = \frac{4.1Q}{WN\sqrt{2gy_1}} \tag{15-14}$$

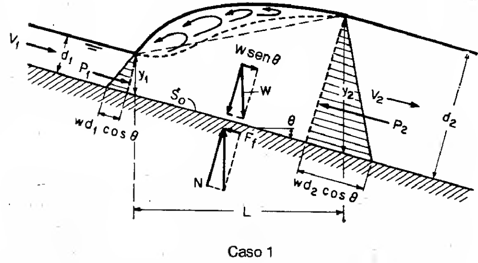
donde Q es el caudal total en pies^3/s, W es el ancho de un espacio en pies, N es el número de espacios, g es la aceleración gravitacional y y_1 es la profundidad de flujo en el canal de aguas arriba.

15-16. Resalto en canales inclinados. En el análisis de resaltos hidráulicos en canales pendientes o con pendientes apreciables, es esencial considerar el peso del agua dentro del resalto; en canales horizontales el efecto de este peso es insignifi-

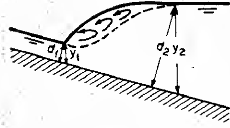
cante. Entonces, las ecuaciones de *momentum* para resaltos en fondos horizontales no pueden aplicarse de manera directa a resaltos en fondos inclinados. Sin embargo, como se mostrará en esta sección, el principio de *momentum* puede utilizarse para deducir una ecuación análoga a la ecuación (3-21), que contendrá una función empírica que debe determinarse experimentalmente.

Riegal y Beebe [9] y Ellms [72, 73] realizaron estudios iniciales sobre resaltos hidráulicos en canales inclinados. Bakhmeteff y Matzke [74], Yarnell[18] y Kindsvater [75] realizaron investigaciones posteriores.

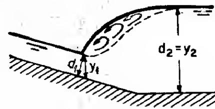
El resalto hidráulico en canales inclinados puede ocurrir en varias formas, como se muestra en la figura 15-19. El caso 1 es común, pero no en problemas prácticos. Los casos 2 a 4, conocidos como *resaltos hidráulicos ahogados*, son comunes y a menudo aparecen sólo como chorros de agua que entran en una piscina



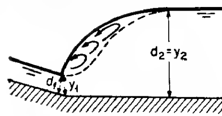
Caso 1



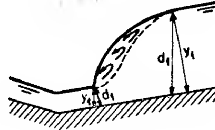
Caso 2



Caso 3



Caso 4



Caso 5

Figura 15-19. Resaltos hidráulicos en canales inclinados.

[18] El trabajo lo inició en 1936 David L. Yarnell en Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City, Iowa, y se interrumpió a su muerte en 1937. Los datos de Yarnell los entregó Kindsvater a la Tennessee Valley of Authority en 1939 para una investigación extensiva.

aguas abajo por debajo de la pendiente empinada. Para propósitos prácticos, se cree que las soluciones para la forma común del caso 1 y para los resaltos hidráulicos ahogados se aplican indistintamente. El caso 5 muestra el resalto en una pendiente adversa, el cual es bastante raro y en el presente de él no se dispone de datos experimentales adecuados.

Para el análisis del resalto del caso 1, se supone un canal rectangular de ancho unitario. Al considerar todas las fuerzas efectivas paralelas al fondo del canal, la ecuación de *momentum* debe escribirse como

$$\frac{Qw}{g}(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) = P_1 - P_2 + W \operatorname{sen}\theta - F_f \tag{3-14}$$

donde $Q = V_1 d_1$, $V_2 = V_1 d_1/d_2$, $P_1 = 0.5wd_1^2 \cos\theta$, $P_2 = 0.5wd_2^2 \cos\theta$, F_f es insignificante, y β_1 y β_2 pueden tomarse iguales a la unidad. Si el perfil de la superficie de resalto es una línea recta, puede calcularse el peso del agua en éste. La discrepancia entre la línea recta y los perfiles reales y el efecto de la pendiente puede corregirse mediante un factor K. Luego,

$$W = \tfrac{1}{2}KwL(d_1 + d_2) \tag{15-15}$$

Al sustituir la ecuación (15-15) en la ecuación (3-14), y al hacer $\mathbf{F}_1 = V_1/\sqrt{g d_1}$ y simplificar,

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 - (2G^2 + 1)\frac{d_2}{d_1} + 2G^2 = 0 \tag{15-16}$$

donde

$$G = \frac{\mathbf{F}_1}{\sqrt{\cos\theta - \dfrac{KL \operatorname{sen}\theta}{d_2 - d_1}}} \tag{15-17}$$

Es una creencia general [76] que K y $L/(d_2 - d_1)$ varían sobre todo con $\mathbf{F}_1$ y, por consiguiente, que G es una función de $\mathbf{F}_1$ y θ, o $G = f(\mathbf{F}_1, \theta)$.

Si se compara la ecuación (15-16) con la ecuación (3-20) para un resalto sobre un piso nivelado, es evidente la similaridad entre las dos ecuaciones. Al proseguir la solución para la ecuación (3-20), aparentemente la solución de la ecuación (15-16) es

$$\frac{d_2}{d_1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 + 8G^2} - 1) \tag{15-18}$$

Como $d_1 = y_1 \cos\theta$ y $d_2 = y_2 \cos\theta$, la ecuación (15-18) también puede escribirse como

$$\frac{y_2}{y_1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 + 8G^2} - 1) \tag{15-19}$$

Las dos ecuaciones anteriores son análogas a la ecuación (3-21). Como $G = f(\mathbf{F}_1, \theta)$, estas ecuaciones indican que d_2/d_1 y y_2/y_1 son funciones de $\mathbf{F}_1$ y θ. Puede demostrarse

que la relación de profundidad y_2/y_1 o d_2/d_1 es una función de $\mathbf{F}_1$ y S_0 (es decir, sen θ) mediante el cuadro en la figura 15-20, el cual se basa en los datos experimentales de Hickox [77], Kindsvater [75], Bakhmeteff y Matzke [74] y del U. S. Bureau of Reclamation [34, 35]. De la misma manera, la longitud relativa del resalto L/y_2 puede mostrarse como una función de $\mathbf{F}_1$ y S_0 y representarse mediante las curvas basadas en los datos experimentales del Bureau of Reclamation (figura 15-21). Las líneas punteadas indican las partes donde las curvas no están bien definidas, mediante los datos disponibles. Los diagramas de las figuras 15-20 y 15-21 se basan en datos experimentales limitados, con considerable interpolación; a pesar de ello, son de gran utilidad para propósitos prácticos.

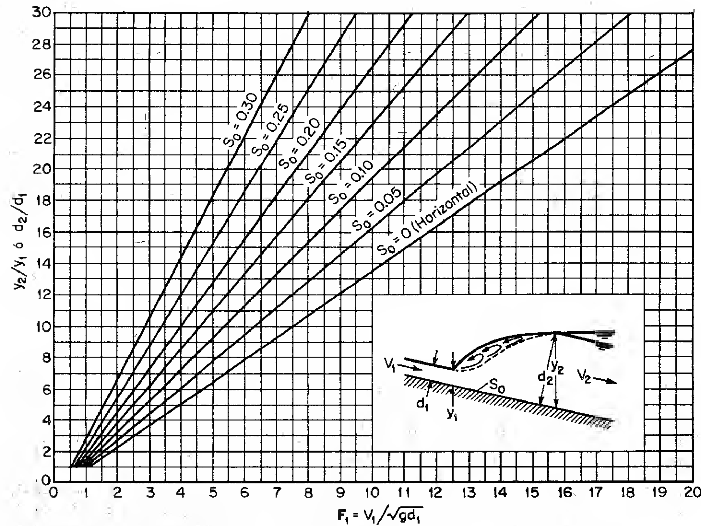


Figura 15-20. Relaciones experimentales entre $\mathbf{F}_1$ y y_2/y_1 o d_2/d_1 para resaltos en canales inclinados.

Las siguientes reglas para el diseño de un cuenco disipador con un canal de aproximación inclinado (cuenco USBR V) se tomaron de las recomendaciones hechas por el U. S. Bureau of Reclamation [34, 35]:

1.Determine el esquema de aproximación más económico para la condición de máximo caudal. Éste es el factor dominante y la única justificación para utilizar un canal de aproximación inclinado.

2. Posicione el piso de manera que el frente del resalto se forme en el extremo de aguas arriba de la pendiente para la condición de caudal y profundidad de salida máximos.

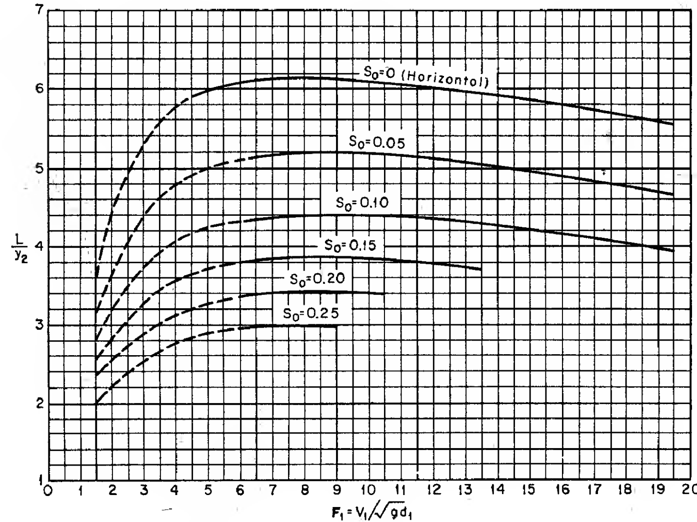


Figura 15-21. Longitud en términos de la profundidad secuente de resaltos en canales inclinados. (*U. S. Bureau of Reclamation [34]*.

3. La parte del resalto que se confina en el cuenco disipador es una decisión del diseñador, y depende de la calidad del material en el lecho del río y otras condiciones. El canal de aproximación inclinado promedio cubre alrededor del 60% de la longitud del resalto para la condición de caudal máximo.

4. Con la pendiente de aproximación diseñada apropiadamente para la condición de máximo caudal, el siguiente paso es asegurar que la profundidad de salida y la longitud del cuenco disponible para la disipación de energía sean suficientes para, por ejemplo, un cuarto, un medio y tres cuartos de la capacidad.

5. Un piso horizontal se comportará de manera adecuada en conjunto con un piso de aproximación inclinado para números de Froude altos, siempre y cuando se disponga de una profundidad de salida apropiada.

6. La pendiente de la rápida aguas arriba de un cuenco disipador tiene muy pocos efectos sobre el resalto siempre y cuando la distribución de velocidades y la profundidad de flujo sean razonablemente uniformes a la entrada del resalto.

7. Un pequeño umbral triangular sólido con su superficie inclinada hacia aguas arriba, localizado en el extremo final del cuenco, es el único accesorio necesario. Éste sirve para levantar el flujo en el momento en el que deja el canal revestido, y actúa así como control de socavación. Sus dimensiones no son críticas; la altura más efectiva se localiza entre 0.05 y 0.10 de la distancia vertical de la elevación de salida

secuente por encima del fondo del pie de resalto, y la pendiente superficial puede ser de 3:1 a 2:1.

15-17.Resalto oblicuo. Cuando un flujo supercrítico se deflecta hacia adentro de la trayectoria del flujo mediante una pared vertical (figura 15-22), la profundidad de flujo y_1 se incrementará abruptamente hasta una profundidad y_2 a lo largo del frente de onda *CD*, el cual se extiende hacia afuera desde el punto de quiebre formando un *ángulo de onda* β que depende de la magnitud del ángulo de deflección θ del quiebre. Este fenómeno se asemeja a un resalto hidráulico normal pero con el cambio de profundidad del agua ocurriendo a lo largo de un frente oblicuo; por consiguiente, éste puede llamarse *resalto hidráulico oblicuo*[19]. Cuando $\theta = 0$, el resalto oblicuo se convierte en el resalto ya conocido, para el cual el frente de onda es normal a la dirección del flujo, o $\beta = 90°$.

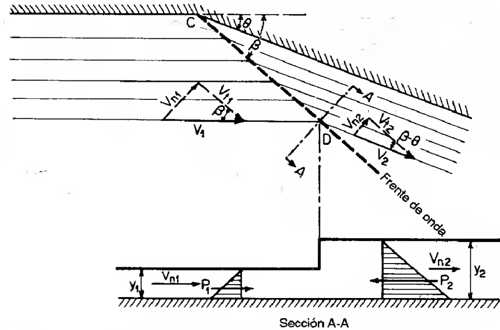


Figura 15-22. Resalto hidráulico oblicuo.

Con referencia a la relación de los vectores de velocidad antes del resalto indicados en la figura 15-22, la velocidad normal al frente de onda es $V_{n1} = V_1$ sen β, donde V_1 es la velocidad de flujo antes del resalto. El número de Froude normal al frente de onda antes del resalto es, por consiguiente,

$$\mathbf{F}_{n1} = \frac{V_{n1}}{\sqrt{gy_1}} = \frac{V_1 \operatorname{sen}\beta}{\sqrt{gy_1}} = \mathbf{F}_1 \operatorname{sen}\beta \qquad (15\text{-}20)$$

Al considerar una sección *A-A*, normal al frente de onda, se ve que un resalto hidráulico normal ocurre en esta sección y que la ecuación (3-21) puede aplicarse. Al sustituir la ecuación (15-20) para $\mathbf{F}_1$ en la ecuación (3-21), la relación de la profundidad secuente con respecto a la inicial es

[19] Para información original *véanse* [78] y [79]. El resalto hidráulico oblicuo es una onda estacionaria oblicua conocida también como *onda de choque*, por analogía con el caso de flujo supersónico de gases. El desarrollo básico de este tema lo realizaron Rouse y White [80].

$$\frac{y_2}{y_1} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2 \operatorname{sen}^2\beta} - 1\right) \qquad (15\text{-}21)$$

Ésta es la ecuación que representa la condición para que ocurra un resalto hidráulico oblicuo.

Con referencia a la figura 15-22, las velocidades tangenciales antes y después del resalto son $V_{t1} = V_{n1}/\tan\beta$ y $V_{t2} = V_{n2}/\tan(\beta - \theta)$. Como no ocurre ningún cambio de *momentum* paralelo al frente de onda, estas dos velocidades deben ser iguales, o

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta - \theta)} \qquad (15\text{-}22)$$

Al utilizar la ecuación de continuidad $y_1V_{n1} = y_2V_{n2}$, la anterior ecuación puede escribirse como

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta - \theta)} \qquad (15\text{-}23)$$

Al eliminar y_2/y_1 de las ecuaciones (15-21) y (15-23), se obtiene una relación que involucra $\mathbf{F}_1$, θ, y se obtiene β:

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2 \operatorname{sen}^2\beta} - 3\right)}{2\tan^2\beta + \sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2 \operatorname{sen}^2\beta} - 1} \qquad (15\text{-}24)$$

Esta ecuación permite calcular el valor de β si $\mathbf{F}_1$ y θ se conocen. Sin embargo, una solución directa de esta ecuación para β en términos de $\mathbf{F}_1$ y θ, es prácticamente imposible. Ippen [78] preparó una gráfica de cuatro cuadrantes (figura 15-23) que muestra todas las relaciones expresadas por las ecuaciones (15-21), (15-23) y (15-24). Esta gráfica es explicativa por sí misma y puede utilizarse para la solución de un resalto hidráulico oblicuo.

Como el resalto oblicuo es normal a la sección *A-A*, la pérdida de energía en él puede calcularse mediante la ecuación (3-24). En problemas prácticos que involucren un resalto oblicuo, y_2/y_1 por lo general es pequeño. Luego la pérdida de energía puede ignorarse en el diseño. Al igual que un resalto normal, si $y_2/y_1 < 2$ (o $\mathbf{F}_{n1} < 1.7$, según la sección 15-3), el resalto oblicuo se vuelve ondulatorio. Este hecho lo confirmó Ippen [79] experimental y teóricamente.

Nótese que un resalto oblicuo rara vez ocurre solo en un canal ordinario, ya que se desarrollarán resaltos oblicuos múltiples debido a las reflexiones en los muros opuestos y las intersecciones con otros frentes de onda. Un análisis adicional sobre este tema se dará en los capítulos subsecuentes.

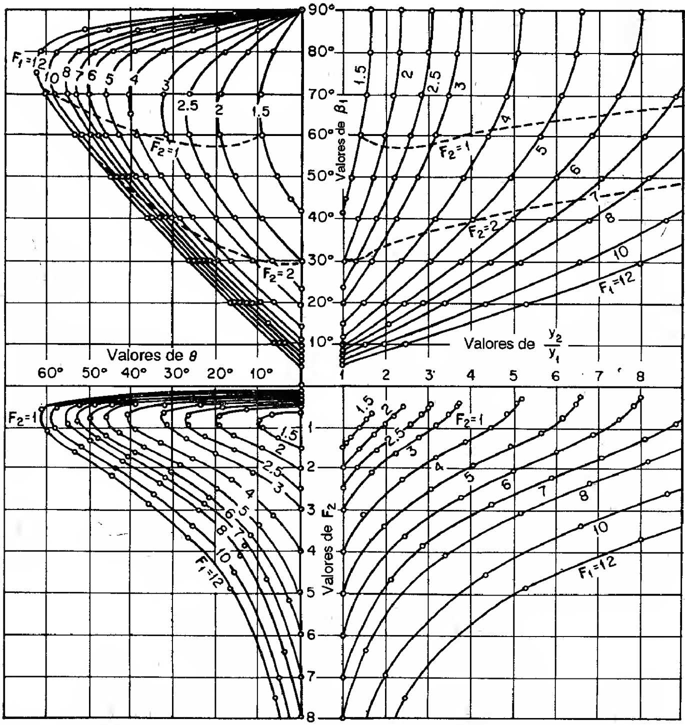


Figura 15-23. Relaciones generales entre F_1, θ, β, y_2/y_1 y $\mathbf{F}_1$ para resaltos hidráulicos oblicuos (*según A. T. Ippen* [78]).

PROBLEMAS

15-1. Demuestre que la siguiente ecuación puede escribirse para un resalto hidráulico que ocurra en un canal trapezoidal horizontal (parte de la notación se da en la tabla 2-1):

$$r^4 + (2.5t + 1)r^3 + (1.5t + 1)(t + 1)r^2 + [0.5t^2 + (t - 3\mathbf{F}_1^2)(t + 1)]r - 3\mathbf{F}_1^2(t + 1)^2 = 0 \quad (15\text{-}25)$$

donde $r = y_2/y_1$, $t = b/zy_1$ y $\mathbf{F}_1 = V_1/\sqrt{g\,y_1}$.

15-2. Demuestre que la ecuación para un resalto hidráulico en un canal parabólico puede escribirse como

$$r^4 - (2.5\mathbf{F}_1^2)r^{1.5} + 2.5\mathbf{F}_1^2 = 0 \quad (15\text{-}26)$$

donde $r = y_2/y_1$ y $\mathbf{F}_1 = V_1/\sqrt{g\,y_1}$.

15-3. Verifique las ecuaciones (15-1) y (15-2).

15-4. En el experimento de Bidone se encontró que, para $V_1 = 5.59$ pies/s y $y_1 = 0.208$ pies en un canal rectangular, la profundidad secuente y_2 fue 0.613 pies. Determine: *a*) la profundidad alterna, *b*) la profundidad secuente teórica, *c*) la pérdida de energía en el resalto, *d*) la pérdida relativa, *e*) la eficiencia, *f*) la altura relativa, *g*) la longitud, y *h*) el tipo de resalto.

15-5. En un canal rectangular con $b = 20$ pies, $n = 0.03$ y $S_0 = 0.04$, la profundidad de flujo uniforme es 3 pies. En el extremo de aguas abajo del canal se construye una presa pequeña que mantiene una profundidad de 7 pies inmediatamente aguas arriba de ella. Si se supone que la superficie de remanso detrás de la presa es horizontal, encuentre la posibilidad de que se desarrolle un resalto hidráulico en el canal. Si éste ocurre, determine: *a*) el caudal por encima del vertedero de la presa, *b*) la altura del resalto, *c*) la pérdida de energía en el mismo, *d*) la eficiencia, y *e*) la distancia desde él hasta la presa.

15-6. Localice el resalto hidráulico en el ejemplo 15-1 si el canal tiene una salida en caída libre 500 pies aguas abajo de la *vena contracta*.

15-7. El agua que fluye por encima de un vertedero bajo y ancho pasa hacia una loza de concreto horizontal localizada 12 pies por debajo de la cresta del vertedero. La altura sobre ésta es 8 pies y la profundidad de salida es 10 pies. Determine la localización del resalto. Utilice la ecuación (14-9) con $C = 3.61$ para calcular el caudal y la ecuación (14-19) para calcular la profundidad de flujo a la salida del vertedero con un coeficiente de velocidad de 0.9 (es decir, la velocidad real es igual a $0.9V_1$).

15-8. Un canal rectangular ancho con $n = 0.025$ se localiza en un cambio de pendiente desde empinada $S_0 = 0.01$ hasta suave $S_0 = 0.002$. La profundidad de flujo uniforme en el canal de pendiente suave es 5 pies. Determine la localización del resalto hidráulico.

15-9. Resuelva el problema anterior si la pendiente empinada es 0.03.

15-10. Determine las profundidades inicial y secuente de un resalto hidráulico en un canal horizontal de 30 pies de ancho que conduce un caudal de 300 pies³/s. La pérdida de energía en el resalto es 5 pies. (*Sugerencia.* La solución requiere un procedimiento de ensayo y error como: primero suponga $\mathbf{F}_1$; luego calcule y_2/y_1 mediante la ecuación (3-21) y y_1 mediante la ecuación (3-24); por último verifique el valor de $\mathbf{F}_1$. También es posible utilizar una solución gráfica que utilice las curvas de energía específica y de fuerza específica).

15-11. La caída de canal (figura 15-24) que conduce 300 pies³/s es un canal rectangular con un ancho de 30 pies, pendiente de 1:5 y longitud suficiente. Se diseña para disipar una altura de 5 pies mediante un resalto hidráulico. Determine la posición de éste suponiendo una fricción insignificante en el canal e ignorando el efecto de la pendiente de canal sobre el resalto (*Sugerencia*: utilice el resultado obtenido en el problema anterior).

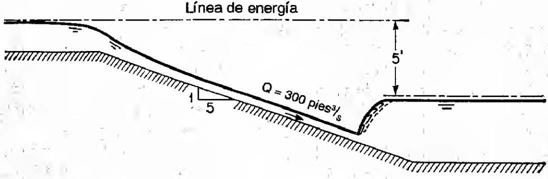


Figura 15-24. Una caída de canal.

15-12. Una caída de canal de 40 pies de longitud que conduce un caudal de 240 pies³/s se diseña para disipar una altura de 4 pies. El canal de la caída tiene una pendiente de 1:5 y diverge desde un ancho de 8 pies en el extremo de aguas arriba hasta 24 pies en el de aguas abajo. Determine la localización del resalto hidráulico suponiendo un canal sin fricción e ignorando el efecto de la pendiente en el resalto. (*Sugerencia*: divida el canal por ejemplo en 4 tramos y calcule E_1 y E_2 en cada sección para $\Delta E = 4$.

15-13. El agua que fluye por debajo de una compuerta deslizante descarga en un cuenco de disipación rectangular simple el cual tiene el mismo ancho de la compuerta. Después de la contracción del chorro el flujo tiene una velocidad promedio de 80 pies/s y una profundidad de 6 pies. Determine: *a*) la profundidad de salida secuente, *b*) la longitud del cuenco requerido para confinar el resalto, *c*) la efectividad del cuenco para disipar la energía (es decir, la eficiencia del resalto), y *d*) el tipo de resalto esperado.

15-14. Diseñe el cuenco disipador para el ejemplo 15-2 utilizando un control de resalto mediante: *a*) un vertedero de cresta delgada, *b*) uno de cresta ancha, y *c*) una elevación abrupta de fondo.

15-15. Diseñe el cuenco disipador para el ejemplo 15-2 utilizando un control de resalto del tipo caída abrupta.

15-16. Dimensione un cuenco disipador SAF para el ejemplo 15-2.

15-17. Construya la curva de calibración del resalto a la salida del vertedero diseñado en el ejemplo 14-1.

15-18. Analice el desarrollo de una estructura de disipación de energía a la salida del vertedero en consideración en el problema anterior, siempre y cuando la curva de calibración de nivel de salida pueda representarse mediante: *a*) $Q = 40y^2$, *b*) $Q = 100y^2$, *c*) $Q = 2y^3$ y *d*) $Q = 900y^{1.2}$.

15-19. Diseñe la estructura de disipación de energía, si se necesita, para las diferentes condiciones de nivel de aguas abajo dadas en el problema anterior.

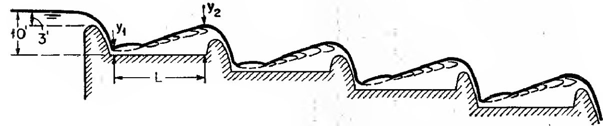


Figura 15-25. Una escalera de cascadas.

15-20. Poggi [81, 82] propuso una escalera de cascadas, como se muestra en la figura 15-25. Diseñe esta estructura para los datos dados. El perfil de la cresta del vertedero se supone que tiene la forma WES.

15-21. Deduzca una ecuación para la superficie superior de la napa libre sobre un vertedero de caída recta (*Sugerencia. Véase* sección 14-1 y tenga en cuenta que $h_v/H = 1/3$).

15-22. Se utiliza un vertedero de caída recta en una cuneta para llevar a cabo una caída de 6 pies en el nivel de ésta. La cuneta tiene 14 pies de ancho y conduce un flujo uniforme de 330 pies³/s. El vertedero tiene una longitud de cresta de 12.5 pies y toma una altura de 4 pies para el caudal dado. La profundidad normal del flujo en la cuneta de aguas abajo es 4 pies, pero en condiciones de inundación el efecto de remanso de una corriente aguas abajo puede elevar su nivel 1.5 pies por encima de la cresta del vertedero. Dimensione la estructura suponiendo cualquier tipo de cuenco disipador. La aproximación aguas arriba del vertedero está bien diseñada y la altura de velocidad en la cresta del vertedero puede ignorarse.

15-23. Resuelva el problema 15-13 si la pendiente del fondo del cuenco disipador es 0.10.

15-24. Resuelva el problema 15-11 si se considera el efecto de la pendiente del canal.

15-25. Diseñe el cuenco disipador para el ejemplo 15-2 sobre un canal de aproximación con una pendiente de 0.15.

15-26. En un flujo con una velocidad de 23.8 pies/s y una profundidad de 0.70 pies se produce un resalto hidráulico oblicuo causado por un muro vertical deflector que hace un ángulo de 15° con la dirección del flujo. Determine: *a*) el ángulo de onda, *b*) la profundidad secuente, y *c*) la pérdida de energía.

REFERENCIAS

1. Giorgio Bidone, "Observations sur le hauteur du ressaut hydraulique en 1818" ("Observations on the height of the hydraulic jump in 1818"), artículo presentado el 12 de diciembre de 1819, en la reunión de la Royal Academy of Science of Turin y después incorporado como una parte de [2], pp. 21-80.
2. Giorgio Bidone, "Expériences sur le remous et la propagation des ondes" ("Experiments on backwater and the propagation of waves"), *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. 25, Turin, 1820, pp. 21-112.
3. J. B. Bélanger, "Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes" ("Essay on the numerical solution of some problems relative to the steady flow of water"), Carilian-Goeury, Paris, 1828.
4. J. A. Ch. Bresse, *Cours de mécanique appliquée*, 2ª parte, "Hydraulique" (*Course in Applied Mechanics*, Parte 2, "Hydraulics"), Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
5. H. Darcy y H. Bazin, "Recherches expérimentales relatives aux remous et à la propagation des ondes" ("Experimental research on backwater and wave propagation"), en Vol. II de *Recherches hydrauliques* (*Hydraulic Researches*), Académie des Sciences, Paris, 1865.
6. Mansfield Merriman, *A Treatise on Hydraulics*, John Wiley & Sons, New York, y Chapman and Hall, London, 4ª ed., 1894; 10ª ed., 1916 *Véase* también R. Ferriday, "The hydraulic jump", *Engineering News-Record*, Vol. 34, Nº 2, julio 11 de 1895, p. 28.
7. A. H. Gibson, "The formation of standing waves in an open stream", artículo 4081, *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 197, Parte III, London, 1913-1914, pp. 233-242.
8. K. R. Kennison, "The hydraulic jump in open channel flow at high velocities", *Transactions*, Vol. 80, *American Society of Civil Engineers*, 1916, pp. 338-353.
9. Sherman M. Woodward, "Theory of the hydraulic jump and backwater curves"; y Ross M. Riegel y John C. Beebe, "The hydraulic jump as a means of dissipating energy", *Miami Conservancy District, Technical Report*, Parte III, Dayton, Ohio, 1917, pp. 63-118.
10. A. Koch y M. Carstanjen, *Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften* ("On flow of water and the associated forces"), Springer-Verlag, Berlin, 1926.
11. E. G. W. Lindquist, "Anordningar för effektiv energieomvandling vid foten av överfallsdammar" ("Arrangements for effective energy dissipation at the toes of dams"), *Anniversary Volume*, Royal Technical University, Stockholm, Sweden, 1927.
12. Kurt Safranez, "Wechselsprung und die Energievernichtung des Wassers" ("Hydraulic jump and energy dissipation of water"), *Der Bauingenieur*, Vol. 8, Nº 49, Berlin, 1927, pp. 898-905; Nº 50, p. 926.
13. J. Einwachter, "Berechnung der in der Wehrbreite gemessenen Längenausdehnung von Deckwalzen" ("Computation of expansion of rollers with respect to width of weir") *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 27, Nº 14, Munich, 1932; pp. 157-159, y Nº 21, pp. 245-249, Vol. 28, Nº 17, 1933, pp. 200-202.
14. J. Einwachter, "Wassersprung- und Deckwalzenlänge" ("The length of the hydraulic jump and of the surface roller"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 30, Nº 8, Munich, abril 17 de 1935, pp. 85-88.
15. J. Smetana, *Experimentální studie vodního skoku* (*Experimental study of hydraulic jump*), 1933, č. 2-143; y *Experimentální studie vodního skoku vzdutého* (*Experimental study of drowned hydraulic jump*), Zprávy Veřejné Služby Technické, Czechoslovakia, 1934.
16. J. Smetana, "Modern types of movable dams: greatest dimensions attained in each type. Principles of design of the fixed and movable parts of these dams and principles to be followed in their working, in order to reduce undermining to a minimum", artículo 51, *16th. International Congress of Navigation*, Parte III, Brussels, 1935.
17. Boris A. Bakhmeteff y Arthur E. Matzke, "The hydraulic jump in terms of dynamic similarity", *Transactions*, Vol. 101, *American Society of Civil Engineers*, 1936, pp. 630-647.

18. L. Escande, "Étude théorique et expérimentale de l'écoulement par vanne de fond" ("Theoretical and experimental study of flow through sluice gates"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 4, Nº 19, Paris, 1938, pp. 25-29, Nº 20, pp. 72-79 y Nº 21, pp. 120-128; Vol. 5, Nº 25, 1939, pp. 21-34, Nº 26, pp. 65-77 y Nº 28, pp. 131-139.
19. D. Citrini, "Il salto di Bidone" ("The hydraulic jump"), *L'Energia elettrica*, Vol. 16, Nº 6, Milano, junio de 1939, pp. 441-465, Nº 7, julio de 1939, pp. 517-527. Contiene un resumen del trabajo hecho en 1939.
20. Guido Nebbia, "Sui dissipatori a salto di Bidone: ricerca sperimentale" ("On dissipation by hydraulic jump: experimental researches"), *L'Energia elettrica*, Vol. 17, Nº 6, Milano, junio de 1940, pp. 325-356.
21. Carl E. Kindsvater, "The hydraulic jump in sloping channels", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1107-1120.
22. Fred W. Blaisdell, "Development and hydraulic design, Saint Anthony Falls stilling basin", *Transactions*, Vol. 113, *American Society of Civil Engineers*, 1948, pp. 483-520.
23. John W. Forster y Raymond A. Skrinde, "Control of the hydraulic jump by sills", *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 973-987.
24. Hunter Rouse, T. T. Siao, y S. Nagaratnam, "Turbulence characteristics of the hydraulic jump", artículo 1528, *Proceedings, Journal*, Vol. 84, Nº HY1, Parte 1, *American Society of Civil Engineers, Hydraulics Division*, febrero de 1958, pp. 1-30.
25. "The standing wave or hydraulic jump", *Government of India Central Board of Irrigation and Power, Publication 7*, 2ª ed., Simla, India, agosto 15 de 1950.
26. J. O. De Mello Flôres, "Le ressaut" ("The hydraulic jump"), *La Houille blanche*, año 9, Nº 6, Grenoble, diciembre de 1954, pp. 811-822.
27. Boris A. Bakhmeteff, *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1932.
28. A. G. Levy y J. W. Ellms, "The hydraulic jump as a mixing device", *Journal*, Nº 1, *American Waterworks Association*, enero de 1927, pp. 1-23.
29. A. A. Kalinske y James M. Robertson, "Closed conduit flow", en el simposio "Entrainment of air in flowing water", *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 1435-1447.
30. G. H. Hickox, "Graphical solution for hydraulic jump", *Civil Engineering*, Vol. 4, Nº 5, mayo de 1934, p. 270.
31. C. J. Posey y P. S. Hsing, "Hydraulic jump in trapezoidal channels", *Engineering News-Record*, Vol. 121, Nº 25, diciembre 22 de 1938, pp. 797-798.
32. E. W. Lane y C. E. Kindsvater, "Hydraulic jump in enclosed conduits", *Engineering News-Record*, Vol. 121, Nº 26, diciembre 29 de 1938, pp. 815-817.
33. J. C. Stevens, "The hydraulic jump in standard conduits", *Civil Engineering*, Vol. 3, Nº 10, octubre de 1933, pp. 565-567.
34. "Research studies on stilling basins, energy dissipators, and associated appurtenances", *U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-399*, junio 1 de 1955.
35. J. N. Bradley y A. J. Peterka, "The Hydraulic design of stilling basins: hydraulic jumps on a horizontal apron (Basin I)", artículo 1401, "High dams, earth dams, and large canal structures (Basin II)", artículo 1402, "Short stilling basins for canal structures, small outlet works, and small spillways (Basin III)", artículo 1403, "Stilling basin and wave suppressors for canal structures, outlet works, and diversion dams (Basin IV)", artículo 1404, "Stilling basin with sloping apron (Basin V)", artículo 1405, "Small basins for pipe or open channel outlets, no tailwater required (Basin VI)", artículo 1406, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY5, *American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, octubre de 1957, pp. 1-24, 1-14, 1-22, 1-20, 1-32 y 1-17.
36. Kurt Safranez, "Untersuchungen über den Weehselsprung" ("Researches relating to the hydraulic jump"), *Der Bauingenieur*, Vol. 10, Nº 37, Berlin, 1929, pp. 649-651. "A brief summary is given in Donald P. Barnes: Length of hydraulic jump investigated at Berlin", *Civil Engineering*, Vol. 4, Nº 5, mayo de 1934, pp. 262-263.

37. Kurt Safranez, "Länge des Wassersprunges" ("Length of hydraulic jump"), *Wasserkraft und Wasserwirschaft*, Vol. 28, Nº 24, Munich, 1933, pp. 277-282.
38. K. Wóycicki, "Wassersprung: Deckwalze und Ausfluss unter einer Schütze" ("The hydraulic jump: its top roll and discharge through a sluice gate"), Warsaw, 1931.
39. V. I. Aravin, "Opredelenie dliny gidravlicheskogo pryzhka" ("The determination of the length of the hydraulic jump"), *Izvestiia V sesoiuznogo Nauchno*, Issledovatelskogo Instituta Gidrotekhniki (*Transactions*, All-Union Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering), Vol. 15, Leningrad, 1935, pp. 48-57.
40. W. L. Moore, "Energy loss at the base of a free overfall", *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 1343-1360.
41. I. I. Agroskin, G. T. Dmitriev y F. I. Pikalov, *Gidravlika* (*Hydraulics*), Gosenergoizdat, Moscow y Leningrad, 1954, p. 337.
42. Julius Weisbach, *Die Experimentalhydraulik* (*Experimental Hydraulics*), Freiberg, 1855, p. 52.
43. Serge Leliavsky, *Irrigation and Hydraulic Design*, Vol. I, Chapman & Hall, Ltd., London, 1955.
44. J. B. Tiffany, "Laboratory research applied to the hydraulic design of large dams", *U.S. Waterways Experiment Station, Bulletin 32*, 1948.
45. M. B. McPherson y M. H. Karr, "A study of bucket-type energy dissipator characteristics", artículo 1266, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY3, *American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, junio de 1957, pp. 1-12 y correcciones, artículo 1348, Nº HY4, agosto de 1957, pp. 57-64.
46. Ralph M. Weaver, "Discussion on Control of the hydraulic jump by sills", por John W. Forster y Raymond A. Skrinde, *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 1003-1006.
47. En-Yun Hsu, "Discussion on Control of the hydraulic jump by sills", por John W. Forster y Raymond A. Skrinde, *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 988-991.
48. Walter L. Moore y Carl W. Morgan, "The hydraulic jump at an abrupt drop", artículo 1449, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY6, Parte 1, *American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, diciembre de 1957, pp. 1-21.
49. William P. Creager, Joel D. Justin, y Julian Hinds, *Engineering for Dams*, Vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1945, pp. 73-89.
50. Calvin Victor Davis (editor en jefe), *Handbook of Applied Hydraulics*, 2ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952, pp. 281-288 y 813-846.
51. "Civil and structural design", Vol. 1, en "Design of TVA Projects", *Tennessee Valley Authority, Technical Report 24*, 1952, pp. 41-60.
52. Armin Schoklitsch, *Hydraulic Structures*, Vol. 2, traducido del alemán por Samuel Shulits, *American Society of Mechanical Engineers*, New York, 1937, pp. 913-926.
53. Armin Schoklitsch, *Handbuch des Wasserbaues* (*Handbook of Hydraulic Engineering*), Vol. 2, Springer-Verlag, Vienna, 1952, pp. 816-825.
54. C. Maxwell Stanley, "Study of stilling-basin design", *Transactions*, Vol. 99, *American Society of Civil Engineers*, 1934, pp. 490-523.
55. Jacob E. Warnock, "Spillways and energy dissipators", *Proceedings of Hydraulics Conference*, University of Iowa, 1940, pp. 142-159.
56. John R. Freeman (editor), *Hydraulic Laboratory Practice*, *American Society of Mechanical Engineers*, New York, 1929.
57. Ahmed Shukry, "The efficacy of floor sills under drowned hydraulic jumps", artículo 1260, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY3, *American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, junio de 1957, pp. 1-18.
58. L. Escande, "L'Étude sur modèle réduit des ouvrages de rupture de charge" ("The study of energy dissipators with the aid of a small-scale model"), *Le Génie civil*, Vol. 115, Nº 25, diciembre 16 de 1939, pp. 429-433.
59. R. H. Berryhill, "Stilling basin experiences of the Corps of Engineers", artículo 1264, *Proceedings, Journal*, Vol. 83, Nº HY3, *American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, junio de 1957, pp. 1-36.

60. B. S. Talwani y S. T. Ghotankar, "Design of canal falls", *Irrigation and Power, Journal of the Central Board of Irrigation and Power*, Vol. 9, Nº 2, Simla, India, abril de 1952, pp. 269-293.
61. K. R. Sharma, *Irrigation Engineering*, Rama Krishna, Lahore, Punjab, India, 1944, pp. 245-285.
62. A. M. R. Montagu *et al.*, "Irrigation canal falls", *Central Board of Irrigation, Publication 10*, Simla, India, 1935.
63. Ivan E. Houk, *Irrigation Engineering*, Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.
64. Fred W. Blaisdell, "The SAF stilling basin", *U.S. Soil Conservation Service, Report SCS-TP-79*, mayo de 1949.
65. Boris A. Bakhmeteff y N. V. Feodoroff, "Discussion on Energy loss at the base of free overfall", por Walter L. Moore, *Transactions*, Vol. 108, *American Society of Civil Engineers*, 1943, pp. 1364-1373.
66. Walter Rand, "Flow geometry at straight drop spillways", artículo 791, *Proceedings*, Vol. 81, American Society of Civil Engineers, septiembre de 1955, pp. 1-13.
67. Charles A. Donnelly, "Design of an outlet for box inlet drop spillways", *U.S. Soil Conservation Service, Report SCS-TP-63*, noviembre de 1947.
68. Fred W. Blaisdell y Charles A. Donnelly, "Capacity of box inlet drop spillways under free and submerged flow conditions", *St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Technical Paper 7*, University of Minnesota, enero de 1951.
69. Fred W. Blaisdell y Charles A. Donnelly, "Hydraulic design of the box inlet drop spillway", *St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Technical Paper 8*, University of Minnesota, enero de 1951; también *U.S. Soil Conservation Service, Report SCS-TP 106*, julio de 1951.
70. Charles A. Donnelly y Fred W. Blaisdell, "Straight drop spillway stilling basin", *St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Technical Paper 15, Ser. B*, University of Minnesota, noviembre de 1954.
71. Fred W. Blaisdell y Charles A. Donnelly, "The box inlet drop spillway and its outlet", *Transactions*, Vol. 121, *American Society of Civil Engineers*, 1956, pp. 955-986.
72. R. W. Ellms, "Computation of tail-water depth of the hydraulic jump in sloping flumes", artículo Hyd. 50-5, *Transactions*, Vol. 50, Nº 36, American Society of Mechanical Engineers, septiembre-diciembre, 1928, pp. 1-6.
73. R. W. Ellms, "Hydraulic jump in sloping and horizontal flumes", artículo Hyd. 54-6, *Transactions*, Vol. 54, Nº 22, *American Society of Mechanical Engineers*, noviembre 30 de 1932, pp. 113-119.
74. B. A. Bakhmeteff y A. E. Matzke, "The hydraulic jump in sloped channels", artículo Hyd. 60-1, *Transactions*, Vol. 60, Nº 2, *American Society of Mechanical Engineers*, febrero de 1938, pp. 111-118.
75. Carl E. Kindsvater, "The hydraulic jump in sloping channels", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1107-1120.
76. J. C. Stevens, "The hydraulic jump in sloping channels", por Carl E. Kindsvater, *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1125-1135.
77. G. H. Hickox, "The hydraulic jump in sloping channels", por Carl E. Kindsvater, *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 1141-1146.
78. Arthur T. Ippen, "Mechanics of supercritical flow", primer artículo del simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 268-295.
79. Arthur T. Ippen y Donald R. F. Harleman, "Verification of theory for oblique standing waves", *Transactions*, Vol. 121, *American Society of Civil Engineers*, 1956, pp. 678-694.
80. Hunter Rouse, *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1938.
81. Bruno Poggi, "Sopra gli scaricatori a scala di stramazzi" ("On the flow in a ladder of cascades"), *L'Energia elettrica*, Vol. 26, Nº 10, Milano, octubre de 1949, pp. 600-604.
82. Bruno Poggi, "Lo scaricatori a scala di stramazzi" ("Flow in a ladder of cascades"), *L'Energia elettrica*, Vol. 33, Nº 1, Milano, enero de 1956, pp. 33-40. Este artículo describe las pruebas de laboratorio.

CAPÍTULO **16**

FLUJO EN CANALES CON ALINEAMIENTO NO LINEAL

16-1. Naturaleza del flujo. La presencia de curvas o codos en el alineamiento es inevitable en el diseño de canales abiertos. Con frecuencia surgen dificultades en el diseño debido a la complejidad del flujo a lo largo de una trayectoria curva. Las líneas de corriente de flujo no sólo son curvilíneas sino que también se entrecruzan, generando corrientes espirales y ondas cruzadas. Además la fuerza centrífuga que actúa sobre el flujo a lo largo de una curva produce un aspecto único conocido como *sobreelevación*, es decir, una elevación en la superficie de agua en la banca exterior acompañada con una disminución en la banca interna. También, la distribución de velocidades en las secciones del canal en la curva es muy irregular y los coeficientes α y β a menudo son bastante mayores que la unidad.

En canales de alineamiento no lineal el flujo se comporta de manera diferente según el estado de flujo. En general el flujo subcrítico muestra una superficie de agua suave y una ligera sobreelevación, en tanto que el flujo supercrítico muestra patrones característicos con perturbaciones de ondas cruzadas en la superficie y por consiguiente exagera la sobreelevación.

En el estudio del flujo subcrítico las corrientes espirales son de interés primordial, y son escencialmente un fenómeno de fricción; por consiguiente, su análisis requiere el uso del número de Reynolds como parámetro.

En el estudio del flujo supercrítico la formación de ondas transversales es de interés primordial, y representan el efecto gravitacional de la superficie libre sobre el flujo; por consiguiente, su análisis se basará en el uso del número de Froude como parámetro básico.

16-2. Flujo en espiral. Este *flujo* se refiere al movimiento de partículas de agua a lo largo de una trayectoria helicoidal en la dirección general del flujo. Luego, en adición a la componente de velocidad principal perpendicular a la sección transversal del canal, existen componentes transversales de velocidad, que crearán el llamado *flujo secundario* en el plano de la sección transversal.

El flujo en espiral en canales curvos lo describió por primera vez Thompson [1] en 1876. Desde entonces se han hecho muchos estudios [2-7]. Se cree que este fenómeno se debe principalmente a: 1) fricción en las paredes del canal, la cual causa velocidades mayores de los filamentos cerca del centro del canal que cerca de las paredes; 2) la fuerza centrífuga, la cual deflecta las partículas de agua desde un movimiento en línea recta; y 3) una distribución vertical de velocidades, que existe en el canal de aproximación y por consiguiente inicia un movimiento en espiral en el flujo. La fuerza centrífuga también es responsable de la sobreelación en la superficie de flujo.

Por lo general, se sabe que hacia aguas abajo un canal curvo hacia la derecha causa un movimiento espiral en sentido contrario al de las agujas del reloj, en tanto que un canal curvo hacia la izquierda causa una espiral en el sentido de las agujas del reloj. Si a la curva sigue una tangente larga, el flujo en espiral desarrollado en la curva persistirá a lo largo de cierta distancia hacia aguas abajo.

El patrón real de un flujo espiral es complicado y tridimensional, y para registrarlo es conveniente utilizar un instrumento especial diseñado para medir directamente las componentes de velocidad en diferentes planos coordenados, como la esfera de Pitot, diseñada por Shukry [2][1].

El flujo en espiral existe en canales rectos (sección 2-4) al igual que en canales curvos. Sin embargo, en éstos el flujo en espiral inducido por la fuerza centrífuga es muy pronunciado e irregular a lo largo de la curva. Este patrón complicado de flujo le causa la interferencia del flujo espiral originado en el tramo de aproximación recto con el generado en la curva. Las corrientes laterales más fuertes a menudo aparecen cerca de la pared de afuera en la sección media de la curva, donde éstas tienen una dirección general hacia el lado exterior de la curva. Su dirección y su posición cambian gradualmente a lo largo de la segunda mitad de la curva hasta que se alcanza la salida, donde se aproximan a la pared interna con una inclinación hacia arriba.

Para delinear la magnitud y el efecto del flujo espiral en diferentes curvas en varias condiciones de flujo, Shukry [2] utilizó un término conocido como *potencia de un flujo espiral*, el cual se define como la relación porcentual entre la energía cinética media del movimiento lateral y la energía cinética total de flujo en una sección transversal determinada. Nótese que la energía cinética del flujo depende del cuadrado de la velocidad. Con referencia a la sección transversal del canal representada por el plano xy en la figura 2-6, la potencia del flujo espiral es

$$S_{xy} = \frac{V_{xy}{}^2}{V^2} \times 100 \tag{16-1}$$

[1] La esfera de Pitot, diseñada por Shukry, tiene cinco tubos de latón colocados en el interior de otro tubo. Cada uno tiene una pequeña válvula de latón en el extremo superior para permitir la conexión con un tubo de caucho hasta un manómetro de presión. El extremo interior del tubo se curva dentro de una esfera y termina en cierto agujero en la superficie de ésta, la cual contiene cinco agujeros, con aberturas estratégicamente localizadas sobre la superficie de la esfera de tal manera que, al rotarla y calibrarla, pueden determinarse la dirección y la magnitud de un vector de velocidad de flujo.

donde V_{xy} es el vector de velocidad media proyectado en el plano xy y V es la velocidad media en la sección. Luego, para un flujo con todas sus líneas corrientes paralelas al del canal, $S_{xy} = 0$.

A partir de los resultados experimentales obtenidos por Shukry para flujo subcrítico a lo largo de una curva en una canaleta rectangular de acero, se nota lo siguiente:

1. S_{xy} es comparativamente alto para un **R** bajo en el flujo de aproximación, pero disminuye de manera considerable al aumentar **R**.

2. S_{xy} disminuye de manera gradual con el aumento en la relación radio-ancho r_c/b y obtiene su magnitud mínima (es decir, el efecto de la curva se aproxima a su menor cantidad) en $r_c/b = 3.0$.

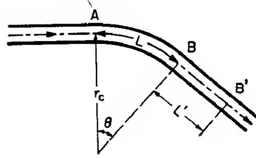
3. S_{xy} disminuye a medida que la relación profundidad-ancho y/b aumenta.

4. S_{xy} aumenta a medida que el ángulo de desviación θ de la curva se hace más grande. Para el rango de $\theta/180°$ desde 0.0 (canal recto) hasta 0.5, el incremento en S_{xy} es casi el doble que para el rango de 0.5 hasta 1.0.

5. La energía cinética de las corrientes laterales en una curva es relativamente pequeña comparada con la energía en las corrientes longitudinales y, en consecuencia sólo juega un papel menor en la pérdida de energía debida a la resistencia en la curva.

El flujo espiral ocurre tanto en ríos naturales como en canales artificiales [5]. Sin embargo, puede no existir en un canal curvo si la potencia del flujo espiral es tan débil que su efecto es prácticamente eliminado por la fricción del canal. Este es el caso de muchos ríos naturales donde la relación profundidad-ancho es pequeña (luego S_{xy} es pequeño) y donde las fuerzas que tienden a producir flujo en espiral son sobrepasadas por las fuerzas complicadas resultantes de la rugosidad del lecho y de las bancas [6, 7].

16-3. Pérdida de energía. Según Müller [8], la línea de energía y el perfil de flujo en un canal curvo uniforme pueden mostrarse como en la figura (16-1). El caso 1 ilustra el flujo *subcrítico* en una curva entre dos canales tangentes. Sin la curva el flujo ocurriría con una profundidad normal y_n correspondiente al caudal particular. Con ella la línea de energía en el punto de inicio A de la curva se sube una cantidad h_f. La mayor parte de esta energía se disipa a lo largo de la longitud de la curva. La parte remanente se mueve a una distancia L' en el canal de aguas abajo BB', la cual se requiere para que el flujo regrese a normal. La pendiente de la línea de energía entre A y B' es mayor que la de fondo S_0 y la línea de energía se encuentra con la de flujo normal en B'. Para levantar esta línea en el punto A por encima de la normal, el agua debe remansarse en el canal localizado aguas arriba de A. A partir de la curva de energía específica para el flujo en el canal, puede demostrarse que el aumento de h_f en la línea de energía requiere un aumento correspondiente en la superficie del agua igual a una cantidad Δy que es mayor que h_f. Este aumento indica que la presencia de una curva en un canal con flujo subcrítico tiene un efecto de remanso similar al de un vertedero o una presa. Para el cálculo del perfil de remanso el punto inicial debe fijarse en A con una profundidad igual a $y_n + \Delta y$. Este perfil es del tipo $M1$, el cual se extiende aguas arriba desde A y es asintótico a la línea de profundidad normal.



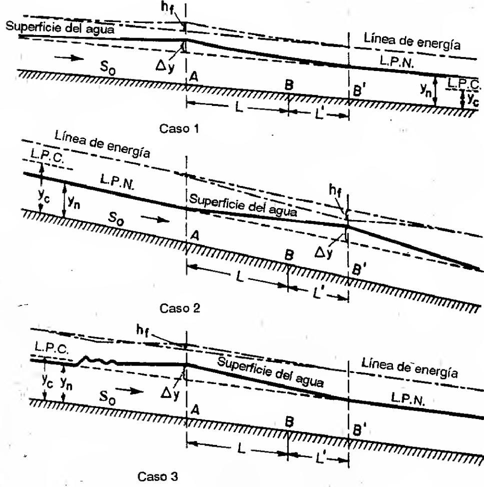


Figura 16-1. Línea de energía y perfil de flujo a lo largo de una curva.

El caso 2 ilustra el flujo *supercrítico* en un canal curvo. Nótese que la línea de energía cae en una cantidad h_f en B', correspondiente a la cantidad de energía disipada en la curva y en el canal de aguas abajo BB'. El nivel de la superficie del agua se aumenta desde la profundidad normal, empezando en A, incrementándose hasta Δy en B' y retornando después al nivel normal. Si la superficie del agua sube por encima de la línea de profundidad crítica se producirá un resalto hidráulico.

El caso 3 ilustra el flujo *supercrítico* cuando la profundidad normal está ligeramente por debajo de la crítica. La superficie ondulatoria en el canal de aguas arriba se debe al hecho de que la superficie del agua asciende por encima de la profundidad crítica, de tal manera que se produce un resalto ondulatorio.

La pérdida de energía total debida a la resistencia en la curva puede expresarse en términos de la altura de velocidad como

$$h_f = f_c \frac{V^2}{2g} \tag{16-2}$$

donde V es la velocidad media en la sección y f_c es el coeficiente de resistencia de la curva. El coeficiente f_c varía considerablemente con cada uno de los parámetros **R** del flujo de aproximación, r_c/b, y/b y $\theta/180°$. En la figura 16-2 se muestra una familia de curvas de estos parámetros basada en los experimentos hechos por Shukry [2] (*véanse* [9] y [10] para otros estudios). Las curvas pueden utilizarse para determinar de manera aproximada el valor de f_c en canales lisos curvos. Para un caso dado, f_c se obtiene primero fijando su valor con respecto a dos variables y luego ajustándolo con respecto a la tercera y cuarta variables.

Ejemplo 16-1. Dados $\mathbf{R} = 55{,}500$, $r_c/b = 1.30$, $y/b = 0.8$ y $\theta/180° = 0.556$. Determine f_c.

Solución. Primero, al mantener $y/b = 1.00$ y $\theta/180° = 0.50$, para $\mathbf{R} = 55{,}500$ y $r_c/b = 1.30$, $f_c = 0.200$ (figura 16-2c). Luego, al mantener $r_c/b = 1.00$ y $\theta/180° = 0.50$, para $\mathbf{R} = 55{,}500$ y $y/b = 1.00$, $f_c = 0.230$, y para $\mathbf{R} = 55{,}500$ y $y/b = 0.80$, $f_c = 0.275$ (figura 16-2*b*). Al ajustar la condición de $y/b = 1.00$ hasta la de $y/b = 0.80$, el coeficiente corregido es igual a $= 0.200 \times 0.275/0.230 = 0.239$. Ahora al mantener $y/b = 1.00$ y $r_c/b = 1.00$, para $\mathbf{R} = 55{,}500$ y $\theta/180° = 0.556$, $f_c = 0.245$ (figura 16-2*a*). De manera similar, al ajustar la condición de $\theta/180° = 0.50$ a la de $\theta/180° = 0.556$, el coeficiente corregido final es igual a $0.239 \times 0.245/0.230 = 0.255$, es decir, 0.26.

El procedimiento de interpolación anterior se muestra en la tabla 16-1.

Tabla 16-1. Determinación del coeficiente de resistencia de la curva mediante interpolación.

Paso	y/b	$\theta/180°$	R	r_c/b	f_c	Anotaciones
(1)	1.00	0.50	55,500	1.30	0.200	A partir de la figura 16-2*c*
(2)	1.00	0.50	55,500	1.00	0.230	A partir de la figura 16-2*b*
(3)	0.80	0.50	55,500	1.00	0.275	A partir de la figura 16-2*b*
(4)	0.80	0.50	55,500	1.30	0.239	Por interpolación: (1)[(3)/(2)]
(5)	1.00	0.556	55,500	1.00	0.245	A partir de la figura 16-2*a*
(6)	0.80	0.556	55,500	1.30	0.255	Por interpolación: (4)[(5)/(2)]

16-4. Sobreelevación. Los estudios acerca de la sobreelevación en la superficie del agua a lo largo de un canal curvo son muchos [11-14]. A partir de los resultados experimentales obtenidos por Shukry (figura 16-3) puede verse que la trayectoria de la línea de máxima velocidad en un canal curvo se desvía desde su curso normal en una sección aguas arriba de la curva. En el punto d, la trayectoria casi toca la pared interna del canal y la superficie del agua alcanza su nivel mínimo. Después del punto d, la trayectoria se mueve gradualmente hacia afuera hasta que cruza la línea central en la sección que pasa por el punto de separación s. Para diferentes curvas en diferentes condiciones de flujo, el punto d de máxima depresión superficial y el punto de separación s se localizaron como se muestra en la tabla 16-2. Las posiciones de los dos puntos están dadas en términos de la relación de sus ángulos θ_d y θ_s, medidos desde la entrada de la curva, con respecto al ángulo total θ de la curva. Estas posiciones sólo se afectan levemente variar el parámetro y/b. Luego, para propósitos prácticos, la tabla 16-2, que da los valores de posición para $y/b = 1.00$, puede aplicarse para otros valores de y/b.

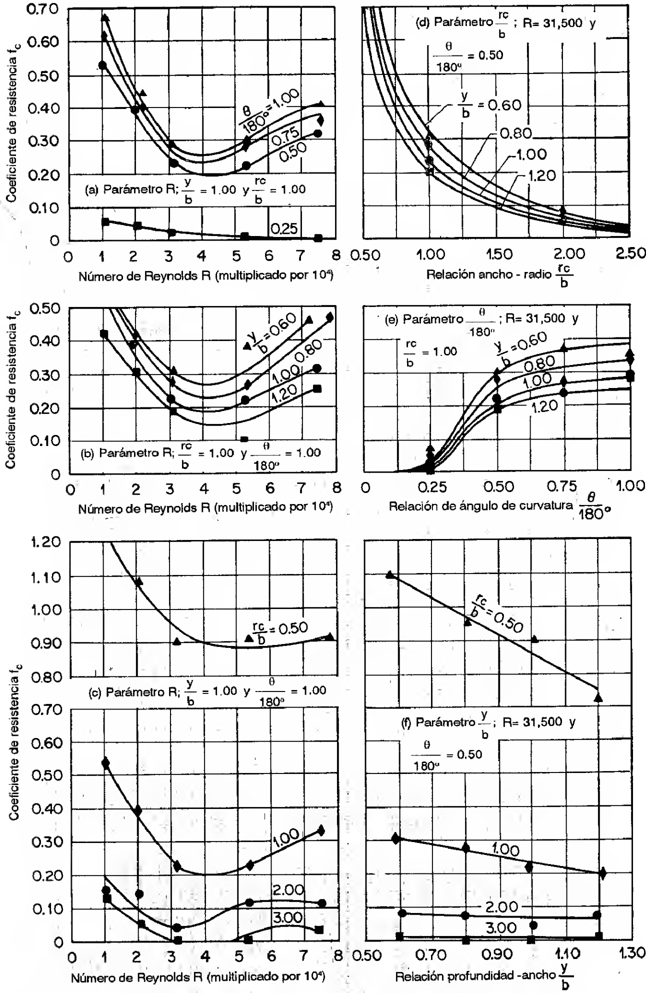


Figura 16-2. Funciones paramétricas experimentales del coeficiente de resistencia por curva (*según A. Shukry* [2]).

Si se utiliza la tabla con propósitos de interpolacíon, el procedimiento es similar a aquél para los valores de f_c (ejemplo 16-1).

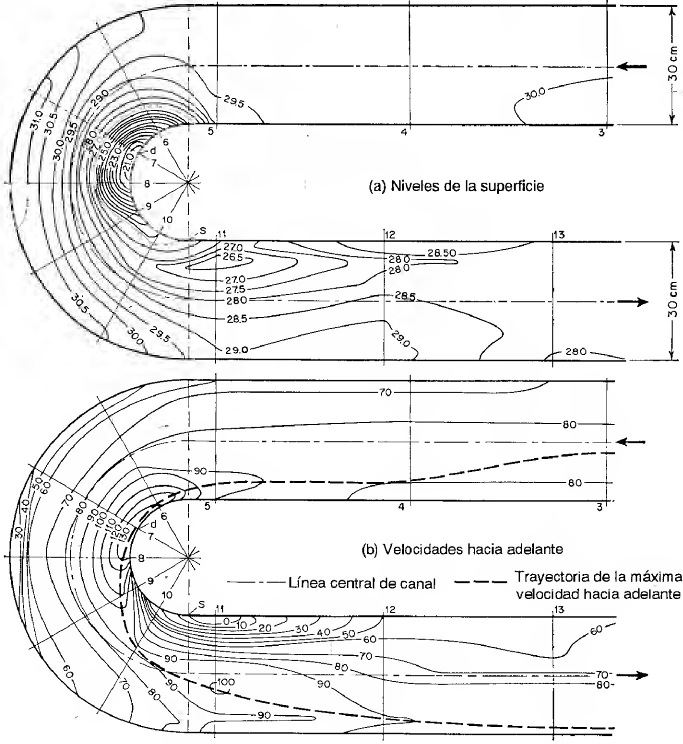


Figura 16-3. Líneas de contorno para niveles superficiales iguales y para velocidades hacia adelante en el flujo a lo largo de una curva de 180° (*según A. Shukry* [2]). Los niveles superficiales están medidos en cm (= 0.3937 pulg) y las velocidades en cm/s (= 0.03281 pies/s). r_c/b = 1.00; y_A/b = 1.00; y, con V_A = 77.8 cm/s (= 2.55 pies/s), $\mathbf{R}_A$ = 73,500, donde el subíndice A se refiere a las condiciones en la sección de entrada-aproximación de la curva.

La distribución de velocidades hacia adelante y el perfil de la superficie del agua en la sección de máxima depresión superficial pueden estimarse suponiendo una distribución de velocidades teórica del tipo de vórtice libre. Esta suposición es cierta si el flujo es *subcrítico*.

Tabla 16-2. Localización de los puntos de máxima depresión superficial (punto d en la figura 16-3) y puntos de separación (punto s en la figura 16-3) para parámetros variables, excepto que y/b = 100*

Parámetro	**R** = 10,500		**R** = 21,000		**R** = 31,500		**R** = 52,500		**R** = 73,500	
	θ_d/θ	θ_s/θ	θ_d/θ	θ_s/θ	θ_d/θ	θ_s/θ	θ_d/θ	θ_s/θ	θ_d/θ	θ_s/θ
r_c/b	(A) $\theta/180°$ = 0.50, una constante									
0.500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.00	0.111	0.250	0.189	0.500	0.250	0.611	0.306	0.889	0.667	1.000
2.00	0.033	†	0.067	†	0.100	†	0.133	†	0.333	†
3.00	0.000	†	0.000	†	0.044	†	0.056	†	0.167	†
$\theta/180°$	(B) r_c/b = 1.00, una constante									
0.25	0.111	0.222	0.333	0.667	0.333	0.667	0.400	0.710	0.556	0.889
0.50	0.111	0.250	0.189	0.500	0.250	0.611	0.306	0.889	0.667	1.000
0.75	0.148	0.333	0.185	0.445	0.296	0.556	0.371	0.926	0.445	1.000
1.00	0.056	0.778	0.111	0.778	0.167	0.805	0.278	0.833	0.333	1.000

* Según A. Shukry [2]
† Sin separación

Mediante la ley del movimiento de vórtice libre[2], puede escribirse la siguiente expresión:

$$v_z = \frac{C}{r} \tag{16-3}$$

donde v_z es la velocidad de un filamento hacia adelante en la curva a una distancia radial r desde el centro de curvatura, y C es la *constante de circulación* en un movimiento de vórtice libre.

Sea E la energía específica en cualquier sección y y la profundidad de flujo a una distancia r desde el centro de curvatura; luego

$$y = E - \frac{v_z^2}{2g} \tag{16-4}$$

La velocidad promedio hacia adelante es

$$V_z = \frac{\int_{r_i}^{r_o} (C/r)\,dr}{r_o - r_i} = \frac{C}{r_o - r_i} \ln \frac{r_o}{r_i} \tag{16-5}$$

[2] Para un análisis matemático elaborado mediante la ley de movimiento de un vórtice libre *véase*[12].

y la profundidad de flujo promedio es

$$y_m = \frac{\int_{r_i}^{r_o} y\,dr}{r_o - r_i} = \frac{\int_{r_i}^{r_o} (E - C^2/2gr^2)\,dr}{r_o - r_i} = E - \frac{C^2}{2gr_or_i} \tag{16-6}$$

En las ecuaciones anteriores r_o y r_i son, respectivamente, los radios externo e interno de la curva. Ahora, el caudal es

$$Q = V_z y_m (r_o - r_i) = C\left(E - \frac{C^2}{2gr_or_i}\right) \ln \frac{r_o}{r_i} \tag{16-7}$$

Si Q, r_o, r_i y E son conocidos, puede determinarse la constante C en la ecuación (16-7). La velocidad y la profundidad en cualquier radio r se obtienen luego de las ecuaciones (16-3) y (16-4). Por consiguiente, puede demostrarse que la sobreelevación Δh de la superficie del agua es

$$\Delta h = \frac{C^2}{2gr_o^2r_i^2}(r_o^2 - r_i^2) \tag{16-8}$$

Para la aplicación práctica de las ecuaciones anteriores, primero se determina la posición del punto d con la ayuda de la tabla 16-2. La energía específica puede calcularse en cualquier sector A en el canal de aproximación mediante

$$E_A = y_A + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} \tag{16-9}$$

donde α_A es el coeficiente de energía y V_A es la velocidad media hacia adelante. La energía específica en la sección radial que pasa por el punto d es

$$E = E_A - LS_f - 0.4h_f \tag{16-10}$$

donde L es la longitud del canal entre la sección A y la que contiene el punto d; S_f es la pendiente de fricción, la cual puede determinarse experimentalmente o mediante la ecuación de Manning; y h_f es la pérdida de energía debida a la resistencia de la curva, y puede determinarse como se mostró en el ejemplo 16-1. El coeficiente 0.4 es constante para cualquier curva.

El método anterior es razonablemente acertado siempre que el ángulo de la curva sea mayor que 90°. Para ángulos menores, Shukry supuso que C varía linealmente con θ desde rV_{zs} en $\theta = 0$ hasta su valor total en $\theta = 90°$. Por consiguiente, para cualquier ángulo θ menor que 90°, la constante de circulación puede multiplicarse por un factor de corrección igual a

$$\frac{\theta}{90°} + \left(1 - \frac{\theta}{90°}\right)\left(\frac{rV_{zs}}{C}\right)$$

donde V_{zs} es la velocidad media hacia adelante en un canal recto.

La sobreelevación en canales curvos también puede determinarse mediante ecuaciones menos exactas pero más simples, las cuales se basan en la aplicación de la segunda ley del movimiento, de Newton, a la acción centrífuga en la curva. Al suponer que todas las velocidades de los filamentos en la curva son iguales a la velocidad media V_z y que todas las líneas de corriente tienen un radio de curvatura r_c, puede demostrarse que la superficie transversal del agua debe ser una línea recta, y puede obtenerse una ecuación simple para la sobreelevación:

$$\Delta h = \frac{V_z^2 b}{g r_c} \qquad (16\text{-}11)$$

donde b es el ancho del canal.

Al aplicar la segunda ley de Newton a cada línea de corriente y luego integrar a través de toda la sección del canal, Grashof [13] pudo demostrar que el perfil de la superficie transversal es una curva logarítmica y que la sobreelevación es

$$\Delta h = 2.30 \frac{V_z^2}{g} \log \frac{r_o}{r_i} \qquad (16\text{-}12)$$

Woodward [14, 15] supuso que la velocidad es cero en las bancas y tiene un valor máximo $V_{máx}$ en el centro, que varía entre dichos valores de acuerdo con una curva parabólica. Mediante la segunda ley de Newton obtuvo la siguiente ecuación para la sobreelevación:

$$\Delta h = \frac{V_{max}^2}{g}\left[20/3\,\frac{r_c}{b} - 16\,\frac{r_c^3}{b^3} + \left(\frac{4r_c^2}{b^2} - 1\right)^2 \ln \frac{2r_c + b}{2r_c - b}\right] \qquad (16\text{-}13)$$

A partir de las tres ecuaciones anteriores para la sobreelevación, la ecuación (16-13) da los mejores resultados, pero ninguna es más precisa que la del vórtice libre expresada mediante la ecuación (16-8).

16-5. Ondas cruzadas[3]. Estas ondas a menudo se encuentran en flujo supercrítico en canales de alineamiento no lineal y en canales de secciones no prismáticas (capítulo 17), forman un patrón de perturbación que puede persistir a lo largo de una considerable distancia hacia aguas abajo, y son originadas por el efecto de giro causado por las paredes curvas, el cual no actúa uniformemente sobre todas las líneas de corriente de la sección del canal. En un canal curvo, la pared externa, que voltea

[3] Las ondas cruzadas en un flujo supercrítico de agua son análogas a las ondas de choque en el flujo supersónico de gases. Esta analogía la notaron por primera vez Prandtl [16], Riabouchinsky [17] y von Kármán [18], luego Preiswerk [19] y otros la investigaron experimentalmente. Sin embargo, estos científicos estaban interesados sobre todo en las aplicaciones de este principio al flujo supersónico de gases. Más adelante, Knapp, Ippen y otros [20-26] realizaron estudios concretos sobre el tema en aplicaciones hidráulicas. Para facilitar el análisis de las ondas de choque en gases, Busemann [27] desarrolló un método gráfico conocido como *método de las características*, que más adelante Preiswerk, Ippen y Knapp aplicarían a problemas hidráulicos. Para una descripción detallada de este método, *véanse* [23], [24] y [27].

el flujo hacia adentro, producirá un resalto hidráulico oblicuo y una línea de perturbación positiva correspondiente o frente de onda[4] positivo (sección 15-17). La pared interna, que se aparta del flujo, desarrollará la conocida *onda de expansión oblicua* y una línea de perturbación negativa o frente de onda negativo (ejemplo 16-2). Las líneas de perturbación producidas por ambas paredes se reflejarán en las mismas e interferirán unas con respecto a las otras, formando un patrón de perturbación de ondas cruzadas.

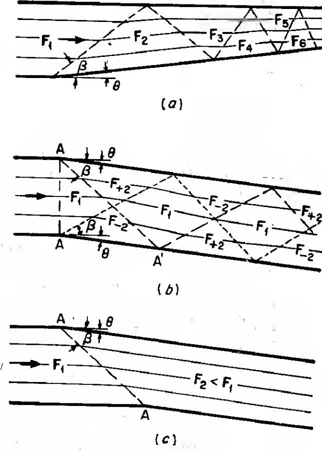


Figura 16-4. Canales rectangulares de alineamiento no prismático.

De manera similar, en cualquier canal de alineamiento no lineal pueden formarse ondas cruzadas con patrones diferentes, como los mostrados en la figura 16-4. Nótese que las ondas cruzadas de la figura 16-4*b* pueden anularse, como se muestra en la figura 16-4*c* haciendo que la línea *AA* coincida con el primer frente de onda positivo *AA'*. Para ángulos de deflexión grandes en las paredes del canal, el frente de onda positivo puede determinarse mediante el método desarrollado en la sección 15-17, y el frente de onda negativo mediante el descrito después en el ejemplo 16-2. Para ángulos de deflexión pequeños, como el incremento infinitesimal en el ángulo de deflexión en canales curvos, las ondas cruzadas pueden determinarse por el método descrito a continuación.

Al estudiar el desarrollo de estos métodos nótese que para ángulos de deflexión que originen frentes de onda negativos puede suponerse que la energía específica a través del frente de onda es constante debido a que realmente se involucra muy poca disipación de energía. Para ángulos de deflexión grandes que crean frentes de onda positivos, sin embargo, no puede suponerse que la energía específica permanezca constante debido a que el frente de onda se acumula hasta una altura sustancial y el resalto hidráulico oblicuo a través del frente consumirá una gran cantidad de energía.

Al considerar el flujo supercrítico en un canal curvo de ancho constante b y radio constante r_c (figura 16-5), la primera pequeña perturbación causada por la curvatura de la pared exterior empieza en el punto inicial *A* y se propaga a lo largo de la línea *AB*, la cual hace un ángulo de onda inicial β con la tangente extendida más allá del punto *A*. Entre tanto, la perturbación inicial producida por la pared interna se propaga a lo largo de línea *A'B*. Los dos frentes de propagación se

[4] La línea de perturbación o ángulo de onda creado por un resalto hidráulico oblicuo se considera positiva para distinguirla de la línea de perturbación negativa o frente de onda debido a una onda de expansión oblicua. La línea de perturbación negativa en realidad sólo marca el inicio de una región de perturbación; no es una línea definida distintivamente como la positiva.

encuentran en el punto B. Aguas arriba de la línea límite ABA' el flujo no se afecta por la curva y por consiguiente continúa moviéndose en su dirección original, es decir, paralelo a la tangente aguas arriba. Después del punto B los dos frentes de onda AB y $A'B$ se afectan uno al otro y no siguen propagándose en líneas rectas sino en trayectorias curvas BD y BC, respectivamente. La pared cóncava exterior AC tiende a deflectar el flujo, que de otra manera seguiría la dirección tangencial. En consecuencia, la superficie del agua sube cada vez más alto cerca del muro exterior hasta un valor máximo en C. Después de C el efecto de la pared interna, que tiende a bajar la superficie del agua, empieza a operar. Luego la superficie del agua a lo largo de la pared exterior empieza a bajar. En el lado convexo interno, el flujo tiende a separarse de la pared y la superficie del agua disminuye cada vez más a lo largo de $A'D$ hasta que alcanza el punto D. Después de D el efecto de la pared externa entra en juego y la superficie del agua empieza nuevamente a subir. La reflexión de las ondas de perturbación desde ambas paredes no se equilibrará o detendrá cuando las ondas se encuentren cerca del centro del canal. Éstas continuarán reflejándose varias veces a través del canal haciendo que el perfil superficial a lo largo de las paredes tenga una serie de elevaciones de la superficie máximas y mínimas aproximadamente a ángulos θ, 3θ, 5θ,..., desde el inicio de la curva. El ángulo θ marca la mitad de la longitud de onda del patrón de perturbación. Para propósitos prácticos, puede suponerse que los puntos de máximo y mínimo para cada ángulo fase θ ocurren en la misma línea radial, como OC para el primer máximo y mínimo[5]. Por geometría (figura 16-5), puede demostrarse que el ángulo central para el primer máximo es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2b}{(2r_c + b) \tan \beta} \tag{16-14}$$

donde el ángulo de onda β es aproximadamente $\text{sen}^{-1}(\sqrt{gy}/V)$, como se mostrará más adelante mediante la ecuación (16-15).

Para simplificar el cálculo de la elevación de la superficie del agua[6] se hacen las siguientes suposiciones principales: 1) flujo bidimensional, 2) velocidad constante a través de la sección transversal, 3) canal horizontal, 4) flujo sin fricción, 5) paredes del canal verticales. Las suposiciones 3 y 4 no excluyen la aplicación de los resultados a canales inclinados si la pendiente compensa la fricción.

Para la pared exterior de la curva, los cambios en el ángulo de deflexión y profundidad son graduales y pequeños. Por consiguiente, pueden representarse por

[5] Las localizaciones reales del primer máximo y el primer mínimo no ocurren con exactitud en la línea radial OC sino un poco a la izquierda y a la derecha de OC, respectivamente (figura 16-5). Sin embargo, el error involucrado en la suposición es insignificante. Esta suposición también se aplica a las localizaciones de los máximos y mínimos subsecuentes.

[6] Un estudio detallado de los contornos superficiales completos es posible mediante el método de las características [23].

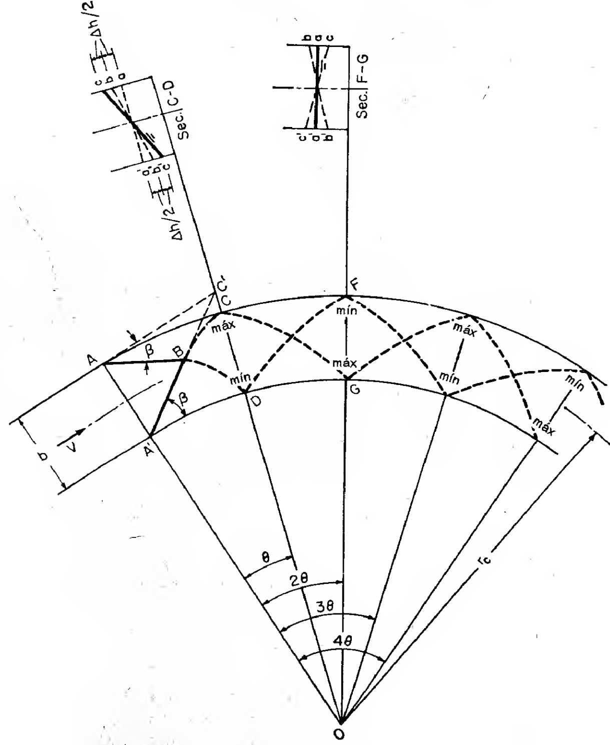


Figura 16-5. Modelo de ondas cruzadas para flujo supercrítico en un canal curvo.

dθ y dy, respectivamente. Al suponer $y_1 = y_2 = y$ para un resalto hidráulico oblicuo de altura infinitesimal dy, la ecuación (15-21) se convierte en[7]

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta} = \frac{V}{\sqrt{gy}} \tag{16-15}$$

Al sustituir y para y_1 y $y + dy$ para y_2, la ecuación (15-23) puede reducirse a

$$dy = \frac{y \sec^2 \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} \tag{16-16}$$

[7] Se cree que esta ecuación es cierta sólo para flujo supercrítico en un canal rectangular ancho. Para otras aplicaciones, Engelund y Munch-Petersen [28] desarrollaron una ecuación generalizada que coincide con datos experimentales que cubren una variación considerable del número de Froude (aun para $\mathbf{F}$ igual o ligeramente menor que la unidad) y de la relación profundidad-ancho del canal.

Para un ángulo pequeño, tan θ puede remplazarse por $d\theta$, y tan θ en el denominador es insignificante comparada con tan β. Luego la ecuación (16-16) se convierte en

$$dy = \frac{y}{\operatorname{sen}\beta \cos\beta} d\theta \qquad (16\text{-}17)$$

Al combinar las ecuaciones (16-15) y (16-17) se obtiene

$$dy = \frac{V^2}{g} \tan\beta \, d\theta \qquad (16\text{-}18)$$

De acuerdo con la suposición 4 la energía específica puede considerarse constante. Como $E = y + V^2/2g$, $V = \sqrt{2g(E-y)}$. Al sustituir esta expresión para V en las ecuaciones (16-15) y (16-18) y al eliminar β mediante la ecuación (16-15), se obtiene

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2(E-y)\sqrt{y}}{\sqrt{2E-3y}} \qquad (16\text{-}19)$$

La solución exacta de la ecuación (16-19) para θ da

$$\theta = \sqrt{3}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3y}{2E-3y}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3y}{2E-3y}} + \text{const.} \qquad (16\text{-}20)^8$$

Como $2E = y(2 + \mathbf{F}^2)$ (¿por qué?), la ecuación (16-20) puede escribirse como

$$\theta = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\mathbf{F}^2-1}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}^2-1}} + \text{const.} \qquad (16\text{-}21)$$

Esta ecuación puede utilizarse para calcular el cambio de la profundidad a lo largo de las paredes al inicio de la curva. La constante de integración puede determinarse a partir de la condición de que para $\theta = 0$, y es la profundidad inicial y_1. Sin embargo, la ecuación (16-21) es complicada e inconveniente para uso práctico, aun con la ayuda de un cuadro gráfico, como el desarrollado por Ippen [23]. Según Knapp e Ippen [21-24], pueden obtenerse resultados adecuados mediante la siguiente ecuación mucho más simple

$$y = \frac{V^2}{g}\operatorname{sen}^2\left(\beta + \frac{\theta}{2}\right) \qquad (16\text{-}22)$$

Esta ecuación se desarrolló como resultado de mediciones reales en flujo[9]. En el uso de las ecuaciones (16-21) y (16-22) el ángulo θ es positivo para profundidades a lo largo de la pared exterior y negativo para profundidades a lo largo de la interior. La profundidad en el primer máximo de altura de la perturbación de onda cruzada puede obtenerse utilizando el valor de θ calculado mediante la ecuación (16-14).

En la sección transversal *CD* (figura 16-15), donde ocurre la primera altura máxima en la onda cruzada en la pared exterior, la línea $a'a$ representa la posición teórica de la superficie del agua en la sección transversal del canal si éste fuera recto; la línea $b'b$, dicha posición si el flujo fuera subcrítico; y la línea $c'c$ cuando el flujo es supercrítico. Es evidente que b es mayor que a y b' es menor que a' en una cantidad igual a la mitad de la sobreelevación, o $\Delta h/2$. Mediante la ecuación (16-11) esta cantidad es $V^2b/2r_cg$. De acuerdo con las investigaciones experimentales hechas por Ippen y Knapp [21-23], c es mayor que a en una cantidad casi igual a Δh, o mayor que b casi en una cantidad de $\Delta h/2$. La posición de c' es menor que la de b' casi en una cantidad de $\Delta h/2$. Condiciones similares existen en otras seciones transversales donde la altura máxima de la superficie del agua ocurre en la pared exterior.

En la sección transversal *FG*, donde ocurre una altura de onda cruzada mínima en la pared exterior, la superficie de agua real es idéntica a $a'a$ debido a que el efecto de la perturbación causada por la onda cruzada es balanceado por la sobreelevación. En secciones similares la superficie del agua toma una posición igual a la que tendría el flujo en un canal recto.

La distancia *AC* a lo largo de la pared representa una mitad de longitud de onda, la cual subtiende un ángulo central θ. Esta longitud puede aproximarse a AC' o $b/\tan\beta$ suponiendo que el ángulo $AC'A' = \beta$. Luego la longitud de onda es $2b/\tan\beta$.

A partir del análisis anterior puede concluirse que el patrón de ondas de perturbación, que oscila alrededor del plano representado por $b'b$, tiene una longitud de onda de $2b/\tan\beta$ y una amplitud de $V^2b/2r_{cg}$. Este resultado puede utilizarse para estimar más o menos el perfil de flujo supercrítico en canales curvos simples.

Para la perturbación que continúa en el canal tangente aguas abajo, la longitud de onda primaria sigue siendo $2b/\tan\beta$. A medida que la curvatura cambia súbitamente a un alineamiento recto, se presenta un nuevo patrón de perturbación, con una altura máxima en el muro exterior en el punto de tangencia, que tiene una longitud de onda y una magnitud igual a la del patrón de perturbación original desarrollado en la curva. El patrón resultante en la tangente es la suma del original y el nuevo, y puede eliminarse adoptando longitudes curvas de 2θ, 4θ, ..., y podrá tener una altura de onda mínima en la pared exterior en el extremo de la curva, suficiente para anular la altura de onda máxima nuevamente creada.

[8] La deducción matemática de la ecuación con esta forma la realizó por primera vez von Kármán [18].

[9] Con base en la suposición 4 y, por consiguiente, en la conservación de energía, la velocidad de cualquier línea de corriente debe cambiar con la profundidad, debido a que $E = y + V^2/2g$ debe ser constante. El flujo a lo largo de la pared externa, al ser más profundo debería ser más lento. Mediciones reales, sin embargo, indican lo contrario, es decir, que la velocidad a lo largo de la pared exterior permanece constante o se incrementa ligeramente, en tanto que disminuye a lo largo de la pared interna. Se cree que esta disparidad se debe a los efectos variables de la fricción del canal, los cuales invalidan la suposición 4. En consecuencia, es razonable suponer una velocidad constante. Por consiguiente la ecuación (16-22) se dedujo de la suposición de velocidad constante, la cual remplaza la suposición 4. Como el autor no pudo discernir aquí el rigor de la deducción matemática original, considera que la ecuación (16-22) debe tomarse como empírica.

Ejemplo 16-2. Describa las características de una onda de expansión oblicua en canales de alineamiento no lineal.

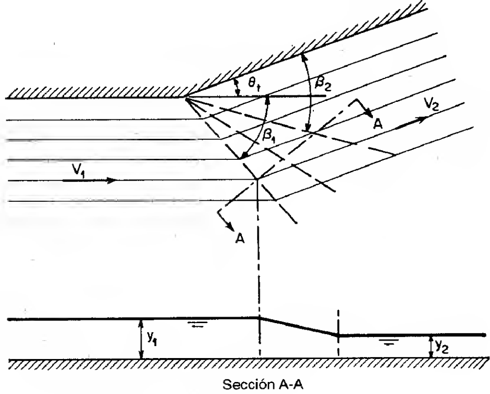


Figura 16-6. Onda de expansión oblicua.

Solución. La onda de expansión oblicua ocurre cuando la pared del canal se deflecta hacia afuera del flujo un ángulo θ_t (figura 16-6). La profundidad de flujo disminuye en la región en forma de abanico en la perturbación de onda delineada mediante los ángulos de onda β_1 y β_2, medidos con referencia a las direcciones inicial y final del flujo, respectivamente. Mediante la ecuación (16-15),

$$\beta_1 = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\mathbf{F}_1} \qquad \text{y} \qquad \beta_2 = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\mathbf{F}_2} \tag{16-23}$$

donde $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son, respectivamente, los números de Froude de los flujos inicial y final. La relación entre $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y el ángulo de deflexión total θ_t puede representarse mediante la ecuación (16-21). En esta ecuación, $\theta = 0$ cuando $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$, y $\theta = \theta_t$ cuando $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2$. Luego si $\mathbf{F}_1$ y θ_t se conocen puede determinarse $\mathbf{F}_2$. El rango angular en el cual ocurre al cambio puede determinarse mediante la ecuación (16-23). Como el cambio de profundidad no involucra una disipación de energía significativa, las profundidades antes y después del cambio pueden relacionarse suponiendo una energía específica constante. Luego, la relación entre la profundidad final con respecto a la inicial es

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathbf{F}_1^2 + 2}{\mathbf{F}_2^2 + 2} \tag{16-24}$$

En la región de perturbación, el descenso en la profundidad puede considerarse que continúa por medio de una serie de pasos infinitesimales o pequeñas ondas. El ángulo de onda de cada una de las pequeñas ondas sucesivas depende del valor local del número de Froude que cambia continuamente. Cada pequeña onda puede representarse sucesivamente por una línea de profundidad constante. La primera de ellas se representa mediante la onda de perturbación negativa. Nótese que, en contraste con esta línea, otra de perturbación positiva representa un incremento súbito en la profundidad debido a que involucra un resalto hidráulico. La línea de perturbación negativa marca el inicio de una región de perturbación desarrollada por una onda de expansión oblicua, en tanto que la positiva representa la perturbación completa causada por un resalto hidráulico oblicuo.

16-6. Consideraciones de diseño para flujo subcrítico. En general, las curvas no son convenientes en canales abiertos, debido a que incrementan las pérdidas por fricción y representan peligro de erosión local seria debido al flujo espiral. La reducción de éste es la mayor preocupación en el diseño de canales curvos para flujo subcrítico. Para un dimensionamiento apropiado de la curva se recomienda una relación de $r_c/b = 3$, debido a que dará el menor radio para el cual el efecto debido al flujo en espiral se minimiza (sección 16-2).

En canales erosionables la acción del flujo espiral desarrollará una configuración en el lecho. El tamaño de la configuración es mínimo si r_c/b es 3.0 o mayor. Cuando se necesita una protección en la banca, ésta es necesaria sobre todo en la banca exterior en el extremo de aguas abajo de la curva, y se necesita en menor grado en la banca interna en el inicio de la curva. Esto se sugiere de acuerdo con el comportamiento del flujo espiral.

En un codo aluvial parece que la configuración de la sección transversal del canal se define más o menos según ciertas leyes naturales. Este tema ha sido investigado por muchos científicos e ingenieros en hidráulica de ríos desde Boussinesq [29]. De acuerdo con los estudios hechos por Ripley [30], la configuración de una curva en ríos aluviales (figura 16-7) puede representarse mediante la siguiente ecuación empírica:

$$y = 6.35D\left(\sqrt{0.437 - \frac{x^2}{T^2}} - 0.433\right)\left(1 + \frac{xK}{r_o}\right) \tag{16-25}$$

donde y es la ordenada o profundidad en pies, x es la abscisa en pies, D es la profundidad hidráulica en pies, T es el ancho superficial en pies, r_o es el radio de curvatura en pies en el lado cóncavo del canal, y K es un coeficiente igual a 17.52. El origen de coordenadas para esta ecuación se localiza en la superficie del agua en un punto equidistante desde las bancas. Para el uso de esta ecuación considérense los siguientes aspectos:

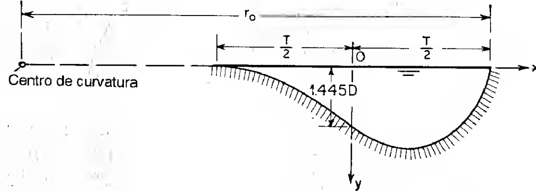


Figura 16-7. Sección transversal empírica para una curva aluvial.

1. Para r_o menor que 40 veces la raíz cuadrada del área mojada parece que no origina profundización adicional del canal con incrementos en la curvatura; por consiguiente, en tales casos, el valor de r_o utilizado en la ecuación debe ser $40\sqrt{A}$. En consecuencia, las curvas son constructivas y estables cuando ro es mayor que 40 $\sqrt{A}$, en tanto que curvas más agudas son destructivas, tendientes a cambiar el canal.

2. Para r_o mayor que $110\sqrt{A}$ la ecuación no es aplicable.

3. La ecuación puede aplicarse para canales curvos que no ocupan el ancho completo de la vía de agua o aquellos en la entrada al río creada por un espolón curvo único. En tales casos, $K = 26.28$ y el valor de y así calculado debe incrementarse un 14%.

4. En un vado, cuando el canal no se encuentra ni en una curva ni en un tramo recto, la profundidad máxima es alrededor del 14.5% menor que el valor calculado.

5. La ecuación generalmente da un ancho de canal correspondiente a la profundidad hidráulica alrededor de un 20% mayor que el ancho real.

6. La ecuación es muy aproximada; sin embargo, en ausencia de un método mejor para determinar la forma de la sección transversal en una curva en un río o en un canal dragado, da respuestas satisfactorias a muchos problemas prácticos.

16-7. Consideraciones de diseño para flujo supercrítico. EL aspecto principal en el diseño de canales curvos para flujo supercrítico es eliminar o reducir la sobreelevación y el patrón de perturbaciones de ondas cruzadas. Knapp [24] sugirió los siguientes métodos para alcanzar este objetivo:

A. Peralte. Es la pendiente transversal en el fondo que suministra una fuerza lateral para balancear la acción centrífuga del flujo. La pendiente transversal S_t requerida puede calcularse igualando la componente gravitacional a lo largo de la pendiente transversal con la fuerza centrífuga determinada mediante el radio r de curvatura y la velocidad V; es decir,

$$S_t = \frac{V^2}{gr} \tag{16-26}$$

Para evitar cambios abruptos en la condición de flujo, el peralte debe presentarse gradualmente desde cero hasta su valor completo, empezando en ambos extremos de la curva. Nótese que la pendiente calculada de esta manera es buena sólo para la velocidad dada. Cuando la velocidad cambia, este peralte es menos efectivo en las nuevas condiciones de flujo. Por consiguiente, el peralte es más adecuado en canales que ordinariamente operan cerca de la condición de flujo del diseño. Los factores en contra del peralte incluyen los costos de los trabajos de la excavación y las posibles sedimentaciones o erosiones a lo largo de la pared interna durante flujos bajos.

B. Vanos curvos múltiples. La sobreelevación y el patrón de perturbación pueden reducirse mediante vanos concéntricos que dividen el ancho del canal en una serie de canales curvos angostos. Este método generalmente no es práctico y se vuelve inaplicable en canales que mueven basuras de tamaños mayores que el ancho subdividido.

C. Curvas suavizadas. La perturbación en un canal curvo simple puede reducirse empleando una curva compuesta. El mejor diseño es una curva simple de radio r_c precedida y seguida por otra sección de una curva simple, cuya longitud es $b/\tan\,\beta$ y cuyo radio es $2r_c$. La curva compuesta resultante ofrece una solución muy conveniente para la mayor parte de canales curvos con flujo supercrítico. Otros tipos

de curvas suavizadas, como una de transición en espiral, incrementarán de manera considerable el costo de diseño de construcción con sólo un pequeño mejoramiento en las características del flujo.

D. Obstáculos diagonales. Son los instalados en el fondo del canal cerca de los extremos de la curva que producirán un efecto similar al de una curva suavizada. Un esquema efectivo de estos obstáculos, mostrados en la figura 16-8, se desarrolló experimentalmente. El ángulo óptimo α de los obstáculos es 30°. La distancia L_{US} puede estimarse mediante

$$L_{US} = \frac{Kb}{\tan\beta} \tag{16-27}$$

donde K es un coeficiente. Para casos normales, el valor de K está entre 0.9 y 1.15. De acuerdo con la figura la longitud L_{IS} es

$$L_{IS} = 0.30L' + \frac{b}{\tan\alpha} \tag{16-28}$$

donde $L' = b/\tan\,\beta$, es decir, la mitad de la longitud de onda de la perturbación del canal.

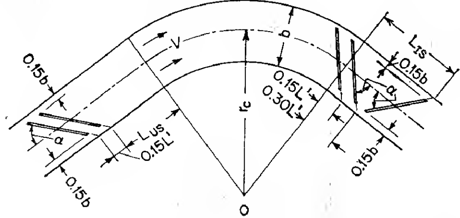


Figura 16-8. Planta de la instalación de obstáculos en un canal curvo, (*según R. T. Knapp* [24]).

Este método puede utilizarse como una medida remedial en canales existentes diseñados con curvas circulares simples y otras formas no satisfactorias. Las principales desventajas de este método son el alto costo de mantenimiento, la perturbación muy pronunciada en flujos bajos y la posible cavitación en flujos extremos con altas velocidades. La perturbación pronunciada en flujos bajos puede causar inquietud y desconfianza en un observador no experimentado debido a que no es fácil convencerse de que ésta se reducirá sustancialmente para altos flujos de diseño.

PROBLEMAS

16-1. Una curva de 120° con $b = 10$ pulg y $r_c = 15$ pulg se diseña para conectar dos canales rectos con el mismo ancho, que conducen 1.3 pies³/s con una profundidad de 7 pulg. Determine las pérdidas en la curva.

16-2. Determine la energía específica en la sección que contiene la máxima depresión superficial en la curva dada en el problema anterior. Suponga $\alpha = 1.0$ y $n = 0.01$.

16-3. Calcule el pérfil de la superficie del agua en la sección transversal que contiene la máxima depresión superficial, como se describió en el problema anterior, utilizando la ley del vórtice libre. ¿Cuál es la sobreelevación?

16-4. Determine la sobreelevación en el problema anterior mediante: *a*) la ecuación (16-11), *b*) la ecuación (16-12), y *c*) la ecuación (16-13).

16-5. Verifique la ecuación (16-14).

16-6. Determine el perfil de flujo aproximado en el canal curvo dado en el problema 16-1 si el canal de aproximación conduce un flujo supercrítico con una profundidad de 4.5 pulg.

16-7. Diseñe el canal curvo para una canaleta rectangular con un ángulo de giro de 50° y un radio de 250 pies. La canaleta tiene 12 pies de ancho y está construida en concreto liso. El caudal de diseño es 350 pies³/s con una pendiente del 1%.

16-8. Mediante la ecuación (16-25), calcule la sección transversal del canal en una curva en el río Mississippi, donde $A = 148{,}000$ pies², $T = 2{,}340$ pies y $r_o = 18{,}300$ pies. Compare el resultado con la sección transversal real, la cual es como sigue:

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1,170	0.00	200	97.00	−600	44.00
1,000	36.00	0	74.00	−800	38.00
800	88.00	−200	65.00	−1,000	24.00
600	108.00	−400	55.00	−1,170	0.00
400	111.00				

REFERENCIAS

1. James Thomson, "On the origin and winding of rivers in alluvial plains, with remarks on the flow around bends in pipes", *Proceedings*, Vol. 25, *Royal Society of London*, marzo 4 de 1876, pp. 5-8.
2. Ahmed Shukry, "Flow around bends in an open flume", *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 751-779.
3. A. Hinderks, *Nebenströmungen in gekrümmten Kanälen* (*Secondary flow in curved canals*), Vol. 71, Nº 51, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin, diciembre 17 de 1927, pp. 1779-1783.
4. Bruno Poggi, "Correnti veloci nei canali in curva" ("Swift flow in curved channels"), *L'Energia elettrica*, Vol. 33, Nº 5, Milano, mayo de 1956, pp. 465-480.
5. F. L. Blue, Jr., J. K. Herbert, y R. L. Lancefield, "Flow around a river bend investigated", *Civil Engineering*, Vol. 4, Nº 5, mayo de 1934, pp. 258-260.
6. Herbert D. Vogel y Paul W. Thompson, "Flow in river bends", *Civil Engineering*, Vol. 3, Nº 5, mayo de 1933, pp. 266-268.
7. Herbert D. Vogel y Paul W. Thompson, "Existence of helicoidal flow", *Civil Engineering*, Vol. 4, Nº 7, julio de 1934, pp. 370-371.
8. Robert Müller, "Theoretische Grundlagen der Fluss- und Wildbachverbauungen" ("Theoretical principles for regulation of rivers and torrents"), *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau*, Nº 4, *Eidgenössische Technische Hochschule*, Zürich, 1943.

9. Sanjiva Puttu Raju, "Versuche über den Strömungswiderstand gekrümmten offener Kanäle" ("Study on the flow resistance in curved open channels"), *Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München*, Nº 6, Munich, 1933, pp. 45-60. Traducido al inglés por Clarence E. Bardsley, "Resistance to flow in curved open channels", *Proceedings*, Vol. 63, Parte 2, American Society of Civil Engineers, noviembre de 1937, pp. 49 y 1834.
10. C. H. Yen y J. W. Howe, "Effects of channel shape on losses in a canal bend", Civil Engineering, Vol. 12, Nº 1, enero de 1942, pp. 28-29.
11. H. Wittman y P. Böss, *Wasser und Geschiebebewegung in gekrümmten Fluss-strecken* (*Water and Bed-load Movement in Curved River Reaches*), Springer-Verlag, Berlin, 1938.
12. C. E. Mockmore, "Flow around bends in stable channels", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 593-618.
13. Armin Schoklitsch, *Hydraulic Structures*, Vol. I, traducido del alemán por Samuel Shulitz, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1937, p. 151.
14. Sherman M. Woodward, "Hydraulics of the Miami flood control project", *Miami Conservancy District, Technical Report*, Parte VII, Dayton, Ohio, 1920.
15. Sherman M. Woodward y Charles J. Posey, *Hydraulics of Steady Flow in Open Channels*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941, p. 112.
16. L. Prandtl, *Abriss der Strömungslehre* (*Outline of the Theory of Flow*), Vieweg-Verlag, Brunswick, Germany, 1931.
17. D. Riabouchinsky, "Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible" ("On hydraulic analogy of flows of a compressible fluid"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 195, 1932, pp. 998-999; Vol. 199, 1934, pp. 632-634.
18. Theodor von Kármán, "Eine praktische Anwendung der Analogie zwischen Überschallströmung in Gasen und überkritischer Strömung in offenen Gerinnen" ("A practical application of analogy between supersonic flow in gases and supercritical flow in open channels"), *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 18, Berlin, febrero de 1938, pp. 49-56.
19. Ernst Preiswerk, "Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier oberfläche" ("Application of the methods of gas dynamics to water flow with free surface"), *Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik*, Nº 7, *Eidgenössische Technische Hochschule* Zürich, 1938. Traducido al inglés por S. Reiss como *National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Memoranda Nº 934 y 935*, marzo de 1940.
20. Arthur T. Ippen y Robert T. Knapp, "A study of high velocity flow in curved channels of rectangular cross section", *Transactions*, Vol, 17, *American Geophysical Union*, 1936, pp. 516-521.
21. Robert T. Knapp y Arthur T. Ippen, "Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation", *Proceedings of the 5th. International Congress of Applied Mechanics, Cambridge, Mass.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1938, pp. 531-536.
22. Arthur T. Ippen, "Gas-wave analogies in open-channel flow", *Proceedings of the 2d. Hydraulics Conference, June 1-4, 1942, State University of Iowa, Studies in Engineering, Bulletin 27*, Nº 400, 1943, pp. 248-265.
23. Arthur T. Ippen, "Mechanics of supercritical flow", primer artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 268-295.
24. Robert T. Knapp, "Design of channel curves for supercritical flow", segundo artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 296-325.
25. Arthur T. Ippen y John H. Dawson, "Design of channel contractions", tercer artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 326-346.
26. Hunter Rouse, B. V. Bhoota, y En-Yun Hsu, "Design of channel expansions", cuarto artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 347-363.

27. A. Busemann, *Gasdynamik* (*Gasdynamics*), Vol. IV, Parte 1 de *Handbuch der Experimentalphysik*, Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig, 1931, pp. 423-440.
28. Frank Engelund y Johs. Munch-Petersen, "Steady flow in contracted and expanded rectangular channels", *La Houille blanche*, año 8, Nº 4, Grenoble, agosto-septiembre de 1953, pp. 464-474.
29. J. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes" ("Essay on the theory of water flow"), *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, Vol. 23, Ser. 2, Nº 1, suplemento 24, Paris, 1877, pp. 1-680.
30. H. C. Ripley, "Relation of depth to curvature of channels", *Transactions*, Vol. 90, American Society of Civil Engineers, 1927, pp. 207-238. Análisis en pp. 239-265.

CAPÍTULO 17

FLUJO A TRAVÉS DE CANALES CON SECCIONES NO PRISMÁTICAS

El flujo rápidamente variado a través de secciones no prismáticas[1] se encuentra a menudo en varias estructuras de canales abiertos. En los capítulos anteriores se estudiaron muchos ejemplos, como vertederos de cresta ancha (ejemplo 3-2), compuerta deslizante sumergida (problema 3-10), canaletas de flujo crítico (sección 4-6), entradas y salidas en canales (sección 11-3), vertederos de cresta delgada (sección 14-1), vertederos de rebose (capítulo 14), compuertas de tambor (sección 14-9), cuencos disipadores con diferentes controles (secciones 15-9 a 15-15), etc. En este capítulo se estudiarán algunos casos significativos que requieren consideración independiente.

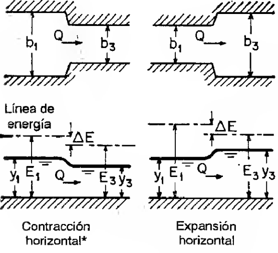
El problema en consideración a menudo involucra una cantidad significativa de pérdidas por turbulencia. En muchos casos puede lograrse una solución práctica del problema por medio del uso de las ecuaciones de continuidad, energía y *momentum*. Esto se describió en las secciones 3-6 a 3-8; y un caso clásico se demostró en el ejemplo 3-2. Sin embargo, este método no evalúa teóricamente los efectos debidos a factores inciertos. Para una solución más exacta que tenga en cuenta todos los factores, es necesario referirse a estudios sobre modelo o a observaciones reales en estructuras existentes. Luego la teoría puede utilizarse para desarrollar una ecuación empírica o una tabla en las cuales los coeficientes deben determinarse mediante experimentos o datos reales.

17-1. Transiciones súbitas. Las transiciones con el cambio en las dimensiones de la sección transversal que ocurren en una distancia más o menos corta inducirán un flujo rápidamente variado. Tales transiciones (figura 17-1) incluyen contracciones y expansiones súbitas verticales, horizontales o ambas.

[1] El flujo gradualmente variado a través de secciones de canales no prismáticos se trató en las secciones 3-5, 3-8 y 11-4 a 11-7.

Tome como ejemplo la contracción horizontal (figura 17-2)[2]. Al aplicar la ecuación de *momentum* a las secciones 1-1, 2-2 y 3-3,

$$\frac{Qw}{g}(\beta_3V_3 - \beta_1V_1) = P_1 - P_2 - P_3 - F_f$$
$$= \tfrac{1}{2}wb_1y_1^2 - \tfrac{1}{2}w(b_1 - b_3)y_2^2 - \tfrac{1}{2}wb_3y_3^2 - F_f \quad (17\text{-}1)$$



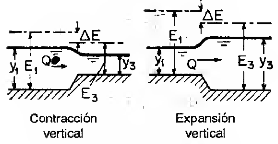


Figura 17-1. Transiciones súbitas.

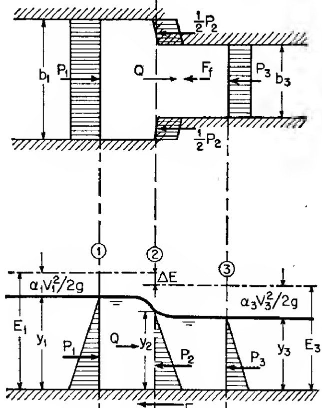


Figura 17-2. Análisis de una contracción horizontal.

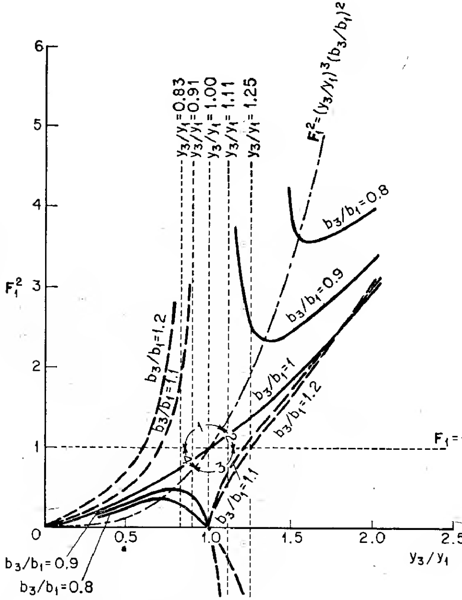


Figura 17-3. Gráfica de $\mathbf{F}_1^2$ contra y_3/y_1, utilizando b_3/b_1 como parámetro para el análisis de contracciones horizontales súbitas (mostradas mediante las curvas continuas) y expansiones (mostradas mediante las curvas punteadas).

Mediante la ecuación de continuidad, $Q = V_1b_1y_1 = V_3b_3y_3$. Por conveniencia en el análisis teórico, puede suponerse que $F_f = 0$, $\beta_1 = \beta_3 = 1$ y $y_2 = y_3$. En estas condiciones la ecuación (17-1) puede reducirse a

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{(y_3/y_1)[(y_3/y_1)^2 - 1]}{2[(y_3/y_1) - 1/(b_3/b_1)]} \quad (17\text{-}2)$$

donde $\mathbf{F}_1^2 = V_1^2/gy_1$. Esta ecuación puede graficarse como se muestra en la figura 17-3, utilizando b_3/b_1 como parámetro. Las curvas graficadas de esta manera son hipérbolas similares de un grado alto, que tienen las siguientes características:

1. Las curvas sólo se consideran para valores positivos de $\mathbf{F}_1$ y y_3/y_1.
2. Todas las hipérbolas pasan por los puntos ($\mathbf{F}_1 = 0$, $y_3/y_1 = 0$) y ($\mathbf{F}_1 = 0$, $y_3/y_1 = 1$) y son asintóticas a la línea vertical $y_3/y_1 = b_1/b_3$.

[2] El siguiente análisis se basa en un tratamiento dado por Jaeger [1-3].

3. El caso especial de $b_3/b_1 = 1$, que indica el resalto hidráulico en un canal prismático, se representa mediante la curva

$$\mathbf{F}_1^2 = 0.5\left(\frac{y_3}{y_1}\right)\left[\left(\frac{y_3}{y_1}\right) + 1\right]$$

(¿Por qué?).

4. El flujo aguas arriba es supercrítico en la región por encima de la línea horizontal $\mathbf{F}_1^2 = 1$ o $\mathbf{F}_1 = 1$, y subcrítico por debajo de esta línea. Aguas abajo es subcrítico en la región por debajo de la curva $\mathbf{F}_1^2 = (y_3/y_1)^3(b_3/b_1)^2$, y supercrítico por encima de ésta. (¿Por qué?). En consecuencia, se crean cuatro regiones en la figura, que representan cuatro regímenes:

Región 1. El flujo es supercrítico a través de la transición.
Región 2. El flujo a través de la transición pasa de supercrítico a subcrítico.
Región 3. El flujo es subcrítico a través de la transición.
Región 4. El flujo a través de la transición pasa de subcrítico a supercrítico.

5. En teoría, cierta parte de las curvas representan flujos que no pueden ocurrir en la realidad, porque necesitarían un incremento en la energía, o una pérdida de energía negativa, que es contradictoria con el hecho de que el flujo siempre pierde energía al pasar por una transición. La diferencia entre las energías antes y después de la transición es

$$\Delta E = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} - y_3 - \frac{V_3^2}{2g} \tag{17-3}$$

o

$$\frac{\Delta E}{y_1} = 1 + \frac{\mathbf{F}_1^2}{2} - \left[\frac{y_3}{y_1} + \frac{\mathbf{F}_1^2}{2(y_3/y_1)^2(b_3/b_1)^2}\right] \tag{17-4}$$

Al aplicar esta ecuación a cierta parte de las curvas, el flujo se torna imposible si el valor calculado de ΔE es negativo. Sin embargo, nótese que este estudio tiene la intención de presentar un análisis teórico del fenómeno y desarrollar una clasificación del flujo a través de transiciones súbitas. En problemas reales, el flujo en teoría imposible puede convertirse en posible en la realidad debido a que las suposiciones hechas en la deducción anterior pueden no ser ciertas en circunstancias reales[3].

Mediante un análisis similar, puede escribirse la siguiente ecuación para una expansión horizontal (suponiendo $y_2 = y_1$),

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{(b_3/b_1)(y_3/y_1)[1 - (y_3/y_1)^2]}{2[1/(b_3/b_1) - (y_3/y_1)]} \tag{17-5}$$

Esta ecuación se representa por las curvas punteadas de la figura 17-3. También pueden hacerse análisis similares para contracciones y expansiones verticales.

Investigaciones experimentales de flujo a través de transiciones se estudiarán en las siguientes tres secciones.

17-2. Flujo subcrítico a través de transiciones súbitas. Para flujo subcrítico que pasa a través de transiciones súbitas, Formica [4], llevó a cabo diferentes experimentos en varios diseños, (figura 17-4). En la figura 17-5 se muestran perfiles de flujo comunes medidos y las líneas de energía para los diseños I (contracción) y 1 (expansión). Las líneas de energía representan la energía específica $y + \alpha V^2/2g$. Cerca de la sección donde ocurre la transición, la altura de velocidad no puede medirse con facilidad debido a la condición turbulenta de flujo; luego las líneas de energía simplemente se extienden. La intersección vertical entre las líneas extendidas aguas arriba y aguas abajo en la sección de transición representan la pérdida de energía ΔE. El asterisco mostrado para la expansión súbita indica la posición de la línea de energía al suponer $\alpha = 1$.

[3] En circunstancias reales, β_1 y β_2 no son exactamente iguales a 1.0 y y_2 puede ser $y_1 > y_2 > y_3$. Luego la pérdida de energía negativa podría ser positiva y el flujo en teoría imposible podría convertirse en posible en la realidad. La pérdida ΔE es una cantidad muy pequeña y puede cambiar con facilidad de negativa a positiva mediante un pequeño cambio en los términos de la ecuación (17-4).

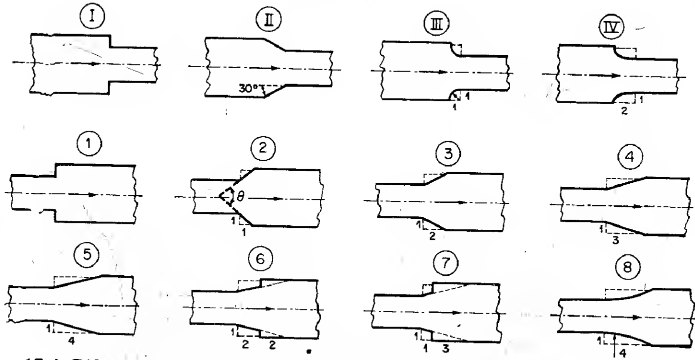


Figura 17-4. Diferentes diseños de transiciones súbitas con propósitos experimentales (*según G. Formica* [4]). Ancho del canal = 355 mm para las secciones más anchas y 205 mm para las más angostas. Para contracciones, la pendiente del canal = 0.00023 en las secciones más anchas y 0.00096 en las más angostas. Para expansiones, 0.00104 para las secciones más angostas y 0.00073 para las más anchas.

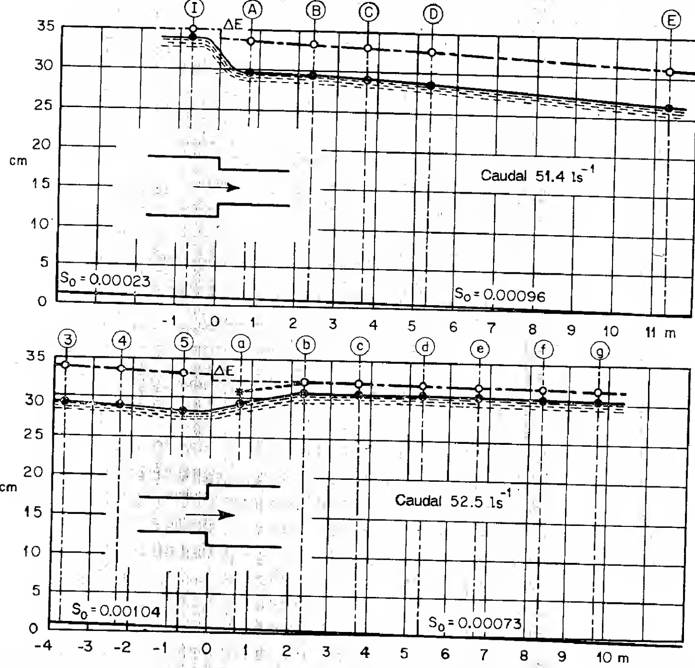


Figura 17-5. Perfiles de flujo medidos y líneas de energía típicas a través de transiciones súbitas (*según G. Formica* [4]). En la figura, 1 ls^{-1} = 0.03532 $pics^3/s$, 1 m = 3.281 pies y 1 cm = 0.3937 pulg.

La figura 17-6 muestra los valores calculados del coeficiente de energía α en diferentes secciones del canal para diferentes diseños de transiciones. En apariencia, los valores están muy cercanos a la unidad inmediatamente después de las contracciones súbitas pero por lo general son mayores que la unidad después de expansiones súbitas, en las que el flujo se difunde de manera irregular.

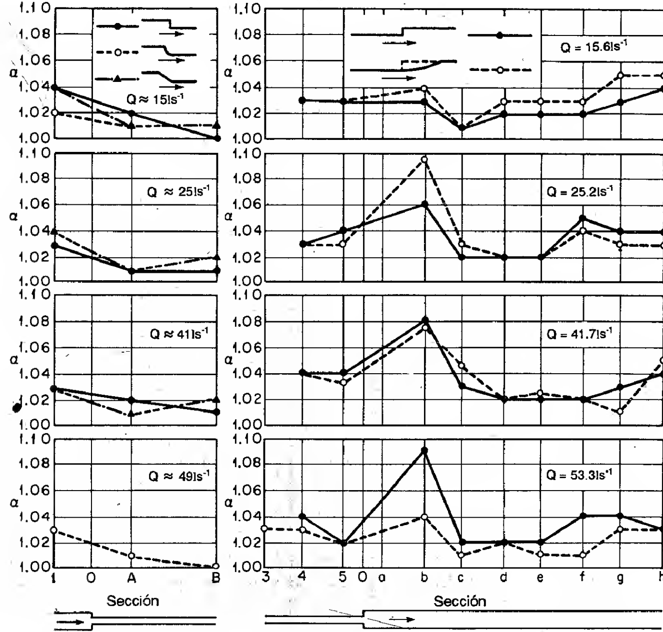


Figura 17-6. Variación del coeficiente de energía cerca de transiciones súbitas (*según G. Formica* [4]). 1 ls^{-1} = 0.03532 pies^3/s.

En la figura 17-7 se muestran las pérdidas de altura para diseños de transiciones con diferentes caudales. Nótese que en general las contracciones súbitas tienen unas pérdidas mayores que las expansiones súbitas. En las primeras el flujo se contrae y luego se expande. Al proceso de conversión de energía potencial en energía cinética le sigue inmediatamente un proceso inverso. Como resultado, se recupera mucho menos energía que en una expansión súbita. Sin embargo, la pérdida de energía en una contracción súbita del diseño I puede reducirse de manera significativa modificando las esquinas agudas a la entrada del canal reducido, como en los diseños II a IV. Las diferencias entre estos tres diseños son insignificantes.

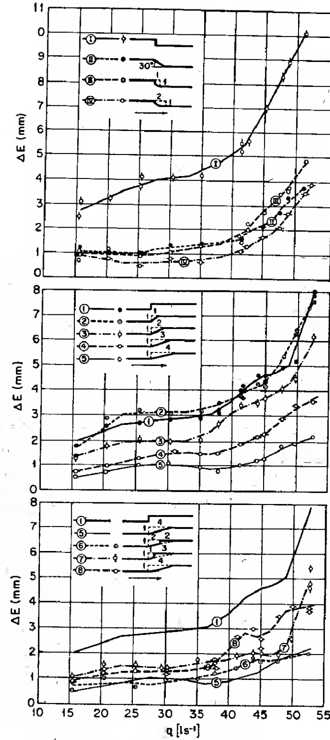


Figura 17-7. Pérdidas de altura en transiciones súbitas (*según G. Formica* [4]).1 ls^{-1} = 0.03532 pies^3/s y 1 mm = 0.03937 pulg.

De nuevo, la pérdida de energía en una expansión súbita puede reducirse mediante la ampliación gradual de la sección del canal o la disminución del ángulo de divergencia (θ en la figura 17-4), pero esta ventaja puede anularse mediante modificaciones como la de los diseños 6 a 8. La longitud del ensanchamiento gradual tiene un límite por fuera del cual la ganancia en eficiencia es insignificante.

En conductos cerrados [5], la pérdida de energía en una contracción súbita puede expresarse mediante

$$E = K\frac{V_3^2}{2g} \qquad (17\text{-}6)$$

y en una expansión súbita por

$$E = \epsilon\frac{(V_1 - V_3)^2}{2g} \qquad (17\text{-}7)$$

donde K y ϵ son coeficientes y V_1 y V_3 son las velocidades aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Al aplicar estas ecuaciones a canales abiertos, Formica obtuvo los siguientes valores promedio para ϵ en expansiones súbitas:

Tipo de diseño.........	1	2	3	4	5	6	7	8
ϵ....................	0.82	0.87	0.68	0.41	0.27	0.29	0.45	0.44

De acuerdo con los datos experimentales obtenidos por Formica, los valores de K para contracciones súbitas parecen variar en un rango amplio, que por lo general se incrementan con el caudal. El valor medio aproximado de K para el diseño I es 0.10 y para los diseños II a IV es 0.06.

17-3. Contracciones en flujo supercrítico. Cuando un flujo supercrítico pasa a través de una contracción con muros convergentes simétricos, aparecerán ondas cruzadas similares a aquéllas desarrolladas en un canal curvo (sección 16-5). Sin embargo, estas ondas en una contracción son simétricas con respecto a la línea central del canal (figura 17-8). El estudio analítico del problema puede llevarse a cabo mediante los principios de la mecánica de flujo supercrítico descritos en el capítulo anterior.

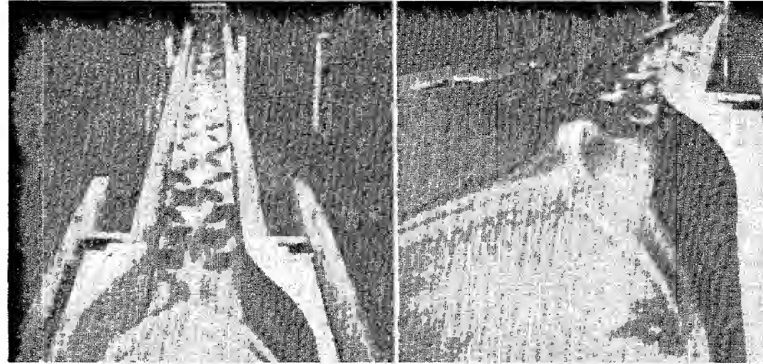


Figura 17-8. Ondas cruzadas en una transición curva (*cortesía de A. T. Ippen*).

Mediante una investigación experimental y analítica, Ippen y Dawson [6] encontraron que contracciones rectas son siempre mejores que contracciones curvas de igual longitud de contracción desde el punto de vista de altura máxima. De acuerdo con esto, ellos propusieron un procedimiento de diseño para las primeras, el cual se estudiará más adelante. Para el diseño de las segundas, el patrón de ondas

cruzadas puede determinarse experimentalmente mediante la prueba en modelo, o analíticamente mediante el método de las características (*véase* primera nota de pie de página en la sección 16-5).

En flujo supercrítico a través de una contracción recta (figura 17-9*a*) se desarrollan ondas de choque simétricas en los puntos A y A' de la entrada. Estas ondas se extienden a lo largo del canal formando ángulos de onda β_1, se intersecan en B sobre la línea central del canal y, finalmente, luego de algunas modificaciones, alcanzan las paredes opuestas en C y C'. En las regiones ABC y $A'BC'$ el flujo procede a través de un nuevo campo caracterizado por el número de Froude $\mathbf{F}_2$. Nótese que al final de la contracción se crean perturbaciones negativas en los puntos D y D' y se volverán más complicadas aguas abajo. En un buen diseño de contracción es posible minimizar las perturbaciones aguas abajo. Esto puede hacerse dirigiendo las ondas de choque hacia las paredes opuestas en D y D', anulando teóricamente las perturbaciones negativas creadas de nuevo. Como resultado el flujo se tornará tranquilo en el canal de aguas abajo. Esta es la situación que se muestra en la figura 17-9*b*. Mediante la geometría de esta condición, puede demostrarse que la longitud de la contracción es

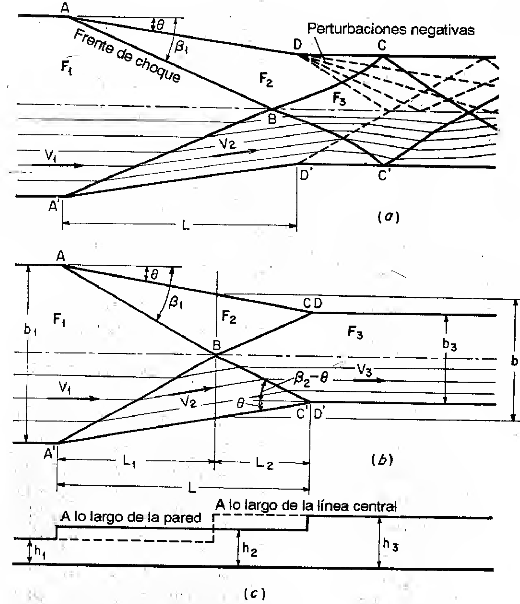


Figura 17-9. Diseños de contracciones con paredes rectas (*según Ippen y Dawson* [6]). (*a*) Patrones generales de perturbación; (*b*) perturbación mínima hacia aguas abajo; (*c*) perfil esquemático.

$$L = \frac{b_1 - b_3}{2 \tan \theta} \tag{17-8}$$

Mediante la continuidad del flujo, $b_1y_1V_1 = b_3y_3V_3 = Q$, o

$$\frac{b_1}{b_3} = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^{3/2} \left(\frac{\mathbf{F}_3}{\mathbf{F}_1}\right) \tag{17-9}$$

Las ecuaciones anteriores, la figura 15-23 o la ecuación (15-24) pueden utilizarse para diseñar una contracción recta con perturbaciones mínimas aguas abajo. En general, valores altos de $\mathbf{F}_1$ y valores bajos de y_3/y_1 darán contracciones largas. Para reducir la longitud de la contracción el valor recomendable de y_3/y_1 parece localizarse entre 2 y 3, siempre y cuando que $\mathbf{F}_3$ permanezca muy por encima del valor crítico.

Ejemplo 17-1. Diseñe una contracción recta que conecte dos canales rectangulares de 12 pies y 6 pies de ancho. El caudal a través de la contracción es 200 pies³/s. La profundidad del flujo de aproximación es 0.70 pies.

Solución. Como Q = 200 pies³/s y $A = 12 \times 0.70 = 8.4$ pies², la velocidad de flujo de aproximación es $V_1 = 200/8.4 = 23.8$ pies/s. El número de Froude es $\mathbf{F}_1 = 5.01$.

Suponga $y_3/y_1 = 2$ y tome $b_1 = 12$, $b_3 = 6$ y $\mathbf{F}_1 = 5.01$; la ecuación (17-9) da $\mathbf{F}_3 = 3.54$. Este valor no puede ser menor que 1.0 o aún muy cercano a 1.0.

Ahora, suponga un valor de θ, por ejemplo, igual a 15° y tome $\mathbf{F}_1 = 5.01$; el diagrama de la figura 15-23 da $y_2/y_1 = 2.60$ y $\mathbf{F}_2 = 2.8$.

Una segunda determinación utilizando el mismo $\theta = 15°$ y remplazando $\mathbf{F}_1$ por $\mathbf{F}_2 = 2.8$ produce un valor de $y_3/y_2 = 1.80$ y $\mathbf{F}_3 = 1.77$ utilizando la figura 15-23 (que corresponde a y_2/y_1 y $\mathbf{F}_2$, respectivamente, en el diagrama). Sin embargo, estos valores no siempre representan la condición real del flujo en el diseño requerido, debido a que la condición de flujo aguas abajo puede complicarse por perturbaciones negativas originadas en los puntos D y D'.

Multiplique y_2/y_1 por y_3/y_2; el primer valor de prueba de y_3/y_1 es igual a $2.60 \times 1.80 = 4.68$. Como éste no coincide con el valor supuesto (es decir, 2.00), el procedimiento debe repetirse con un nuevo valor de θ hasta que se alcance una igualdad entre el y_3/y_1 supuesto y el valor obtenido en la prueba.

Después de varios intentos, el ángulo θ correcto es 5°. Con $\theta = 5°$ y $\mathbf{F}_1 = 5.01$ el diagrama de la figura 15-23 da $y_2/y_1 = 1.50$ y $y_3/y_2 = 1.35$. El valor de $y_3/y_1 = 1.50$ 5 $1.35 = 2.03$, que es bastante cercano al valor supuesto.

Mediante la ecuación (17-8), la longitud de la contracción es 34.3 pies.

17-4. Expansiones en flujo supercrítico. Estas expansiones por lo general ocurren en lugares donde el flujo emerge con alta velocidad desde un conducto cerrado, una compuerta deslizante, un vertedero o una rápida empinada. Si la expansión diverge demasiado rápido, la mayor parte del flujo no seguirá las fronteras sólidas. Estudios hechos por Hom-ma y Shima [7] indican que puede ocurrir la separación del flujo similar a la que se muestra en la figura 17-10. Las superficies de separación señaladas por las líneas punteadas actúan como fronteras sólidas dentro de las cuales el flujo tiene características similares a aquellas correspondientes a un canal de ancho decreciente. Si la divergencia de la expansión es demasiado gradual, se tendrá un desperdicio de material estructural. Además, si se producen

perturbaciones locales con alturas de onda grandes ocasionadas por una geometría de fronteras inapropiada, ya sea en la expansión o algo distante aguas abajo, los muros no confinarán el flujo. Por consiguiente un diseño satisfactorio para la expansión es de importancia práctica.

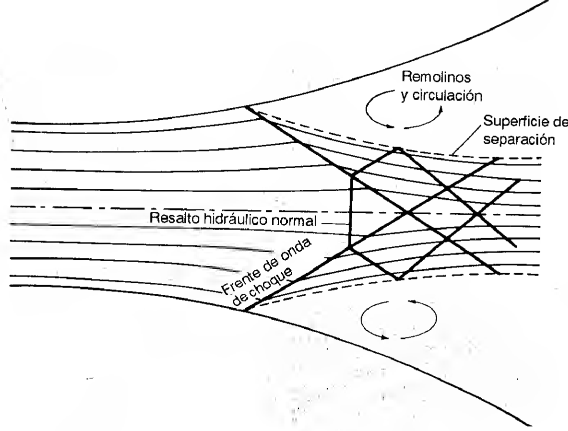


Figura 17-10. Separación del flujo en una expansión con divergencia rápida.

El mejor modo de estudiar una expansión particular de canal es mediante una investigación de ensayo y error en modelos físicos. Utilizando una aproximación analítica para cualquier expansión pueden construirse las líneas de corriente y los contornos de la superficie del agua por el método de las características (*véase* primera nota de pie de página de la sección 16-5), siempre que: 1) las paredes del canal sean verticales y su fondo sea horizontal, 2) la pérdida de energía debida a la resistencia y las fronteras sólidas sean insignificantes y 3) la presión se encuentre distribuida hidrostáticamente. Debido a estas limitaciones, el método analítico sólo puede dar resultados aproximados.

A partir de estudios experimentales y analíticos, Rouse, Bhoota y Hsu [8] obtuvieron los siguientes resultados, que pueden ser útiles para el diseño preliminar de expansiones en canales con flujo supercrítico:

1. La generalización de los datos experimentales para expansiones de canal puede expresarse mediante la relación

$$\frac{y}{y_1} = f\left(\frac{x}{b_1\mathbf{F}_1}, \frac{z}{b_1}\right) \tag{17-10}$$

donde y es la profundidad de flujo, y_1 es la profundidad y $\mathbf{F}_1$ es el número de Froude del flujo de aproximación, b_1 es el ancho del canal, x es la coordenada longitudinal

medida desde la sección de salida, y z es la coordenada lateral medida desde la línea central del canal.

2. Para expansiones abruptas se desarrolló un diagrama adimensional (figura 17-11) que generaliza los datos experimentales en la relación funcional de la ecuación (17-10) y puede utilizarse para el diseño y el análisis preliminar de una expansión abrupta.

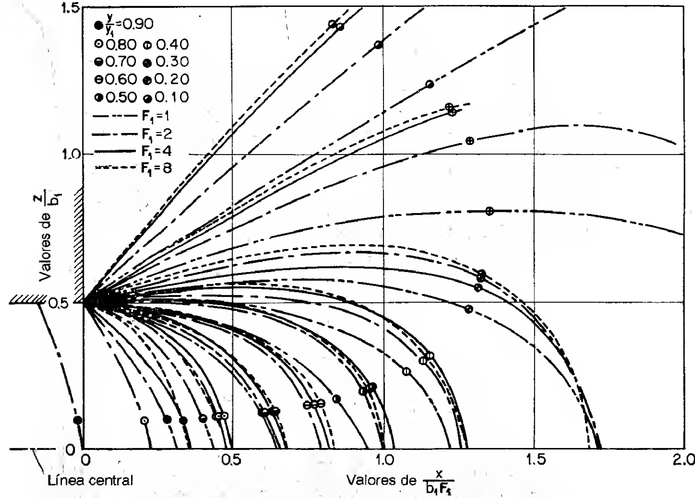


Figura 17-11. Líneas de nivel superficiales generalizadas para flujo supercrítico a través de una expansión abrupta (*según Rouse, Bhoota y Hsu* [8]).

3. Según los experimentos, la forma de las fronteras más satisfactoria para una expansión eficiente es

$$\frac{z}{b_1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1\mathbf{F}_1}\right)^{3/2} + \tfrac{1}{2} \qquad (17\text{-}11)$$

Para expansiones diseñadas así, la figura 17-12 muestra las líneas de nivel superficial para un valor medio de b_1/y_1 y diferentes valores de $\mathbf{F}_1$. Esta forma de la frontera de expansión corresponde más o menos a la de las líneas de corriente que contienen casi el 90% del flujo. Nótese que el inicio de esta expansión es suficientemente gradual para reducir al mínimo el efecto de la distribución de presiones hidrostática, de tal modo que el factor b_1/y_1 deja de ser una variable esencial. De esta forma, el incremento general en el ángulo de la frontera es lo bastante grande para eliminar la formación de ondas cruzadas, pero no para causar un cambio indebido en la profundidad a través de cualquier sección normal.

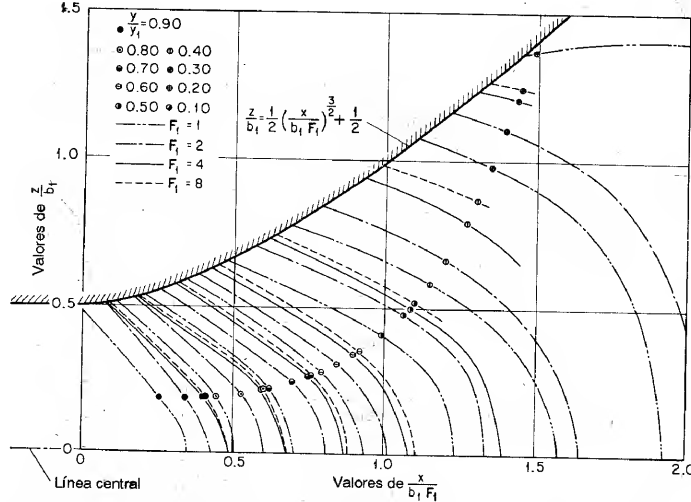


Figura 17-12. Líneas de nivel superficiales generalizadas para flujo supercrítico a través de una expansión gradual (*según Rouse, Bhoota y Hsu* [8]).

La frontera representada por la ecuación (17-11), sin embargo, divergirá indefinidamente. Para propósitos prácticos, a las paredes divergentes de la expansión a menudo seguirán muros paralelos con transiciones abruptas o graduales. Como resultado, pueden producirse perturbaciones positivas aguas abajo, que cuando las circunstancias prácticas lo permiten, pueden eliminarse mediante un resalto hidráulico al final de la expansión o cerca de ella. Para evitar la asimetría peligrosa del flujo en esta parte, el resalto puede estabilizarse mediante una caída en el fondo del canal (sección 15-10).

4. La perturbación en el canal de aguas abajo también puede eliminarse si la transición mencionada antes se diseña con una curva inversa, bien proporcionada, en la curvatura de la pared. En este diseño, las perturbaciones positivas y negativas desarrolladas por el inverso de la curvatura pueden anularse una con respecto a las otras, de manera que el flujo se restablece con una uniformidad completa al final de la transición. La figura 17-13 muestra las curvas de frontera para este diseño, deducidas mediante el método de las características. A pesar de que estas curvas apenas representan las condiciones generalizadas, pueden utilizarse como guías en el diseño preliminar para dar tan poca angularidad al flujo final como sea consistente con los requerimentos prácticos de la longitud de transición.

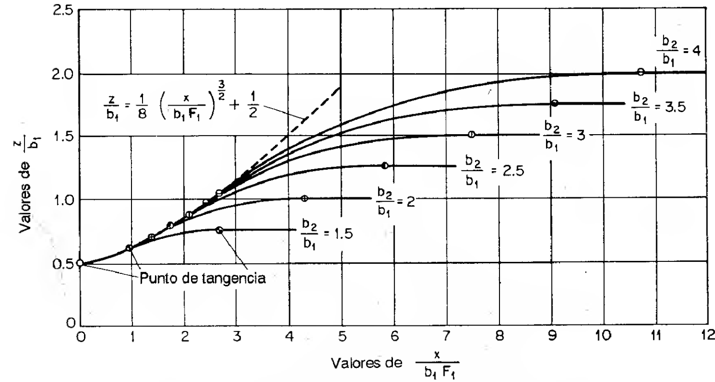


Figura 17-13. Curvas de frontera generalizadas para expansiones en canales determinadas mediante el método de las características (*según Rouse, Bhoota y Hsu* [8]). b_2 = ancho del canal aguas abajo

El U. S. Soil Conservation Service [9] también realizó pruebas sobre flujos supercríticos a través de expansiones en conjunto con el cuenco disipador SAF (sección 15-12). Las pruebas se hicieron sobre transiciones con paredes laterales rectas y una pendiente de canal del 1%, y sus principales conclusiones son:

1. Una longitud de aproximación en el canal antes de la transición igual a $5y_1$ es satisfactoria, donde y_1 es la profundidad del flujo de aproximación.
2. La máxima divergencia de los muros laterales permisible es 1 en $3\mathbf{F}_1$ si se necesita eliminar una altura excesiva de ondas cruzadas.
3. El uso de una expansión antes de un cuenco disipador SAF es económico.
4. Se desarrollaron cuadros de diseño que dan información sobre las curvas de nivel de profundidad relativas y las condiciones de flujo dentro de la transición.

17-5. Constricciones. Una constricción en un canal abierto constituye un tramo con una reducción súbita en la sección transversal del canal. Su efecto sobre el flujo depende principalmente de la geometría, del caudal y del estado de flujo. Por lo general el fenómeno es tan complicado que el patrón de flujo resultante no es fácil objeto de una solución analítica. Sin embargo, es posible una solución práctica mediante una investigación experimental sistemática.

El flujo a través de una constricción puede ser subcrítico o supercrítico. Cuando es subcrítico la constricción inducirá un efecto de remanso pronunciado que se extiende una gran distancia hacia aguas arriba (figuras 17-14*a* y 17-14*b*), y cuando es supercrítico, sólo perturbará la superficie del agua que es adyacente al lado de aguas arriba de la construcción y no extenderá su efecto muy lejos hacia aguas arriba (figura 17-14*c*). Si la superficie del agua hacia el lado aguas arriba se represa hasta una profundidad mayor que la crítica, la superficie formará un perfil $S1$, que se extiende hacia aguas arriba una pequeña distancia, y que termina con un resalto hidráulico (figura 17-14*d*).

Una sección crítica de control puede o no existir en la constricción, según la magnitud de la energía E_n de flujo normal en comparación con la energía E_c' del flujo crítico en ella. Cuando una constricción es corta, esta situación se muestra en la figura 17-14, y cuando es larga, ella misma constituye un canal. La sección de control, cuando existe, puede localizarse en el extremo de aguas arriba o en el de aguas abajo, dependiendo de si la pendiente del canal angostado es empinada o suave. La entrada y la salida de la constricción entonces actúan como una contracción o una expansión, respectivamente. La canaleta de flujo crítico (sección 4-6) representa un caso único de constricción de canal. El flujo de la canaleta puede ser libre o ahogado por la profundidad de salida. Existe una sección crítica en la garganta de la canaleta o cerca de ella sólo cuando el flujo es libre.

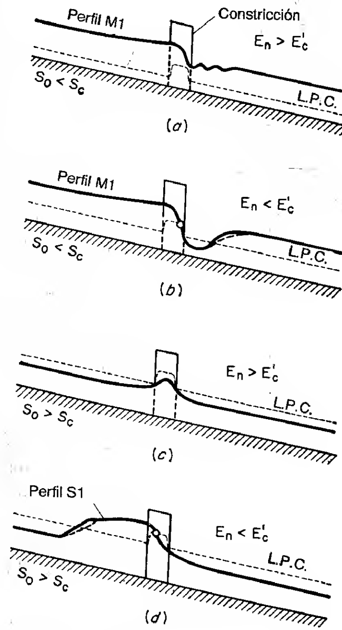


Figura 17-14. Constricción en un canal con flujo uniforme (*a, b*) con flujo subcrítico; (*c, d*) con flujo supercrítico.

Son muchas las investigaciones sobre el tema de flujo a través de constricciones, pero la mayor parte de ellas están relacionadas con flujo subcrítico. El *método de la abertura contraída*[4], para determinar caudales de crecientes es muy común para los ingenieros norteamericanos desde 1918 o aún antes, y se basa en la aplicación de las ecuaciones de energía y continuidad a un flujo a través de la constricción en el conducto de agua. La primera investigación de laboratorio en los Estados Unidos se cree que la desarrolló Lane [11], y trata de constricciones simples de flujo con números de Froude ligeramente superiores a aquellos a menudo encontrados en canales naturales. En años recientes*, se ha alcanzado un nuevo desarrollo en el estudio de constricciones de flujo subcrítico mediante una investigación fundamental completa realizada en el U. S. Geological Survey por Kindsvater, Carter y Tracy [12-15]. El método desarrollado por ellos produce resultados bastante exactos para diferentes condiciones determinadas y sin duda remplazará el método convencional de la apertura contraída en la práctica de ingeniería. Las siguientes dos secciones cubrirán los aspectos esenciales de este nuevo desarrollo.

* *Nota del traductor.* El autor se refiere a los años inmediatamente posteriores a la publicación de este texto.

[4] Houk [10] le dio a S. M. Woodward el crédito del desarrollo de este método para que lo utilizara el Miami Conservancy District. Otro método igualmente importante reportado por Houk es el de área-pendiente (sección 6-9).

17-6. Flujo subcrítico a través de constricciones. Cuando se introduce una constricción en el área a un flujo uniforme, controlado por fricción, en un canal prismático con inclinación suave (figura 17-15)[5], primero se desarrolla un perfil de remanso del tipo $M1$ aguas arriba de la constricción, y en ese extremo de la curva de remanso se supone la sección 0. Cerca de la constricción en la sección 1 el cuerpo central del agua empieza a acelerarse, y desacelera a lo largo de las fronteras exteriores, al igual que se crean zonas de separación en las esquinas adyacentes. Una aproximación adecuada para la localización de la sección 1 puede calcularse por medio de un punto localizado a una distancia de un ancho de abertura b desde el centro de ésta. Entre las secciones 0 y 1 el flujo es gradualmente variado.

En la constricción el flujo es rápidamente variado y se caracteriza por una notable aceleración tanto en la dirección normal como en la paralela a las líneas de corriente. La superficie longitudinal del agua cae con rapidez en esta región. La corriente viva se contrae hasta un ancho un poco menor que el ancho nominal de la abertura y los espacios entre esta corriente y los bordes de la constricción se convierten en zonas de separación ocupadas por remolinos. A medida que el agua pasa a través de la contracción, la corriente contraída alcanza un ancho mínimo en la sección 2, que corresponde a la vena contracta en un flujo en orificio. Después de ésta, la corriente viva se expande hasta alcanzar la sección 4 aguas abajo, donde se restablece el régimen de flujo uniforme en el canal con ancho total. Entre las secciones 3 y 4 el flujo es gradualmente variado. A lo largo del tramo entre las secciones 0 a 4, abarcadas por el efecto de remanso de la constricción, la pérdida total de energía es igual a la del flujo uniforme.

Para un análisis simple de las características del flujo, pueden suponerse las siguientes condiciones:

1. El fondo del canal es horizontal o casi horizontal.
2. Observaciones en laboratorio han demostrado que el nivel del agua en la vena contracta puede aproximarse al nivel en la sección 3, la cual se localiza en la cara de aguas abajo de la constricción. Por consiguiente, la profundidad $y2$ puede tomarse como y_3.
3. Se introduce un coeficiente de descarga en el análisis para relacionar el efecto total de la contracción, las pérdidas por remolino, la distribución no uniforme de velocidades y la distribución no hidrostática de presiones. La notación que se utiliza en el análisis se define como sigue:

h_e = pérdidas por remolino debidas a la turbulencia generada en las zonas de separación de aguas arriba; se supone que esta pérdida puede expresarse en términos de la altura de velocidad en la sección 3, o

$$h_e = k_e(V_3^2/2g)$$

donde k_e es un coeficiente.

[5] En la figura 17-15 se muestra que el flujo a través de la constricción es subcrítico, como en la figura 17-14a. Este es el caso encontrado a menudo en problemas prácticos. Si la superficie del agua cae por debajo de la línea de profundidad crítica en la constricción, ocurrirá flujo supercrítico, como se muestra en la figura 17-14*b*. Para restablecer el flujo subcrítico aguas abajo, se desarrollará un resalto hidráulico en ese mismo lado de la constricción. Sin embargo, este método no es aplicable a este caso.

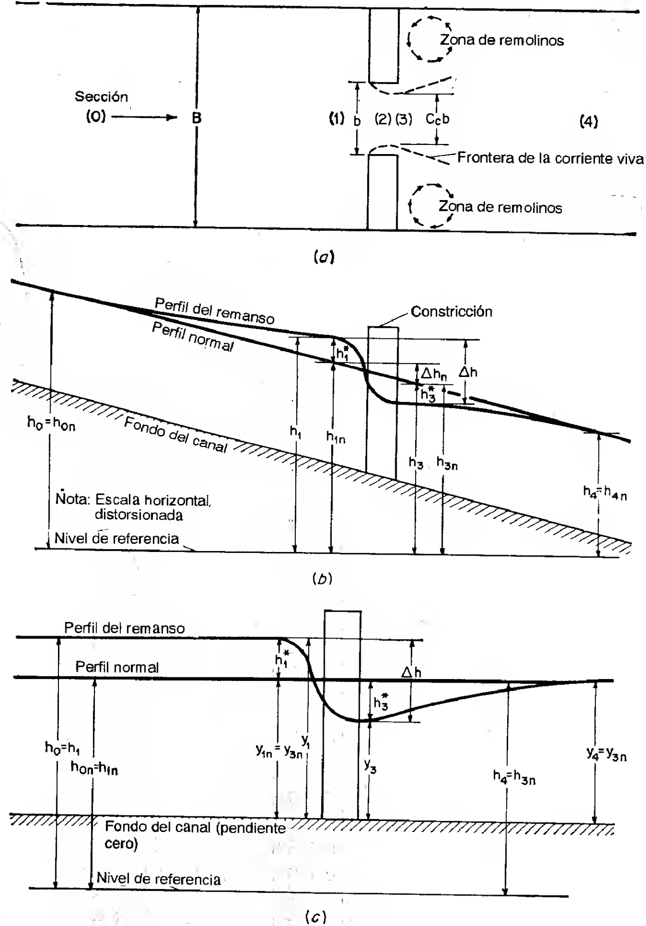


Figura 17-15. Esquema de definición para el flujo a través de una constricción (*según Tracy y Carter* [14]). (*a*) Planta; (*b*) alzada; (*c*) alzada adaptada a la suposición de pérdidas por fricción iguales a cero.

α_1 y α_3 = coeficientes de energía en las secciones 1 y 3, respectivamente.

α_1' y α_3'= coeficientes de presión en las secciones 1 y 3, respectivamente; se supone que la desviación de la distribución hidrostática de presiones puede expresarse en términos de la altura de velocidad en la sección 3. Luego,

$$\alpha_3' y_3 = k_p(V_3^2/2g) + y_3$$

donde k_p es un coeficiente responsable de la distribución no hidrostática de presiones.

C_c = coeficiente de contracción en la sección 3.

Al aplicar la ecuación de energía a las secciones 1 y 3 (figura 17-15*c*), entonces

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \alpha_1' y_1 = \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \alpha_3' y_3 + h_e + h_f \qquad (17\text{-}12)$$

donde h_f es la pérdida por fricción. Luego, al suponer $\alpha_1' = 1, \alpha_3' y_s = k_p(V_3^2/2g) + y_3$ y $h_e = k_e(V_3^2/2g)$,

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = (\alpha_3 + k_p + k_e) \frac{V_3^2}{2g} + y_3 + h_f \qquad (17\text{-}13)$$

El caudal a través de la sección 3 es

$$Q = C_c A_3 V_3 \qquad (17\text{-}14)$$

donde A_3 es el área mojada en la sección 3. Al resolver las ecuaciones (17-13) y (17-14) para el caudal,

$$Q = CA_3 \sqrt{2g\left(\Delta h - h_f + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}\right)} \qquad (17\text{-}15)$$

donde $\Delta h = y_1 - y_3$ y C es un coeficiente de descarga total, igual a

$$C = \frac{C_c}{\sqrt{\alpha_3 + k_e + k_p}} \qquad (17\text{-}16)$$

Ésta es una expresión teórica. Para usos prácticos, el valor de C puede expresarse mediante una función adimensional y evaluarse experimentalmente.

Por medio de un análisis dimensional de los factores geométricos e hidráulicos esenciales que gobiernan el flujo, puede demostrarse que C se expresa como una función de los factores, o

$$C = f[m, \mathbf{F}_3, r/b, W/b, \theta, \phi, (y_a + y_b)/2b, x/b, E, e, t/(y_3 + \Delta h), j, L/b] \qquad (17\text{-}17)$$

Los factores hidráulicos contenidos en esta función representan los diferentes efectos físicos siguientes:

1. El efecto de la contracción del canal se representa mediante la *relación de contracción m*. Esta relación es igual a $1 - K_b/K_B$, en la cual K_B es la conductividad de la sección no contraída de aproximación 1 con un caudal normal, y K_b lo es de la sección contraída 3, que tiene la misma profundidad normal y las características de rugosidad de la sección de aproximación. Para secciones rectangulares, una de aproximación de ancho B y otra contraída de ancho b, esta relación es $m = 1 - b/B$. Puede definirse una *relación de conductividad* σ como 1 – m. Luego $\sigma = 1$ o $m = 0$ cuando no existe constricción.

2. El número de Froude representa su efecto en la sección 3, o $\mathbf{F}_3 = Q/(A_3\sqrt{g y_3})$. Es necesario suponer un caudal para el cálculo inicial del valor de $\mathbf{F}_3$. El valor final de $\mathbf{F}_3$ puede determinarse por aproximaciones sucesivas. Si este valor es mayor que 0.8, pueden ocurrir velocidades críticas o supercríticas en la sección 3; en este caso el método descrito es inaplicable.

3. El efecto del redondeo de los estribos de entrada se representa por r/b, donde r es el radio del redondeo de la esquina de los estribos de entrada para constricciones con caras verticales.

4. El efecto de los chaflanes de los estribos se representa por W/b y θ, donde W es la longitud del muro convergente medido en una dirección normal a la sección 3, y θ es el ángulo agudo entre el muro inclinado de salida y el plano de la constricción.

5. El efecto de angularidad de constricción se representa por ϕ, que es el ángulo agudo entre el plano de la constricción y una línea normal a la trayectoria de la corriente.

6. El efecto de las profundidades laterales de los estribos se representa mediante $(y_a + y_b)/2b$, donde y_a y y_b son las profundidades de agua al pie de cada estribo.

7. El efecto de la pendiente lateral de los estribos se representa por x/b y E. El valor de x es la distancia horizontal desde el punto de intersección del estribo y las pendientes de los terraplenes hasta un punto en el terraplén de aguas arriba que tiene la misma elevación que la superficie del agua en la sección 1. El valor E representa la pendiente de los terraplenes y es una relación de la distancia horizontal a la vertical.

8. El efecto de la excentricidad de la constricción se representa por e, que es igual a la relación K_a/K_b. La conductividad de la sección de aproximación completa puede subdividirse en la correspondiente a la sección contraída y en otras dos para las secciones laterales. Estas últimas se designan mediante K_a y K_b y la correspondiente a la sección contraída mediante K_c. Luego la conductividad total es $K_B = K_a + K_b + K_c$ y la relación K_a/K_b es una medida de la excentricidad de la constricción.

9. El efecto de la sumergencia de cualquier posible puente a través de la constricción se representa mediante $t/(y_3 + \Delta h)$, donde t es la distancia vertical entre la superficie del agua en la sección 1 y el elemento horizontal más bajo de un puente parcialmente sumergido, $\Delta h = h_1 - h_3$ (figura 17-23*b*).

10. El efecto de pilotes y pilares de puente se representa mediante j y L/b. El valor de j es igual a A_j/A_3, donde A_j es el área transversal vertical de los pilotes o pilares sumergidos en la contracción y A_3 es el área mojada de la sección 3. El valor

L es la longitud del estribo en la dirección de la trayectoria de la corriente, que varía según los diferentes tipos de abertura.

Para propósitos prácticos, el valor de C puede expresarse como

$$C = C'K_F K_r K_W K_\phi K_y K_x K_e K_t K_j \tag{17-18}$$

donde C' es el valor estándar del coeficiente de descarga correspondiente a una condición generalizada de todos los efectos antes mencionados; y donde las K son coeficientes que pueden utilizarse para ajustar el valor de C' a una condición no generalizada del número de Froude, del redondeo de la entrada, de los chaflanes, de la angularidad, de las profundidades laterales, de la pendiente lateral, de la sumergencia por puente y de los pilotes y pilares de puente, respectivamente. A partir de la investigación en laboratorio del U. S. Geological Survey [12], se desarrolló un conjunto de curvas para la determinación de estos coeficientes para cuatro tipos de constricciones diferentes (figuras 17-16 a 17-23).

Cuando el conducto de agua está contraído sólo por pilotes o pilares de puente, puede suponerse que $C' = 1$, y C se ajusta sólo mediante K_j. Para determinar K_j del diagrama (figura 17-23*c*), ubique entre la escala horizontal con el valor apropiado de m, luego muévase verticalmente hacia el valor de L/b, horizontalmente hasta la línea marcada con $j = 0.10$, verticalmente hasta el valor de j y horizontalmente hasta el valor de K_j. Si j es mayor que 0.10, puede hacerse un cálculo aproximado tomando $C = C'$ para determinado m y omitiendo K_j.

Es posible que ciertas combinaciones de los coeficientes empíricos aplicados a C' puedan dar un valor de C mayor que 1.0. Sin embargo, en tales casos debe utilizarse un valor de $C = 1.0$.

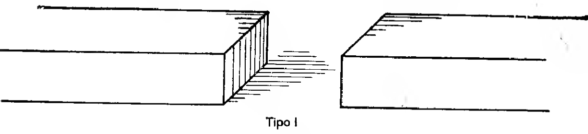
El término de pérdidas por fricción h_f en la ecuación de caudal, ecuación (17-15), representa la pérdida total de altura por fricción entre las secciones 1 y 3, que es igual a la suma de las pérdidas en el tramo de aproximación de longitud L_a desde la sección 1 hasta el lado de aguas arriba de la abertura contraída y las pérdidas en el tramo contraído de longitud L. Esta pérdida puede calcularse mediante

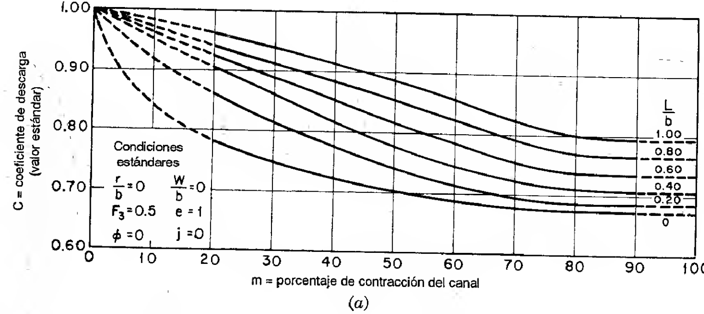
$$h_f = L_a\left(\frac{Q}{\sqrt{K_1K_3}}\right)^2 + L\left(\frac{Q}{K_3}\right)^2 \tag{17-19}$$

donde K_1 y K_3 son las conductividades totales de las secciones 1 y 3, respectivamente. Sustituya en la ecuación (17-15) la anterior expresión para h_f y Q/A_1 para V_1; de este modo el caudal puede expresarse como

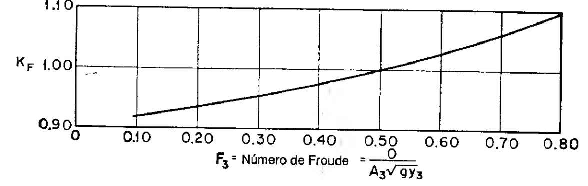
$$Q = 8.02CA_3\sqrt{\frac{\Delta h}{1 - \alpha_1C^2(A_3/A_1)^2 + 2gC^2(A_3/K_3)^2(L + L_aK_3/K_1)}} \tag{17-20}$$

Esta ecuación puede utilizarse para el cálculo del caudal requerido.

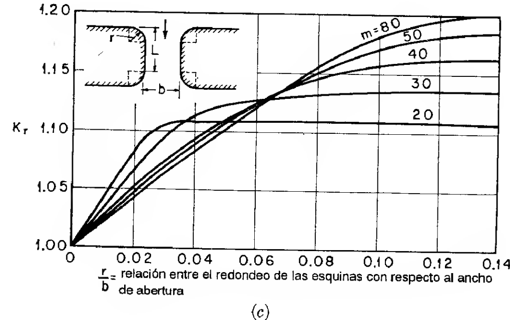




(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 17-16. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura tipo I, terraplenes verticales ($E = 0$) y estribos verticales (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con el número de Froude; (*c*) variación del coeficiente de descarga con el redondeo de la entrada.

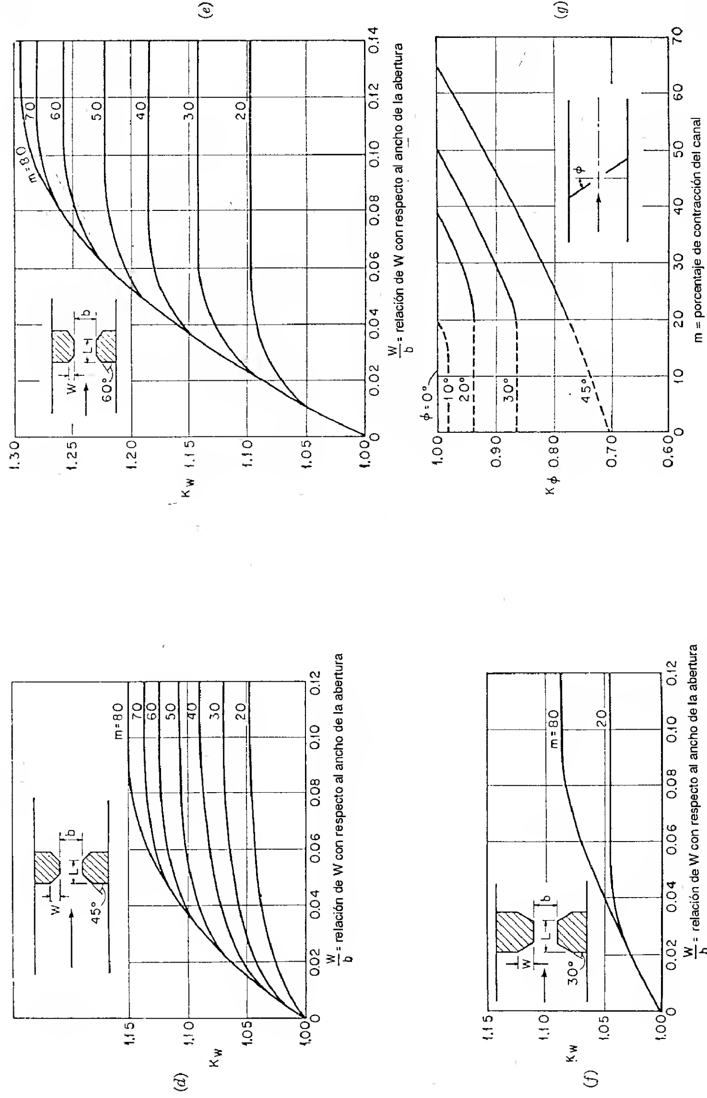


Figura 17-16 (*continuación*). (*d*) Variación del coeficiente de descarga con la longitud de los muros laterales de 45° o chaflanes; (*e*) variación del coeficiente de descarga con la longitud de los muros laterales de 60°; (*f*) variación del coeficiente de descarga con la longitud de los muros laterales de 30°; (*g*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad.

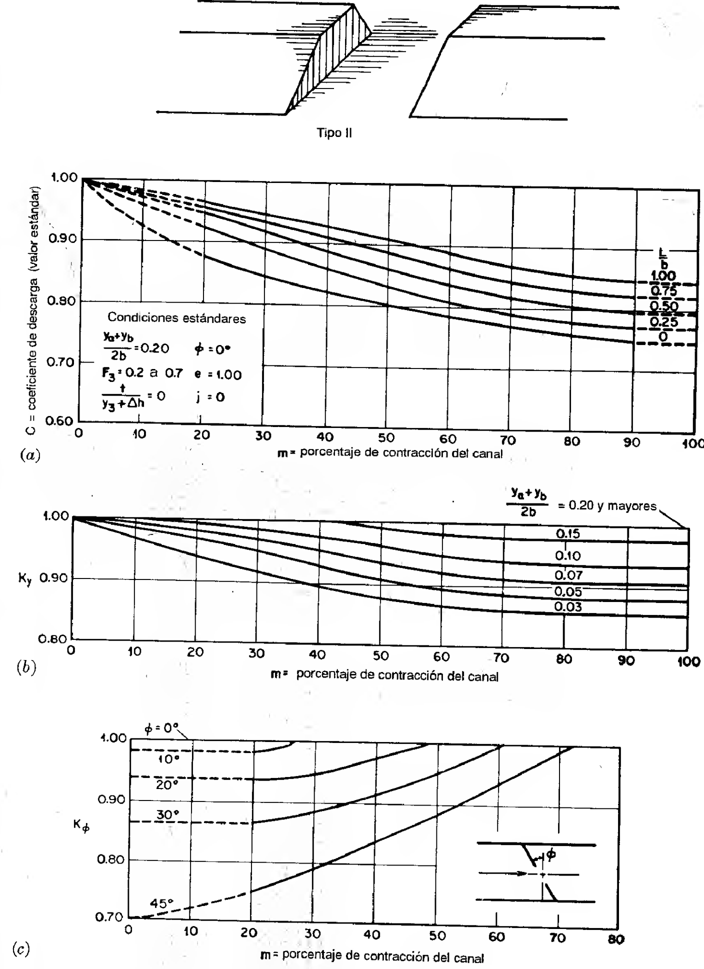


Figura 17-17. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo II, terraplenes con pendientes de 1:1 ($E = 1$) y estribos verticales (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la relación $(y_a + y_b)/2b$; (*c*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad.

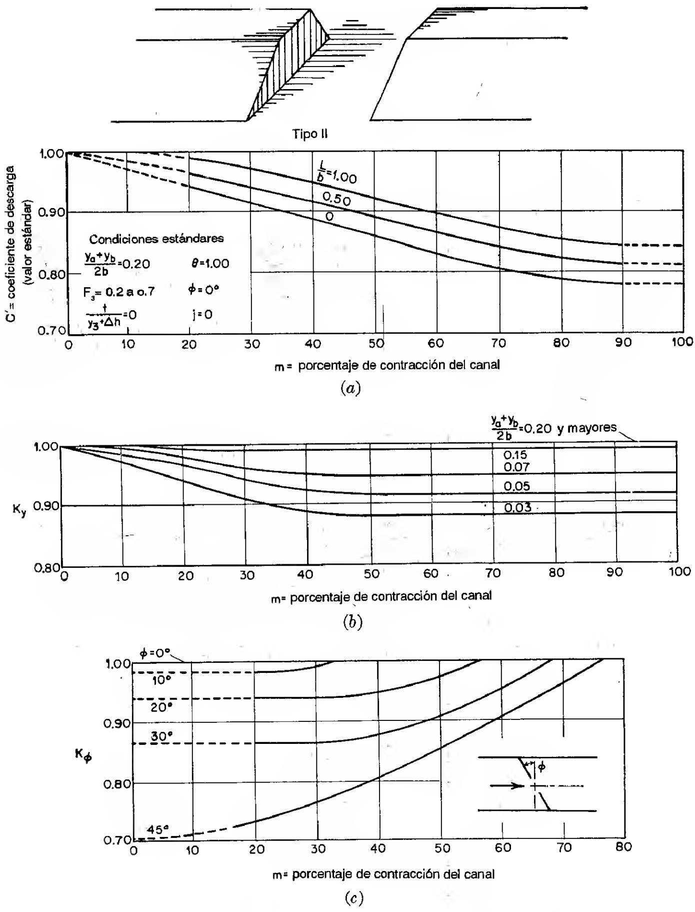


Figura 17-18. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo II, terraplenes con pendientes de 2:1 ($E = 2$) y estribos verticales (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la relación $(y_a + y_b)/2b$; (*c*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad.

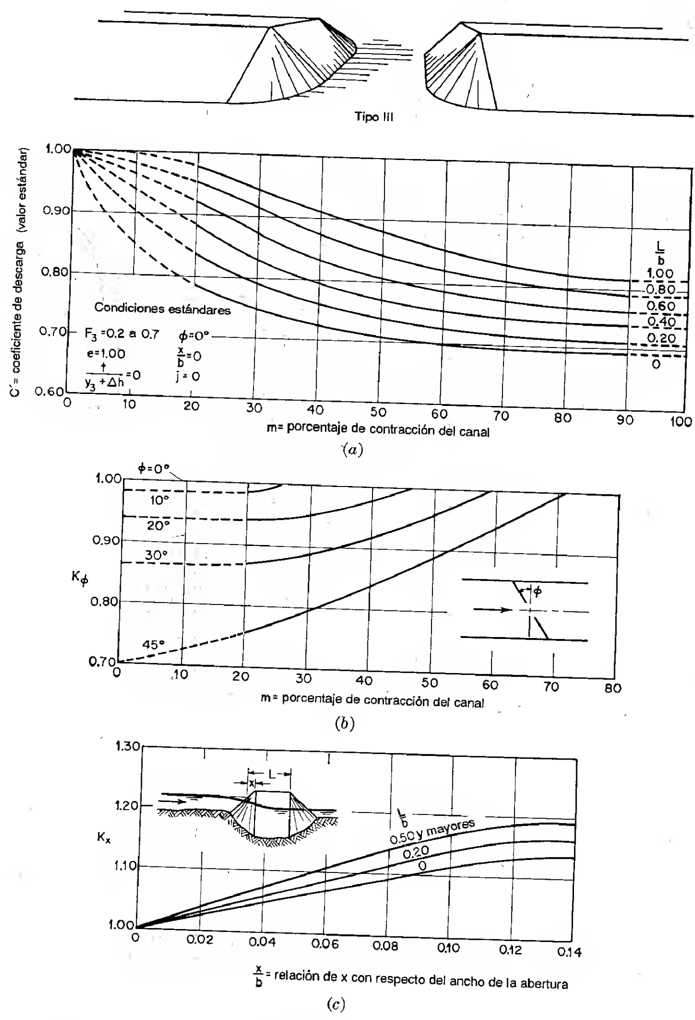
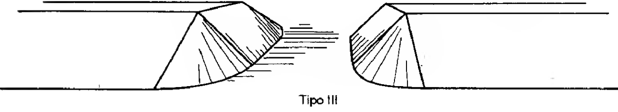
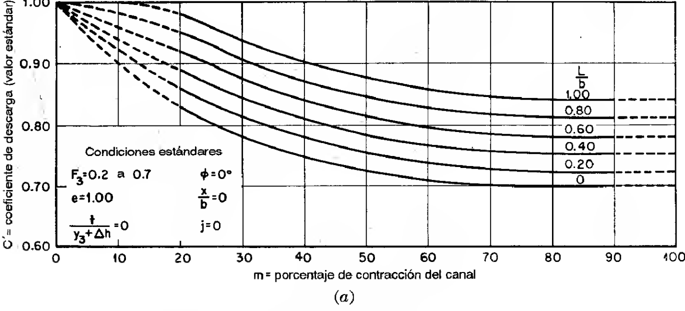


Figura 17-19. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo III, terraplenes y estribos con pendientes de 1:1 ($E = 1$) (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad; (*c*) variación del coeficiente de descarga con la relación x/b.





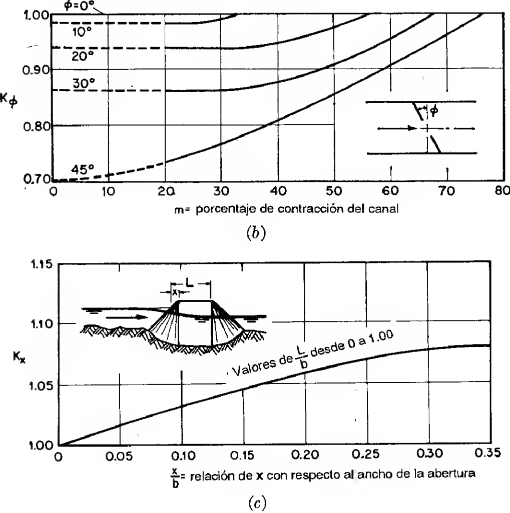
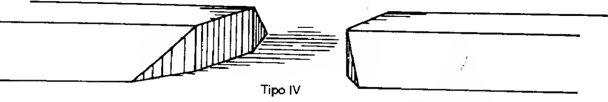
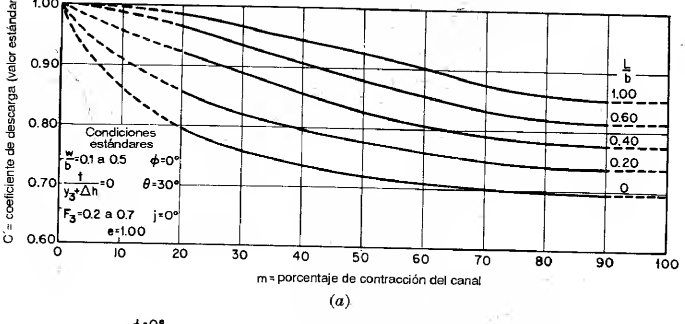


Figura 17-20. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo III, terraplenes y estribos con pendientes de 2:1 ($E = 2$) (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad; (*c*) variación del coeficiente de descarga con la relación x/b.





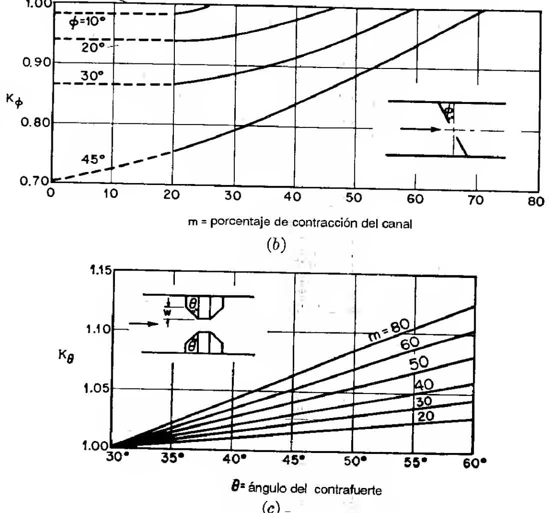
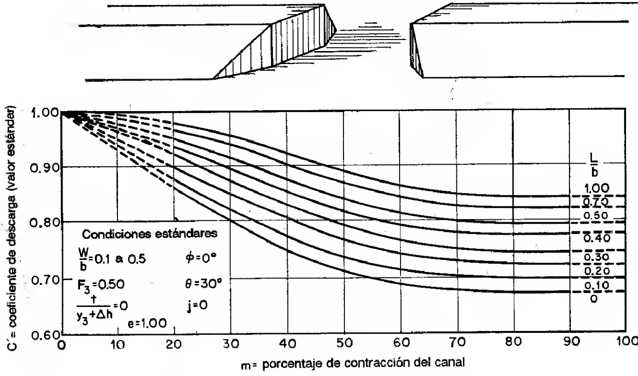
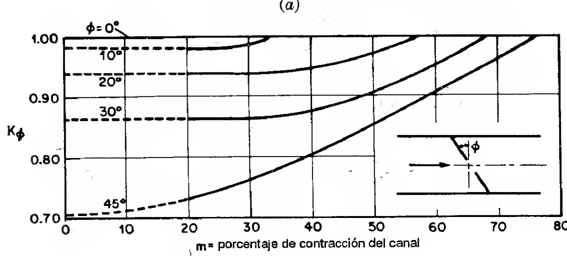
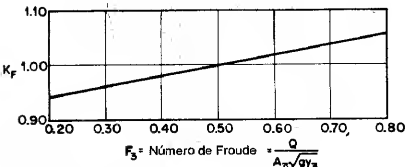


Figura 17-21. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo IV, terraplenes con pendientes de 1:1 ($E = 1$) y estribos verticales con muros de contrafuerte (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad; (*c*) variación del coeficiente de descarga con el ángulo del contrafuerte.







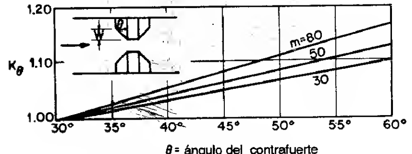
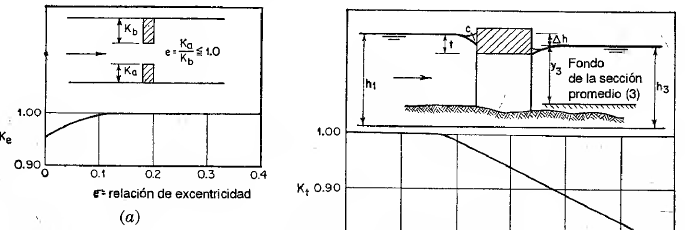
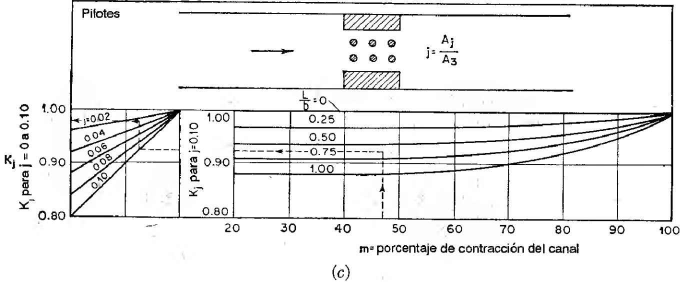


Figura 17-22. Coeficiente de descarga para la constricción con abertura del tipo IV, terraplenes con pendientes de 2:1 (E = 2) y estribos verticales con muros de contrafuerte (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Curva base para el coeficiente de descarga; (*b*) variación del coeficiente de descarga con la angularidad; (*c*) variación del coeficiente de descarga con el número de Froude; (*d*) variación del coeficiente de descarga con el ángulo del contrafuerte.





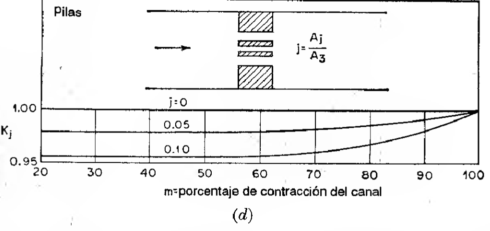


Figura 17-23. Curvas de K_e, K_t y K_j para constricciones con aberturas de los tipos I a IV (*U. S. Geological Survey* [12]). (*a*) Variación del coeficiente de descarga con la excentricidad; (*b*) variación del coeficiente de descarga con el grado de sumergencia del puente; (*c*) variación del coeficiente de descarga con el área de pilotes de puente; (*d*) variación del coeficiente de descarga con el área de pilas de puente.

Ejemplo 17-2. Calcule el caudal de creciente a través de la abertura en un puente de carretera en un tramo de un río recto y uniforme. Una sección localizada a 300 pies aguas arriba del puente tiene las características descritas en el ejemplo 6-1. En la sección contraída el puente cubre el canal principal, y el canal lateral está bloqueado en su totalidad por el terraplén de la carretera. La constricción creada de esta manera tiene 30 pies de largo y 180 pies de ancho y tiene una abertura del tipo I (figura 17-16). La superficie promedio del agua en la sección contraída se localiza 5 pies por debajo de la sección de aproximación. Se supone que tanto la sección principal como las laterales del canal son casi rectangulares. Luego las dimensiones son 180 pies de ancho

por 29.8 pies de profundidad para el canal principal y 390.4 pies de ancho por 14.6 pies de profundidad para el canal lateral.

Solución. A partir de los datos del ejemplo 6-1, la relación de contracción es $m = 1.24 \times 10^5/(3.14 \times 10^6) = 0.40$. Con este valor de m y $L/b = 30/180 = 0.17$ la tabla de la figura 17-16*a* da $C' = 0.76$ para una constricción con una abertura del tipo I. El coeficiente de ajuste debido a la excentricidad de la abertura es $K_e = 0.96$ y los otros coeficientes son iguales a 1.0, suponiendo $\mathbf{F}_3 = 0.5$. Luego $C = 0.76 \times 0.96 = 0.73$.

Para la sección contraída, $A_3 = 180 \times 24.8 = 4{,}460$ pies², $P_3 = 180 + 2 \times 24.8 = 229.6$ pies, $R_3 = 19.5$ pies, $n = 0.035$ y por consiguiente $K_3 = 1.38 \times 10^6$.

Otros datos requeridos son $\alpha_1 = 1.29$, $A_1 = 11{,}070$ pies², $K_1 = 3.14 \times 10^6$, $\Delta h = 5$ pies, $L = 30$ pies y $L_a = 300$ pies. Mediante la ecuación (17-20), $Q = 60{,}000$ pies³/s.

El cálculo anterior se basa en la condición estándar de que $\mathbf{F}_3 = 0.5$. Ahora, $\mathbf{F}_3 = 0.475$, de modo que es necesario repetir el cálculo para el ajuste de $\mathbf{F}_3$. Mediante aproximaciones sucesivas, el Q final es 59,500 pies³/s. En el caso de aberturas del tipo II y III, C no es una función significativa de $\mathbf{F}_3$; por consiguiente, no se necesitan aproximaciones sucesivas para la determinación de Q.

17-7. Efecto de remanso debido a una constricción. En la figura 17-15 el incremento h_1^* (designado de aquí en adelante también mediante h^*) en la superficie del agua desde el nivel normal hasta el nivel de remanso en la sección 1 se conoce como *remanso de la constricción*. La distancia Δh es la diferencia en elevación de la superficie del agua entre las secciones 1 y 3. Con la ecuación (17-15) puede demostrarse que el valor de Δh es

$$\Delta h = \frac{V_3^2}{2gC^2} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_f \qquad (17\text{-}21)$$

La relación $h^*/\Delta h$ se conoce como *relación de remanso*, que es una función de la rugosidad del canal, del porcentaje de contracción del mismo y de la geometría de la constricción. Por medio de los principios de continuidad, energía y *momentum* es posible obtener una solución aproximada para la relación de remanso bajo la suposición de que las pérdidas por fricción en la frontera normal son cero. Sin embargo, puede lograrse una solución más práctica al problema mediante investigación de laboratorio.

Tracy y Carter [14] realizaron una investigación en laboratotio en el Georgia Institute of Technology y en la University of Illinois sobre el efecto de remanso debido a constricciones con muros verticales y con estribos en arista viva. Los datos experimentales pueden graficarse como se muestran en la figura 17-24 para indicar la afinidad entre la relación de remanso, el n de Manning y la relación de contracción m. Nótese que la rugosidad del canal relativamente no es importante como un factor para determinar la relación de remanso. De hecho, el límite del cambio de ésta debido a la rugosidad se alcanza con un n cercano a 0.050. La investigación de laboratorio también revela que la influencia de la forma de la sección transversal sobre la relación de remanso está incluída en la relación de contracción.

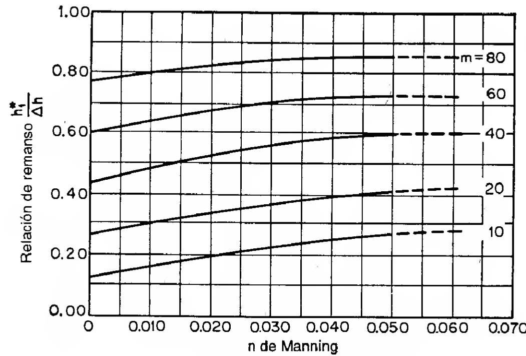


Figura 17-24. Efecto de la rugosidad del canal sobre la relación de remanso para constricciones del tipo básico (*según Tracy y Carter* [14]).

La relación de remanso de la figura 17-24 es para una constricción del tipo básico, es decir con muros verticales y estribos en arista viva. La relación de remanso para otros tipos de constricción puede obtenerse multiplicando ésta relación por un factor de ajuste k_a, que es una función de la relación de contracción m y de la relación $C/C_{\text{básico}}$. $C_{\text{básico}}$ y C son, respectivamente, los coeficientes de descarga para los tipos básicos y para otros tipos de constricciones que pueden determinarse mediante el método descrito en la sección anterior. El valor de $C_{\text{básico}}$ puede obtenerse directamente de las figuras 17-16*a* y 17-16*b*. Con base en datos experimentales, en la figura 17-25 se muestra la relación entre k_a, m y $C/C_{\text{básico}}$.

Ejemplo 17-3. Una corriente que conduce un caudal de 50,000 pies³/s en niveles de creciente fluye a través de una constricción simétrica con una abertura del tipo I que reduce el ancho normal del conducto de agua de 400 a 350 pies. Si la profundidad normal de flujo promedio en la sección no contraída es 20 pies, ¿cuál será la altura del remanso causado por la constricción? La abertura de ésta tiene 30 pies de longitud. El coeficiente de rugosidad del canal es $n = 0.035$ y $\alpha_1 = 1.10$.

Solución. La relación de contracción es $m = 50/400 = 0.125$. Con $n = 0.035$ la tabla de la figura 17-24 da $h^*_1/\Delta h = 0.26$. Con $L/b = 30/350 = 0.086$ y $\mathbf{F}_3 = 0.5$, el cuadro dela figura 17-16*a* da $C' = C = 0.85$.

Al tomar una sección de aproximación 350 pies aguas arriba de la constricción, la pendiente de fricción entre esta sección y la contraída puede estimarse utilizando la ecuación de Manning $S_f = Q^2n^2/2.22A^2R^{4/3}$. Ahora $Q = 50{,}000$ pies³/s, $n = 0.035$, $A = 400 \times 20 = 8{,}000$ pies² y $R = 18.2$ pies; por consiguiente, $S_f = 0.000448$. La pérdida por fricción es $h_f = 0.000448 \times 350 = 0.16$.

Al suponer $h^*_1 = 0.20$, $\Delta h = 0.20/0.26 = 0.77$. Con $A_3 = 350 \times 19.43 = 6{,}800$ pies² y $C = 0.87$, $V_3 2/2g\,C^2 = 1.11$. Mediante la ecuación (17-21), $\Delta h = 1.11 - 0.59 + 0.16 = 0.68$. Este valor es menor que el valor de prueba 0.77. Luego el cálculo debe repetirse hasta que se alcance la exactitud necesaria. Sin embargo, antes de que esto se haga, el valor de C debe ajustarse para $\mathbf{F}_3$. Ahora $\mathbf{F}_3 = 50{,}000/(6{,}800 \times \sqrt{32.2 \times 19.43}) = 0.29$. Utilizando la figura 17-16*b*, $C = 0.87 \times 0.955 = 0.83$. Luego $V_3^2/2g\,C^2 = 1.22$ y $\Delta h = 0.79$. Éste es cercano a 0.77, luego no se requiere un cálculo repetido mediante aproximaciones sucesivas.

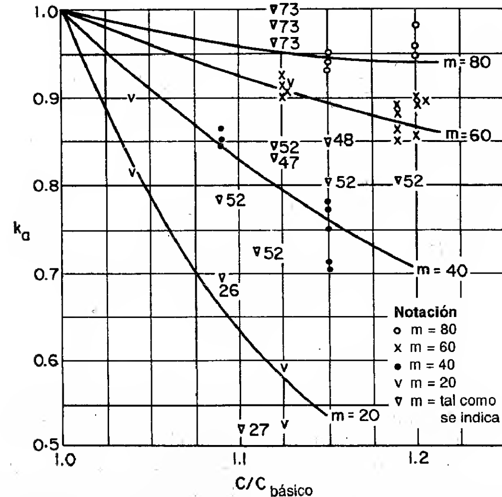


Figura 17-25. Efecto de la geometría de la constricción en la relación de remanso (*según Tracy y Carter* [14]).

17-8. Flujo a través de alcantarillas (culverts). Una alcantarilla es un tipo único de constricción y su entrada es una clase especial de contracción. Actúa como un canal abierto siempre y cuando el flujo sea parcialmente lleno. Las características de flujo son muy complicadas, debido a que éste es controlado por muchas variables, incluidos la geometría de entrada, la pendiente, el tamaño, la rugosidad, las condiciones de profundidad de aproximación y de salida, etc. Luego una adecuada determinación de flujo a través de una alcantarilla debe hacerse mediante investigaciones de laboratorio o de campo.

Yarnell, Nagler y Woodward [16] fueron pioneros notables que hicieron más de 3,000 pruebas de flujo en diferentes alcantarillas de secciones circular y cuadrada. Más tarde, Mavis [17] hizo pruebas con alcantarillas de sección circular con tubos lisos; Straub y Morris [18-20] y Straub, Anderson y Bowers [21, 22], con alcantarillas circulares hechas de tubos corrugados o tubos de concreto; y Shoemaker y Clayton [23], con alcantarillas cuadradas estándar. Además, se desarrollaron pruebas en el U. S Bureau of Standards, en una investigación experimental completa sobre el comportamiento hidráulico de alcantarillas circulares de uso común, como lo reportó French [24-26].

Una alcantarilla fluirá llena cuando su salida se encuentre sumergida, o cuando no esté sumergida pero la profundidad a la entrada es alta y su cuerpo es largo. De acuerdo con investigaciones en laboratorio, la entrada de una alcantarilla ordinaria

no se sumergirá si la profundidad de entrada es menor que un cierto valor crítico, designado mediante H^*, en tanto que la salida no se encuentre sumergida. El valor de H^* varía desde 1.2 a 1.5 veces la altura de la alcantarilla, según las condiciones de entrada, las características del cuerpo de la alcantarilla y la condición de aproximación. Para un análisis preliminar, puede utilizarse el límite superior $H^* = 1.5d$, donde d es la altura de la alcantarilla, debido a que los cálculos han demostrado que, cuando la sumergencia es incierta, puede obtenerse una buena aproximación suponiendo que la entrada no está sumergida.

Las investigaciones en laboratorio también indican que una alcantarilla, a menudo con un borde cuadrado en la parte superior de la entrada, no fluirá llena aún si la entrada se encuentra por debajo del nivel de aguas arriba cuando la salida no está sumergida. En estas condiciones, el flujo que entra a la alcantarilla se contraerá hasta una profundidad menor que la altura del cuerpo de ella de manera muy similar a la contracción del flujo en la forma de un chorro por debajo de una compuerta deslizante. Este chorro de alta velocidad continuará a lo largo de toda la longitud del cuerpo, pero su velocidad se reducirá poco a poco a medida que se pierde altura por fricción. Si la alcantarilla no es lo suficientemente larga para permitir que la expansión del flujo por debajo de la contracción suba y llene todo el cuerpo, nunca fluirá llena. Tal alcantarilla se considera *hidráulicamente corta*. De otra manera, es *hidráulicamente larga*, debido a que fluirá llena, como una tubería.

Que una alcantarilla sea hidráulicamente corta o larga no puede determinarse sólo con la longitud del cuerpo. Ello depende de otras características, como la pendiente, el tamaño, la geometría de entrada, el nivel de agua en el lado aguas arriba, las condiciones de entrada y salida, etc. Una alcantarilla puede convertirse en hidráulicamente corta, es decir, puede fluir parcialmente llena, aún cuando el nivel de agua en el lado aguas arriba es mayor que su valor crítico. Para esta situación, Carter [27] preparó unas tablas (figuras 17-26 y 17-27) que pueden utilizarse para distinguir entre una alcantarilla hidráulicamente corta y otra hidráulicamente larga. En condiciones especiales, una alcantarilla hidráulicamente corta con entrada sumergida puede cebarse de manera automática y fluir llena. De acuerdo con las investigaciones de laboratorio hechas por Li y Patterson [28], esta acción de autocebado se debe a un aumento del agua hasta la parte superior de la alcantarilla causado en la mayor parte de los casos por un resalto hidráulico, el efecto de remanso de salida o una onda superficial estacionaria desarrollada dentro del cuerpo de la alcantarilla.

Para propósitos prácticos, el flujo a través de una alcantarilla puede clasificarse en seis tipos, como se muestra en la figura 17-28. La identificación de cada uno de ellos puede explicarse de acuerdo con el siguiente diagrama:

A. Salida sumergida . . . . Tipo 1
B. Salida no sumergida
   1. Profundidad a la entrada mayor que el valor crítico
      a. Alcantarilla hidráulicamente larga . . . . Tipo 2
      b. Alcantarilla hidráulicamente corta . . . . Tipo 3

2. Profundidad de entrada menor que el valor crítico
   a. Profundidad de salida mayor que la profundidad crítica . . . Tipo 4
   b. Profundidad de salida menor que la profundidad crítica
      i. Pendiente subcrítica . . . . Tipo 5
      ii. Pendiente supercrítica . . . . Tipo 6

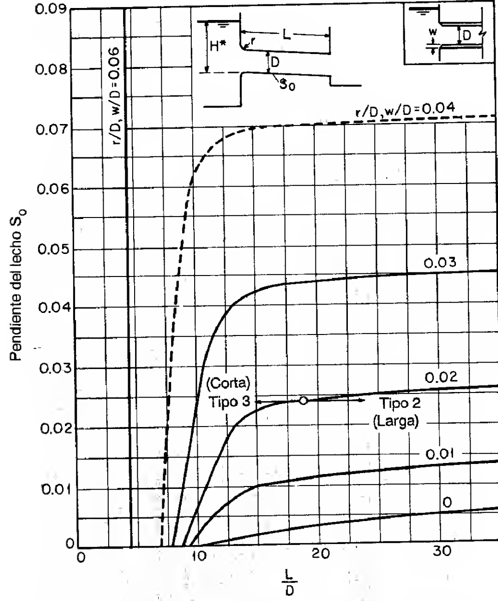


Figura 17-26. Criterios para alcantarillas cuadradas (*box culverts*) o circulares hidráulicamente cortas y largas con cuerpos en concreto y entradas cuadradas, redondeadas o biseladas desde un muro de aguas arriba vertical, con muros de aproximación o sin ellos (*U. S. Geological Survey* [27]).

Si la salida se encuentra sumergida, la alcantarilla fluirá como una tubería y el flujo será del tipo 1. Si no se encuentra sumergida, la profundidad de entrada puede ser mayor o menor que el valor crítico. Cuando ésta es mayor, la alcantarilla puede ser hidráulicamente corta o larga; esto puede diferenciarse por medio de las tablas de las figuras 17-26 y 17-27. El flujo es del tipo 2 si la alcantarilla es hidráulicamente larga y del tipo 3 si es hidráulicamente corta. Cuando la profundidad de entrada es menor que el valor crítico, la de salida puede ser mayor o menor que la profundidad crítica de flujo a la salida de la alcantarilla. Cuando la profundidad de salida es alta, el flujo es del tipo 4, y cuando es baja, el flujo es del tipo 5 si la pendiente de la alcantarilla es subcrítica, y del tipo 6 si la pendiente es supercrítica.

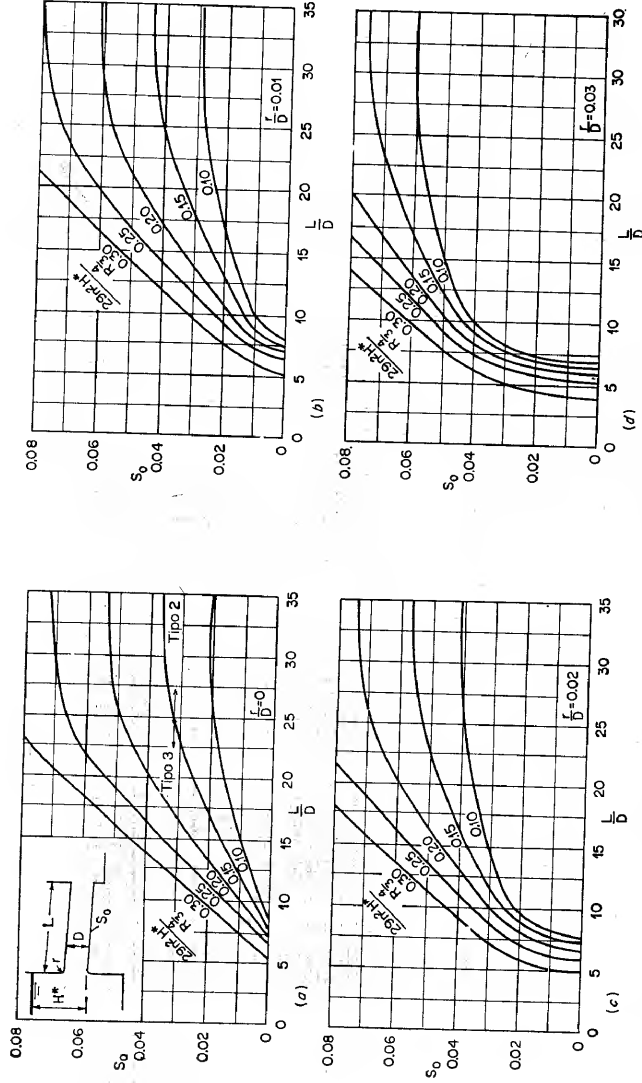


Figura 17-27. Criterios para alcantarillas hidráulicamente cortas o largas con cuerpos rugosos hechos de tubería corrugada (*U. S. Geological Survey* [27]).

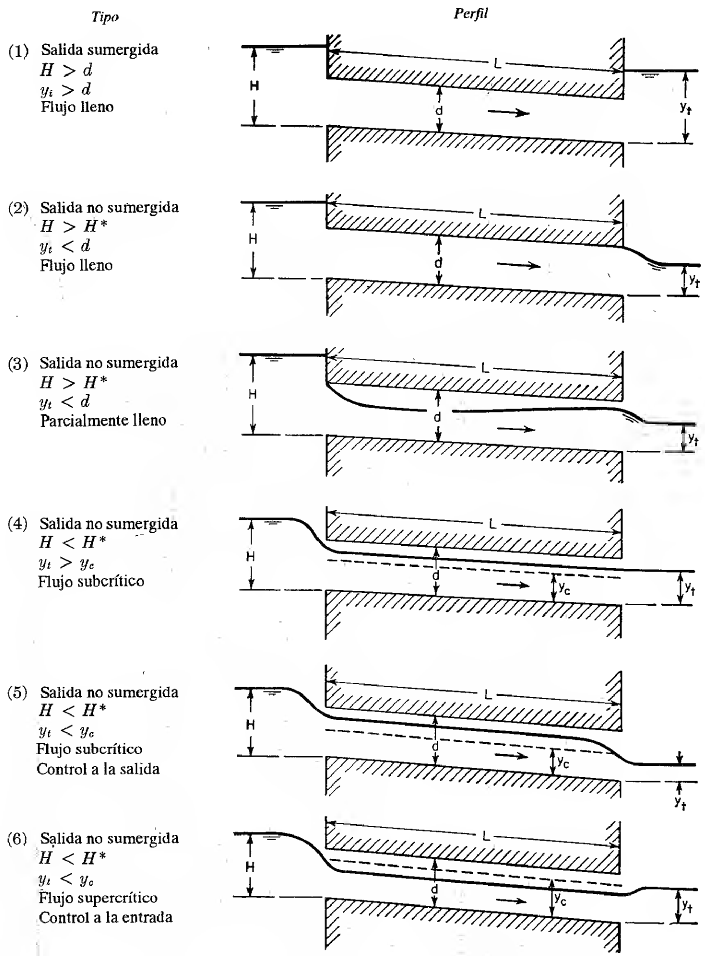


Figura 17-28. Tipos de flujo en alcantarillas.

En la clasificación anterior existe una excepción en el tipo de flujo 1, ya que este puede ocurrir con una profundidad de salida ligeramente mayor que la crítica o mayor que la parte superior de la salida si la pendiente del lecho es muy empinada. Los dos primeros son tipos de flujo en tuberías y los demás son flujo en canal abierto. Para el flujo tipo 3, la alcantarilla actúa como un orificio. El coeficiente de descarga varía más o menos desde 0.45 hasta 0.75. Para los flujos de tipos 4, 5 y 6, la entrada no está sellada por el agua y la alcantarilla actúa como un vertedero. El coeficiente de descarga varía aproximadamente desde 0.75 hasta 0.95, dependiendo de la geometría de la entrada y de la condición de aguas arriba. Como se muestra en la figura 17-28, el flujo de tipo 4 es subcrítico a lo largo de toda la longitud del cuerpo. El de tipo 5 es subcrítico, y por consiguiente, la sección de control se localiza a la salida. El de tipo 6 es supercrítico y, por consiguiente, la sección de control se localiza a la entrada.

El análisis de estos flujos puede seguir el procedimiento descrito en las secciones 11-1 a 11-3. El U. S. Geological Survey [27] desarrolló un procedimiento detallado que puede utilizarse para el cálculo hidráulico del diseño de una alcantarilla. Para propósitos prácticos, puede obtenerse una solución aproximada al problema por medio de las tablas en las figuras 17-29 y 17-30 para alcantarillas cuadradas[6] y circulares, respectivamente. Ambos cuadros sólo dan información para alcantarillas con entradas de bordes agudos. Para las de entradas redondeadas en condiciones promedio, el valor de H/d puede estimarse aproximadamente utilizando las siguientes expresiones, en las cuales H/d se refiere a la relación entre la profundidad a la entrada y la altura del cuerpo para una alcantarilla con bordes agudos a la entrada:

Tipo	$H/d < 1.0$	$1.0 < H/d > 1.5$	$H/d > 1.5$
Circular.	$0.87H/d$	$0.87\,H/d$	$1.09 + 0.10H/d$
Cuadrada	$1.00H/d$	$0.36 + 0.64H/d$	$0.62 + 0.46H/d$

17-9. Obstrucciones. En un canal abierto una obstrucción presenta un fenómeno muy similar al de una constricción, debido a que ambos tienen el efecto de contraer el área de la sección transversal del flujo. Sin embargo, la constricción reduce la sección transversal a una abertura única, en tanto que la obstrucción crea por lo menos dos aberturas. El grado de contracción creado por una constricción a menudo es mayor que el creado por una obstrucción.

Los tipos de obstrucción comúnmente encontrados en problemas de ingeniería incluyen pilares de puente, estructuras de pilotes de puente, rejillas de basuras,

[6] Los datos para alcantarillas cuadradas se prepararon utilizando una analogía de la experiencia con tubos circulares y se cree que son conservadores; es decir, ellos darán una altura tan alta como la que darían en condiciones adversas.

pilotes y estribos en la parte superior de vertederos de rebose, etc. Las investigaciones de estos problemas son muy numerosas en la literatura de ingeniería hidráulica[7].

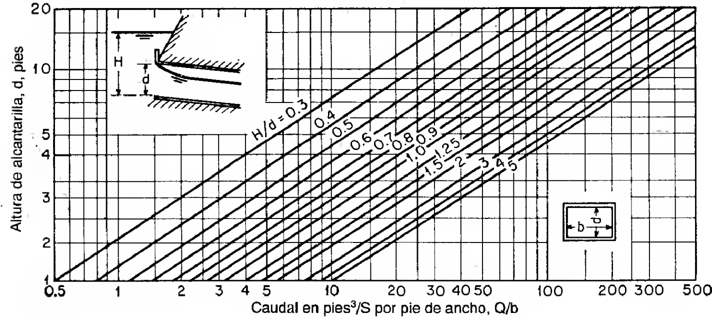


Figura 17-29. Diagrama para estimar la profundidad de aguas arriba en alcantarillas cuadradas con entradas con aristas cuadradas que fluyen parcialmente llenas (*con base en los datos del U. S. Bureau of Public Roads* [29]).

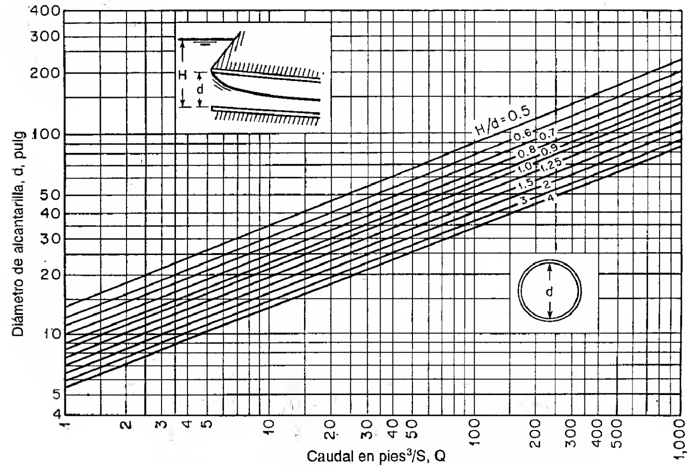


Figura 17-30. Diagrama para estimar la profundidad de aguas arriba en alcantarillas circulares con entradas con aristas cuadradas, que fluyen parcialmente llenas (*con base en los datos de F. T. Mavis* [17]).

7 Para referencias importantes sobre el tema del flujo alrededor de pilares de puente y estructuras de pilotes, *véanse* [30] a [52]. Sobre el tema de rejillas, *véanse* [53] a [61]. Sobre el tema de pilares y estribos sobre vertederos, *véanse* sección 14-7, [43] y [62] a [65].

El flujo alrededor de una obstrucción puede ser subcrítico o supercrítico. La ecuación de energía para el tramo entre la sección contraída 2 y la sección 3 aguas abajo de la contracción (figura 17-31) es

$$\epsilon\left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right) = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} \qquad (17\text{-}22)$$

o

$$\epsilon y_2(2 + \mathbf{F}_2^2) = y_3(2 + \mathbf{F}_3^2) \qquad (17\text{-}23)$$

donde $\mathbf{F}_2 = V_2/\sqrt{g y_2}$, $\mathbf{F}_3 = V_3/\sqrt{g y_3}$, y ϵ representa el porcentaje de recuperación de energía, debido a que parte de ella se perderá entre las secciones. Mediante la continuidad de flujo,

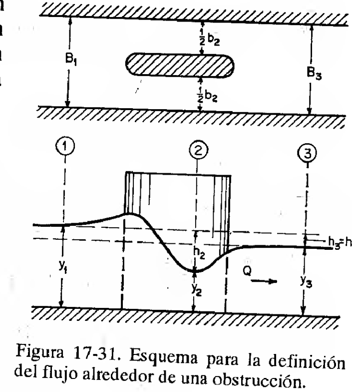


Figura 17-31. Esquema para la definición del flujo alrededor de una obstrucción.

$$V_2 b_2 y_2 = V_3 B_3 y_3 \qquad (17\text{-}24)$$

o

$$\mathbf{F}_2^2 \sigma^2 y_2^3 = \mathbf{F}_3^2 y_3^3 \qquad (17\text{-}25)$$

donde $\sigma = b_2/B_3$. Al eliminar y_2 y y_3 de las ecuaciones (17-23) y (17-25),

$$\sigma^2 = \frac{\epsilon^3 \mathbf{F}_3^2 (2 + \mathbf{F}_2^2)^3}{\mathbf{F}_2^2 (2 + \mathbf{F}_3^2)^3} \qquad (17\text{-}26)$$

Cuando el flujo en la sección 2 es crítico, $\mathbf{F}_2 = 1$. El valor de $\mathbf{F}_3$ que satisface esta condición se conoce como valor limitante y se designa por $\mathbf{F}_{3L}$. Luego para $\mathbf{F}_2 = 1$ la ecuación anterior se convierte en

$$\sigma^2 = \frac{27 \epsilon^3 \mathbf{F}_{3L}^2}{(2 + \mathbf{F}_{3L}^2)^3} \qquad (17\text{-}27)$$

Para determinado σ el flujo alrededor de la obstrucción es crítico si $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{3L}$, pero el examen de la ecuación (17-26) indica que es subcrítico si $\mathbf{F}_3 < \mathbf{F}_{3L}$ y supercrítico si $\mathbf{F}_3 > \mathbf{F}_{3L}$. En la figura 17-32 se grafica la ecuación (17-27) para $\epsilon = 1$ (sin pérdida de energía), $\epsilon = 0.95$ (5% de pérdida de energía) y $\epsilon = 0.9$ (10% de pérdida de energía). Por consiguiente, el flujo es subcrítico si el valor de $\mathbf{F}_3$ se localiza en el lado izquierdo de la curva graficada para una pérdida de energía supuesta y supercrítico si $\mathbf{F}_3$ se localiza en el lado derecho.

17-10. Flujo entre pilares de puente. Para este flujo Yarnell [42] hizo un extenso estudio de la literatura relacionada y condujo un gran número de pruebas sobre diferentes clases de pilares utilizados comúnmente en los Estados Unidos. Encontró que las ecuaciones para pilares de puente más comunes utilizadas en los Estados Unidos eran la de d'Aubuisson [30], Nagler [33], Weisbach [31] y Rehbock [35-37]. La ecuación de Weisbach se consideró que no tenía fundamento teórico[8]

8 La ecuación de Weisbach se basa en la suposición de que el flujo que entra a la sección contraída

debido a los resultados discordantes obtenidos por Yarnell [42]. En conexión con el uso de la ecuación de Rehbock, el flujo que pasa alrededor de la obstrucción se clasifica como poco turbulento, moderadamente turbulento y completamente turbulento. Yarnell indica que esta clasificación puede ser útil pero que la clasificación como subcrítico y supercrítico es más lógica. Se encontró que los flujos poco y completamente turbulentos correspondían a los flujos subcrítico y supercrítico, respectivamente, y que el flujo moderadamente turbulento en realidad corresponde al flujo crítico. Para flujos poco y moderadamente turbulentos, parece que la ecuación de Nagler se ajusta mejor que la ecuación de d'Aubuisson a los datos experimentales de Yarnell. Para el flujo completamente turbulento, parece que la ecuación de d'Aubuisson se ajusta mejor a los datos. Sin embargo, en general ninguna de las ecuaciones se aplica muy bien a altas velocidades.

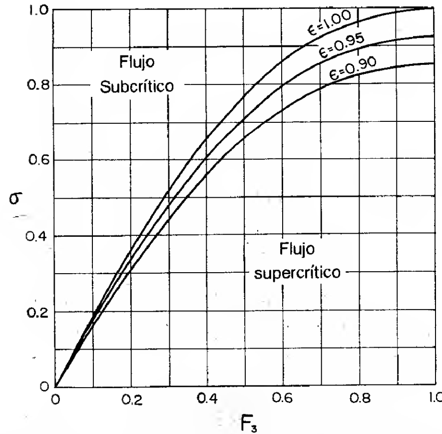


Figura 17-32. Criterio para flujos subcríticos y supercríticos a través de una obstrucción.

La ecuación de Nagler es

$$Q = K_N b_2 \sqrt{2g}\left(y_3 - \theta \frac{V_3^2}{2g}\right)\sqrt{h_3 + \beta \frac{V_1^2}{2g}} \tag{17-28}$$

donde K_N es un coeficiente que depende del grado de contracción del canal y de las características de la obstrucción, θ es un factor de ajuste con la intención de reducir la profundidad y_3 a y_2, y β es un coeficiente de corrección para tener en cuenta la velocidad de aproximación. La notación utilizada en la ecuación se muestra en la

puede calcularse como la suma de dos partes, la inferior, que fluye a través de un orificio sumergido, y la superior, que fluye sobre un vertedero. En apariencia, esta suposición es arbitraria y no tiene base teórica. Houk [10] y Bubendey [32] no la garantizan, y la consideran contraria a la teoría hidráulica establecida.

figura 17-31. El remanso se representa por h_3 o h^*. El valor de θ varía, y se aproxima a cero a medida que ocurre lo mismo con el efecto de la contracción, y se vuelve alto cuando el flujo es ultrarrápido y turbulento, pero por lo general puede tomarse igual a 0.3. El valor de β varía con la relación de conductividad, como se muestra en la figura 17-33.

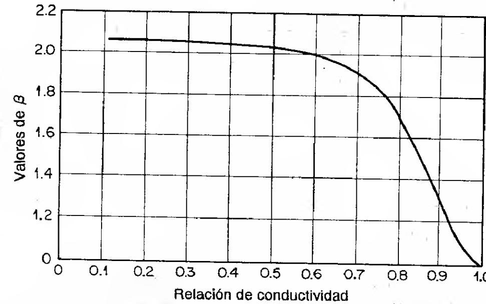


Figura 17-33. Valores de β en la ecuación para pilares de puente de Nagler.

En la deducción de la ecuación de d'Aubuisson se aplica la ecuación de energía a la sección 1 en el canal de aproximación y a la sección 2 contraída (figura 17-31) o, utilizando la notación de la figura,

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + h_f \tag{17-29}$$

donde $y_1 = y_2 + h_2$, y se suponen los coeficientes de distribución de velocidades α_1 y α_2 iguales a 1.0 y la pérdida por fricción h_f igual a cero. Al tomar $V_2 = Q/K_A b_2 y_2$, donde K_A es un coeficiente de contracción, y al simplificar,

$$Q = K_A b_2 y_2 \sqrt{2gh_2 + V_1^2} \tag{17-30}$$

d'Aubuisson no hizo ninguna distinción entre las profundidades y_2 y y_3 sino que supuso $y_2 = y_3$. Por consiguiente, la ecuación de d'Aubuisson es

$$Q = K_A b_2 y_3 \sqrt{2gh_3 + V_1^2} \tag{17-31}$$

donde K_A depende principalmente del grado de la contracción del canal y de la forma y orientación de la obstrucción. La suposición $y_2 = y_3$ implica que el remanso $h^* = h_3 = h_2$ en la figura 17-31. Por consiguiente, la relación de remanso tiene un valor de 1.0. Esto no siempre es cierto, a pesar de que en muchos casos existe poca diferencia entre y_2 y y_3. Por esta razón se aduce que la ecuación de d'Aubuisson es empírica y aproximada.

A partir de los resultados de la investigación de Yarnell sobre pilares de puente de diferentes formas y tamaños se concluyó lo siguiente:

1. La altura del remanso debido a los pilares de puente varía directamente con la profundidad del canal no obstruido.

2. Las ecuaciones de Nagler, d'Aubuisson y Rehbock dan buenos resultados para velocidades ordinarias cuando se utilizan los coeficientes apropiados, pero no así para velocidades extremadamente altas. A partir de sus datos experimentales Yarnell dedujo los coeficientes para estas ecuaciones. Con base en esta información se recomiendan los siguientes valores de K_N y K_A para uso práctico:

Tipo de pilar	Relación de conductividad σ									
	0.9		0.8		0.7		0.6		0.5	
	K_N	K_A	K_N	K_A	K_N	K_A	K_N	K_A	K_N	K_A
Narices y colas cuadradas	0.91	0.96	0.87	1.02	0.86	1.02	0.87	1.00	0.89	0.97
Narices y colas semicirculares	0.94	0.99	0.92	1.13	0.95	1.20	1.03	1.26	1.11	1.31
Narices y colas triangulares de 90° . .	0.95	. . . .	0.94	. . . .	0.92					
Pilares cilíndricos dobles con diafragmas o sin ellos	0.91	. . . .	0.89	. . . .	0.88					
Narices y colas en forma de lente . . .	0.95	1.00	0.94	1.14	0.97	1.22				

3. Para flujo de baja velocidad y poca turbulencia, los moldes más eficientes son nariz y cola en forma de lente, nariz en forma de lente y cola semicircular, nariz semicircular y cola en forma de lente, nariz y cola convexas y nariz y cola semicirculares[9]. Sin embargo, los datos no son suficientes para diferenciar entre estas formas con altos grados de contracción.

4. Pilares compuestos por dos cilindros con o sin diafragmas conectores, con narices y colas triangulares de 90°, y con membrana de salida, son menos eficientes, desde un punto de vista hidráulico, que aquellos antes mencionados; los pilares con narices y colas cuadradas son los menos eficientes.

5. La colocación de muros inclinados en los extremos de los pilares incrementan ligeramente su eficiencia hidráulica, es decir, aumentan los valores de K_N y K_A.

6. Incrementar la longitud de un pilar desde 4 veces el ancho hasta 13 veces tiene un efecto comparativamente pequeño sobre su eficiencia hidráulica, que en algunos casos se incrementa, y en otros casos se reduce. Tal vez la relación óptima longitud-ancho varía con la velocidad y por lo general se localiza entre 4 y 7. En promedio, los valores de K_N y K_A crecerán alrededor de un 3% a 5% para un incremento en dicha relación desde 4 hasta 13.

7. Colocar los pilares formando un ángulo con la corriente tiene un efecto insignificante en la cantidad de remanso si dicho ángulo es menor que 10°. Cuando forman un ángulo de 20° o mayor se incrementa la cantidad de remanso; este incremento depende de la cantidad de flujo, la profundidad y el grado de la contracción del canal. En general, los valores de K_N y K_A disminuirán alrededor del 7% para 20°.

[9] La nariz o cola en forma de lente está configurada por dos curvas convexas tangentes a los lados del pilar y con un radio el doble de su ancho, y la nariz o cola convexa, por dos curvas tangentes a los lados del pilar y a la vez circunscrita en un triángulo equilátero.

Para utilizar los resultados de la investigación y facilitar el cálculo hidráulico en aplicaciones prácticas, Yarnell desarrolló ecuaciones empíricas y soluciones gráficas para problemas de pilares de puente. La tabla de la figura 17-34, diseñada por Yarnell pero ligeramente modificada para el presente propósito, da una solución rápida para flujo subcrítico alrededor de pilares de puente. Con los valores apropiados de σ y V_3 puede obtenerse el valor de x utilizando la parte izquierda de la tabla. Luego, al registrar este valor y los valores apropiados de $\mathbf{F}_3^2$ y del factor de forma K en la parte derecha de la tabla, se obtiene el remanso h^*. Las formas mostradas en el cuadro son nariz y colas cuadradas, nariz y cola triangulares de 90°, pilares de cilindro doble con o sin diafragma conector y narices y cola semicirculares. Si se conoce el remanso y se requiere determinar el caudal, será necesario suponer el valor de V_3 y llevar a cabo el cálculo mediante un proceso de ensayo y error hasta que se obtenga una solución.

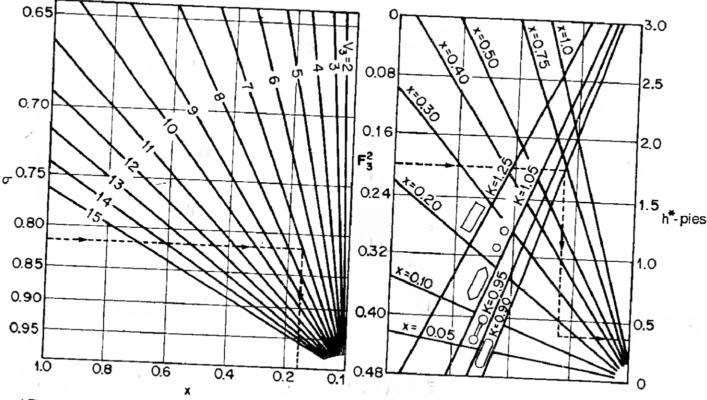


Figura 17-34. Tabla para determinar el remanso en flujo subcrítico alrededor de pilaress de puente (*según D. L. Yarnell* [42]).

La tabla de la figura 17-35 da una solución gráfica para el flujo supercrítico alrededor de pilares de puentes. Con el valor apropiado de σ se determina el valor límite F_{3L} utilizando la ecuación (17-27) o la figura 17-32. Luego, al registrar F_3/F_{3L} en la tabla se obtiene h^*/y_3 para la forma dada. Al multiplicar este valor por y_3 se obtiene el remanso h^*. Si y_1, y_3, b_2, B_3 y la forma del pilar son conocidos y se requiere determinar el caudal, h^*/y_3 puede calcularse mediante $h^*/y_3 = (y_1 - y_3)/y_3$; $\mathbf{F}_3/\mathbf{F}_{3L}$ puede tomarse del cuadro; $\sigma = b_2/B_3$; y $\mathbf{F}_{3L}$ puede obtenerse utilizando las figuras 17-27 ó 17-32. Entonces puede calcularse el valor de $\mathbf{F}_3$, y a partir de éste, V_3 y luego, Q.

Las soluciones gráficas de Yarnell se aplican a pilares con una relación de longitud-ancho igual a 4. Para relaciones de 7 y 13, el efecto del incremento en la longitud sobre el remanso se muestra en la figura 17-36, la cual se grafica con los datos de Yarnell. Parece que el remanso causado por pilares largos es mayor cuando los extremos de éstos son semicirculares que cuando son cuadrados. En el caso de

pilares con extremos cuadrados es probable que una entrada abrupta tienda a disminuir las pérdidas por fricción a lo largo de una pequeña distancia hacia aguas abajo debido a que su efecto en la distribución de la velocidad implica que ésta última disminuya a lo largo de las paredes. El efecto de los pilares de puentes presentes en una constricción se consideró en la sección 17-6 y en la figura 17-23*d*.

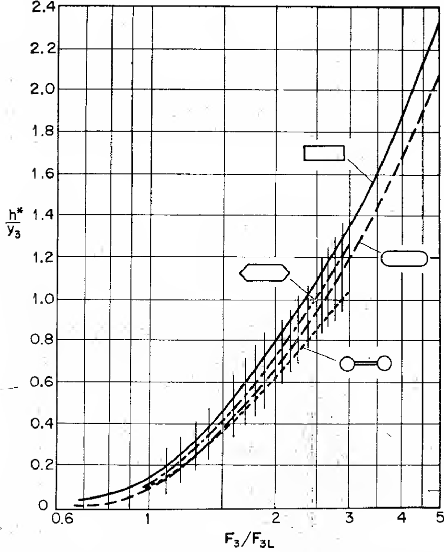


Figura 17-35. Tabla para determinar el remanso en flujo supercrítico alrededor de pilares de puente (*según D. L. Yarnell* [42]).

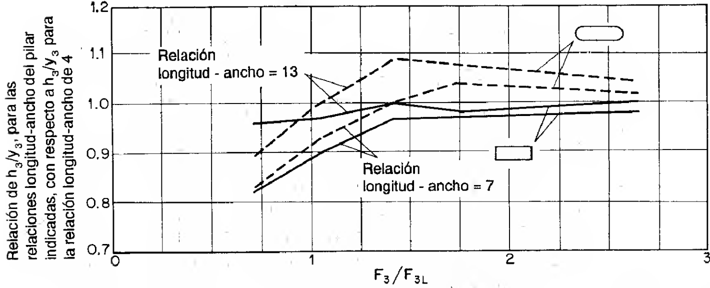


Figura 17-36. Efecto del incremento en la longitud de pilares de puente (*con base en los datos de D. L. Yarnell [42]*).

17-11. Flujo entre estructuras de pilotes de puente. La investigación de Yarnell [41] indica que la ecuación de Nagler puede aplicarse de manera apropiada a flujos subcríticos que pasan a través de una estructura de pilotes, y la ecuación de d'Aubuisson a flujos supercríticos que pasan a través de una estructura de pilotes. Los siguientes coeficientes se recomiendan para ser utilizados en tales ecuaciones:

Tipo de estructura	K_N	K_A
Estructura de 5 pilotes de banda única		
Paralela a la corriente	0.90	0.96
Con ángulo de 10° con respecto a la corriente . . .	0.90	
Con ángulo de 20° con respecto a la corriente . . .	0.89	
Con ángulo de 30° con respecto a la corriente . . .	0.87	
Estructura de 10 pilotes de doble banda	0.82	0.88
Dos estructuras de 5 pilotes de banda única	0.79	0.86

La cantidad de contracción del canal debe tomarse como el diámetro promedio de los pilotes más el espesor de las abrazaderas antimovimiento, sin considerar el ángulo de inclinación de la estructura con respecto a la corriente.

El efecto de las estructuras de pilotes presentes en una constricción se estudió en la sección 17-6 y en la figura 17-23*c*.

17-12. Flujo a través de rejillas. Para este flujo el diseñador está interesado primordialmente en evaluar la cantidad de pérdida de altura debida a la resistencia en la rejilla, y puede expresarse en términos de la altura de velocidad del flujo de aproximación, o

$$h_f = c\frac{V^2}{2g} \tag{17-32}$$

donde V es la velocidad de aproximación delante de la rejilla y c es un coeficiente que depende de la forma de la sección transversal, del espesor s, la longitud L de las barras de la rejilla, la luz b entre las barras, el ángulo δ de inclinación de las barras con respecto a la horizontal y del ángulo α entre la dirección de flujo y la longitud de las barras.

Con base en los datos experimentales para rejillas de barras de diferentes formas y con $\alpha = 0$, Kirschmer [52, 53] produjo la siguiente ecuación para c:

$$c = \beta\left(\frac{s}{b}\right)^{4/3} \text{sen } \delta \tag{17-33}$$

donde β es un coeficiente que tiene los siguientes valores:

Forma de las barras de la rejilla	*Valor de β*
Nariz y cola cuadradas, $L/s = 5$	2.42
Nariz cuadrada y cola semicircular, $L/s = 5$	1.83
Nariz y cola semicirculares, $L/s = 5$	1.67
Redondas	1.79
Hidrodinámicas	0.76

Spangler [55] amplió los experimentos y determinó el valor de β para $\alpha = 30°$, 45° y 60°, respectivamente.

Según Fellenius [54], puede darse una ecuación empírica para c como la siguiente:

$$c = \mu \left(\frac{s}{s+b}\right)^2 \operatorname{sen}^x \delta \tag{17-34}$$

donde el coeficiente μ y el exponente x tienen los siguientes valores:

Forma de las barras de la rejilla	*Valor de μ*	*Valor de x*
Nariz y cola cuadradas		
Con esquinas agudas, $L/s = 10$	7.1	1.0
Con esquinas agudas, $L/s = 12$	6.2	1.0
Con esquinas ligeramente redondeadas, $L/s = 8$ a 11 . .	6.1	1.0
Nariz y cola semicirculares, $L/s = 7$	5.6	1.5

En general, $x = 1.0$ para barras que tienen esquinas agudas o ligeramente redondeadas, y $x = 1.5$ para barras que tienen esquinas redondeadas. Para rejillas de barras conectadas en cruz y grapadas, el valor de μ debe incrementarse alrededor del 22.5%.

Scimemi [56] y Koženy [50] determinaron valores de c, β y μ y otros datos para rejillas instaladas en varias plantas hidroeléctricas.

17-13. Compuertas de flujo por debajo. Ciertas compuertas de control en canales pueden llamarse *compuertas de flujo por debajo*[10] debido al hecho de que el agua pasa por debajo de la estructura. Ejemplos comunes son la compuerta deslizante, la compuerta *Tainter* (o radial) y la compuerta de rodillo (figura 17-37). En el diseño de estas compuertas el ingeniero hidráulico está interesado principalmente en dos aspectos importantes: la relación altura-caudal y la distribución de presiones sobre la superficie de la compuerta en diferentes posiciones de ésta y diferentes formas del labio de la compuerta. La forma del labio no sólo afectará las distribuciones de velocidades y de presiones, la pérdida de energía en el flujo a través de la abertura de la compuerta, sino que también desarrollará vibraciones muy

[10] En contraste con la compuerta de flujo por debajo está la *compuerta de flujo por encima* a través de la cual el agua fluye por encima de la estructura. Un ejemplo de ella es la compuerta de tambor (sección 14-9). En términos hidráulicos, la compuerta de flujo por encima actúa como un vertedero en la misma forma que la compuerta de flujo por debajo actúa como un orificio. También existen diseños para los cuales el agua fluye por encima y por debajo de la estructura al mismo tiempo (figura 17-37).

perturbadoras que deben evitarse durante la operación de la compuerta. Como el diseño del labio varía de manera considerable, a menudo se necesita hacer una investigación independiente sobre el labio para un diseño particular[11].

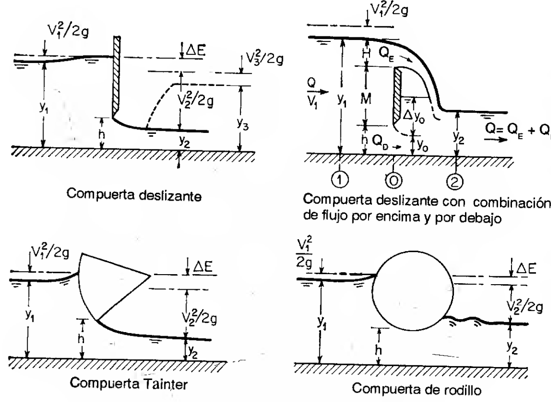


Figura 17-37. Compuertas con flujo por debajo.

Mediante la ecuación de energía puede demostrarse que el caudal a través de una compuerta de flujo por debajo puede expresarse como

$$Q = CLh \sqrt{2g\left(y_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g}\right)} \tag{17-35}$$

londe C es el coeficiente de descarga, L es la longitud de la compuerta, h es la altura e la abertura de la compuerta, y_1 es la profundidad de flujo aguas arriba y $\alpha V_1^2/2g$ s la altura de velocidad del flujo de aproximación. El flujo a la salida de la compuerta uede ser libre o sumergido, según la profundidad de salida. Para flujo sumergido, en la ecuación anterior debe remplazarse por la altura efectiva o diferencia entre s profundidades de aguas arriba y de aguas abajo.

Para el propósito de estudios experimentales, el término de altura de velocidad n la ecuación (17-35) puede omitirse y su efecto puede incluirse en el coeficiente . Luego,

$$Q = CLh \sqrt{2gy_1} \tag{17-36}$$

onde C es un coeficiente que depende de la geometría de la estructura y de las rofundidades aguas arriba y aguas abajo. La forma de esta ecuación es igual para ujos libre y sumergido.

[11] Para estudios sobre labios de compuertas deslizantes de diferentes diseños, *véanse* [66] y [67].

Para la compuerta deslizante vertical[12], en la figura 17-38 se muestran curvas que representan el valor de C, que Henry [68] determinó experimentalmente. La línea punteada A representa el resultado obtenido mediante la ecuación (17-35) con base en el principio de energía; la línea punteada B se obtiene por el principio de *momentum*. El valor de $\mathbf{F}_0$ es el número de Froude del flujo a través de la abertura de la compuerta.

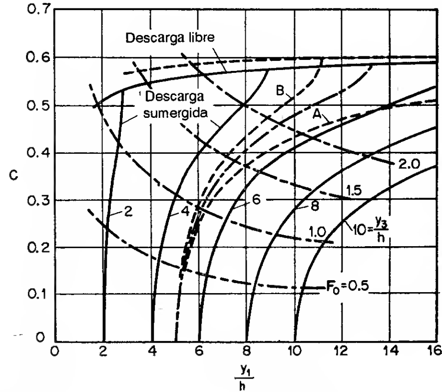


Figura 17-38. Coeficientes de descarga para compuertas deslizantes verticales (*según H. R. Henry* [68]).

Toch [69] determinó curvas similares para la compuerta Tainter (figura 17-39) con base en un estudio experimental, que incluye la altura del pivote como una variable adicional a las que utilizó Metzler [70] en un análisis anterior. El U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station [74] también preparó tablas de diseños de gran utilidad en el diseño de compuertas Tainter, particularmente para aquéllas instaladas en la cresta de vertederos con la forma WES estándar (sección 14-3).

En el caso de una compuerta deslizante con una combinación de flujos por encima y por debajo (figura 17-37), el caudal por encima Q_E es sólo una función de H, pero el caudal por debajo Q_D es una función de $y_0 + \Delta y_0$ y de y_1. Si $\Delta y_0 = 0$ y si el chorro inferior es libre, el caudal total $Q = Q_E + Q_D$ es independiente de la profundidad de salida y_2. Si Δy_0 es mayor que cero, el chorro inferior se ahoga. El problema puede resolverse utilizando las ecuaciones de continuidad y de *momentum* entre las secciones transversales 0 y 2. En condiciones normales, y_2 es una función de Q. Tanto $y_0 + \Delta y_0$ como Q_D son incógnitas que deben satisfacer una ecuación de energía similar a la (17-35). El uso de la ecuación de *momentum* automáticamente incluye cualquier pérdida por fricción. El par de ecuaciones debe resolverse mediante un proceso de ensayo y error o por medio de gráficas. El resultado obtenido de esta manera coincide con lo que dedujo Escande [2, 71] experimentalmente.

[12] Para otros estudios, *véanse* [39] y [71]. Para un análisis teórico del flujo a través de una compuerta deslizante con borde agudo, *véanse* [72] y [73].

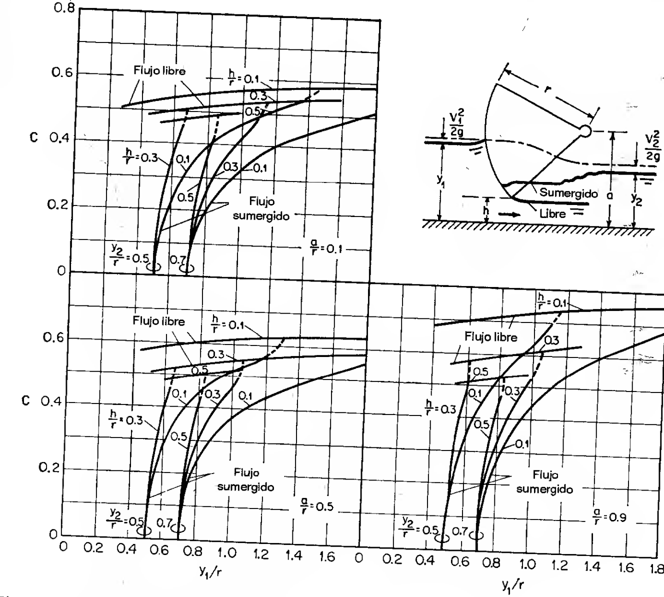


Figura 17-39. Coeficientes de descarga para compuertas *Tainter* o radiales (*según A. Toch* [69]).

La presión sobre la superficie de la compuerta puede determinarse con precisión por medio de un análisis de red de flujo o de medidas reales en modelo o prototipo. La figura 17-40*a* muestra la presión normal sobre la superficie de una compuerta Tainter (un patrón similar de distribución de presiones horizontales existe sobre una compuerta deslizante), la presión horizontal sobre la abertura de la compuerta y sobre las secciones transversales aguas arriba y aguas abajo y la presión vertical sobre el lecho del canal. La presión normal sobre la superficie de la compuerta puede representarse por sus componentes horizontales y verticales $\mathbf{F}_H$ y $\mathbf{F}_V$, como se muestra en la figura 17-40*b*. La magnitud y las posiciones de estas fuerzas puede obtenerse mediante determinación gráfica utilizando el diagrama de distribución de presiones. Un método menos aproximado pero más simple para determinar estas presiones es suponer que la presión horizontal sobre la superficie de la compuerta se encuentra distribuida hidrostáticamente, y que la presión vertical es igual al peso del agua desplazada por la estructura de la compuerta por encima de su superficie (figura 17-40*c*). La fuerza horizontal $\mathbf{F}_H$ también puede determinarse mediante la relación de *momentum*. Sin embargo, esta determinación no dará la

posición de la fuerza. Como todas las presiones de agua son perpendiculares a la superficie de la compuerta, la resultante de las presiones debe pasar a través del eje de giro 0.

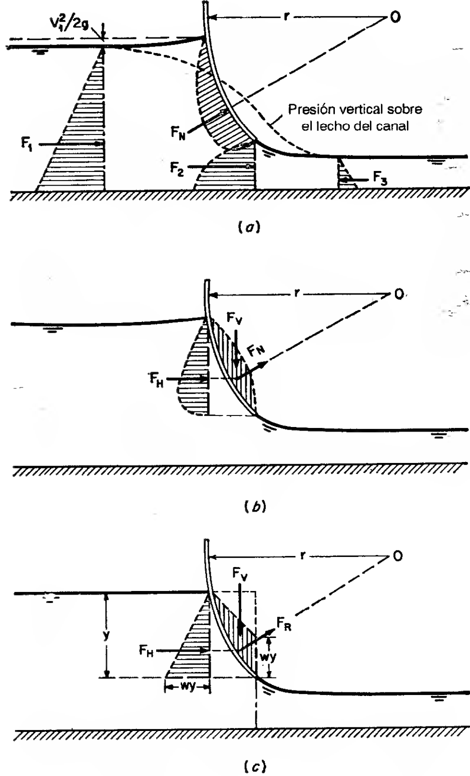


Figura 17-40. Determinación de presiones para compuertas radiales (*Tainter*).

El flujo de salida de una compuerta a menudo constituye un chorro de alta velocidad, capaz de erosionar el lecho del canal aguas abajo[13]. La erosión desarrollada de esta manera puede evitarse por medio de un cuenco disipador (sección

[13] La erosión del lecho del canal debida a un chorro es un tema por fuera del aleance de este libro. Para información detallada, *véanse* [1] a [3] y [75] a [77].

15-11). Si no se dan medidas preventivas, la erosión puede originar un cuenco de socavación profundo, y su formación dependerá del tipo de chorro. De acuerdo con los estudios de Escande [71] sobre el flujo a través de una caída de canal aguas abajo de una compuerta deslizante[14], son posibles cuatro tipos de chorros: 1) flujo sumergido con un chorro hacia arriba, 2) flujo sumergido con un chorro hacia abajo, 3) flujo libre con un chorro hacia arriba, y 4) flujo libre con un chorro hacia abajo. En general, el chorro hacia abajo inducirá menor presión en la superficie vertical de la caída que el chorro hacia arriba y a menudo desarrollará un cuenco de socavación cuyo punto más profundo se localiza más cerca de la caída que en el caso del chorro hacia arriba. En flujo sumergido la profundidad del cuenco de socavación depende de la profundidad de salida, en tanto que en un flujo libre las condiciones de aguas abajo tienen muy poco o ningún efecto sobre la profundidad de socavación.

17-14. Confluencias de canales. El flujo en una confluencia de canales es un fenómeno que involucra muchas variables, como el número de canales que confluyen, los ángulos de intersección, la forma y la pendiente de los canales, las direcciones y los caudales de los flujos, el redondeo de las esquinas en la confluencia, etc. El problema es tan complicado que sólo se han estudiado algunos casos simples y específicos. Las conclusiones de tales estudios indican que la generalización del problema no es posible ni conveniente. Cuando la aplicación de la teoría hidráulica al problema encuentra limitaciones, un estudio sobre modelo físico dará la mejor solución para las características del flujo involucrado.

Para *flujo subcrítico* que pasa por los canales en una confluencia, Taylor [80] investigó los casos específicos mostrados en la figura 17-41. Los canales son horizontales y de igual ancho. En el caso de *flujo combinado*, se hacen las siguientes suposiciones: 1) el flujo pasa de los canales 1 y 2 al 3; 2) los canales 1 y 3 se localizan sobre una misma línea recta; 3) el flujo es paralelo a las paredes del canal y la velocidad se encuentra distribuida de manera uniforme inmediatamente arriba y abajo de la confluencia; 4) la fricción normal sobre las paredes es insignificante en comparación con las otras fuerzas que intervienen; y 5) las profundidades en los canales 1 y 2 son iguales inmediatamente aguas arriba de la confluencia. Con estas suposiciones y con la aplicación de la ecuación de *momentum* a la confluencia en la dirección 1 a 3, Taylor pudo obtener la siguiente ecuación[15]:

$$k_2 = \frac{n_q^2(n_y^2 - 1)}{4n_y^2[2n_q - n_q^2(1 + \cos\theta) + n_y - 1]} \qquad (17\text{-}37)$$

donde $k_2 = V_2^2/2gy_2$, $n_q = Q_2/Q_3$, $n_y = y_a/y_b$, V_2 es la velocidad y y_2 es la profundidad de flujo en el canal 2, y_a es la profundidad aguas arriba de la confluencia, y_b es la profundidad aguas abajo de la confluencia, y θ es el ángulo entre los canales

[14] Camichel [78] determinó otros ejemplos de chorro por debajo de estructuras hidráulicas en canales. La erosión debida al chorro a través de la abertura de un puente debe causar un cuenco de socavación profundo, a menudo conocido como *cuenco azul*. Un estudio experimental de este problema lo reportaron Hickenlooper, Guillou y Chow [79].

[15] Al aplicar la ecuación de *momentum* al problema, la presión hidrostática ejercida por el flujo en el canal 2 es balanceada por la presión en la pared opuesta, siempre y cuando la superficie del agua en la confluencia sea esencialmente plana. Luego la única fuerza de flujo del canal 2 que puede contribuir al flujo en el canal recto 1-3 es su componente de *momentum* en la dirección de 1 a 3.

convergentes. Al tomar n_q como un parámetro, k_2 puede graficarse contra n_y para cualquier θ dado.

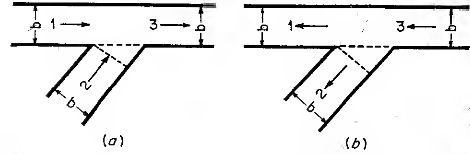


Figura 17-41. Confluencias simples en canales: (*a*) flujo que se une; (*b*) flujo que se divide.

La ecuación (17-37) se verificó mediante experimentos en confluencias con $\theta = 45°$ y $\theta = 135°$. La correlación entre la teoría y el experimento fue buena para $\theta = 45°$. Sin embargo, no hubo ninguna coincidencia para $\theta = 135°$. Se cree que esto se debió a la distribución de velocidades aguas abajo de la confluencia, la cual era distorsionada, y a que el flujo no permanecía paralelo a las paredes del canal. Estos datos experimentales demostraron con claridad que la suposición 5 es válida, sin importar el ángulo de intersección de los canales.

En el caso de un *flujo que se divide*, en teoría el problema no puede analizarse con facilidad. La aplicación del principio de *momentum* es difícil debido a que involucra algunas cantidades desconocidas y no se dispone de suposiciones que simplifiquen la determinación de estas cantidades, como la suposición 5 para el flujo que se une. Básicamente, la división del flujo dependerá de los efectos de remanso en los dos canales que se dividen y de las condiciones dinámicas existentes en la confluencia. Si el flujo dividido se combina de nuevo en cierto punto aguas abajo, puede aplicarse una solución al problema como la descrita en la sección 11-9.

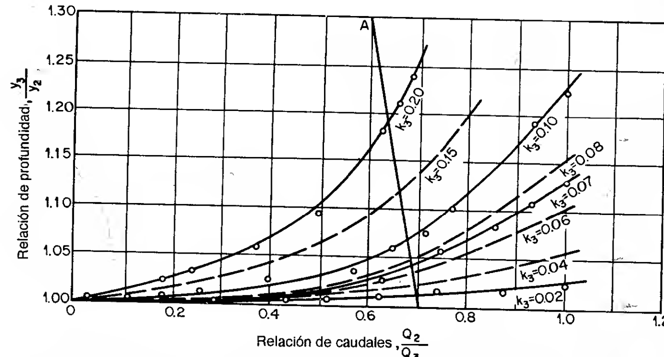


Figura 17-42. Relación entre las profundidades en una división de flujo de 90° (*según E. H. Taylor* [80]).

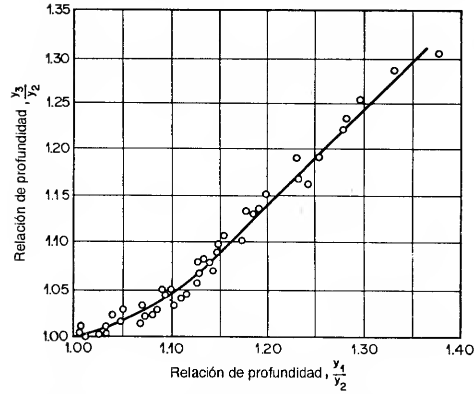


Figura 17-43. Características de una división de flujo de 90° (*según E. H. Taylor* [80]).

Para la confluencia específica mostrada en la figura 17-41*b*, Taylor realizó una aproximación experimental al problema, como sigue:

Para cualquier valor de θ es posible correlacionar las razones adimensionales Q_2/Q_3, y_3/y_2, y_1/y_2 y $k_3 = V_3^2/2gy_3$, todas deducidas de los datos determinados experimentalmente. Para $\theta = 90°$, tales curvas de correlación se muestran en las figuras 17-42 y 17-43, y pueden utilizarse para determinar la división de flujo para un determinado caudal Q_3. Primero suponga Q_1; luego $Q_2 = Q_3 - Q_1$. Las profundidades correspondientes y_1 y y_2 pueden obtenerse de las curvas de calibración para los canales 1 y 2. Para y_1/y_2 la relación y_3/y_2 puede determinarse a partir de la figura 17-42. Al suponer otros valores de Q_1 pueden obtenerse las relaciones y_3/y_2 correspondientes. Luego Q_2/Q_3 se grafica contra y_3/y_2, como lo muestra la curva *A* de la figura 17-43. La intersección de esta curva con las curvas k_3 da todas las posibles combinaciones de las variables, dentro de las cuales un valor de k_3 corresponderá al flujo por ejemplo, de 500 pies³/s que entran a la confluencia. El siguiente paso es graficar los valores de intersección k_3 contra los correspondientes y_3. Para el ejemplo mostrado por la línea *A* de la figura 17-43, $k_3 = 0.10$, $y_3/y_2 = 1.067$ y $Q_2/Q_3 = 0.677$ o $Q_2 = 0.677Q_3$. A partir de la curva de calibración para el canal 2, puede hallarse el valor de y_2 correspondiente al de Q_2 y, por consiguiente, $y_3 = 1.067y_2$. La gráfica de k_3 contra y_3 puede construirse como se muestra mediante la curva *B* de la figura 17-44. El valor apropiado de k_3 no sólo debe satisfacer la curva *B* sino también la curva continua que muestra la relación $k_3 = V_3^2/2gy_3$. La intersección de las dos curvas dará los valores requeridos de k_3 y y_3. Con este k_3, en la figura 17-43 puede determinarse el valor correspondiente de Q_2/Q_3, y en consecuencia los caudales divididos Q_1 y Q_2.

Para *flujo supercrítico* que pasa por los canales en una confluencia, la condición del flujo es más complicada. Estudios de algunos casos de flujo que se unen en la forma general mostrada en la figura 17-41 los desarrolló el U. S. Soil

Conservation Service [81]. En tales casos, puede formarse un resalto hidráulico en uno de los canales de entrada o en ambos, dependiendo del diseño de la confluencia de los canales, de las velocidades y de las condiciones de flujo encontradas en los canales que confluyen. Luego, puede necesitarse un incremento grande en la altura de las paredes laterales en la vecindad de la confluencia. Cuando se aplica el principio de *momentum* a este tipo de problema, se necesita conocer la posición del resalto o la profundidad de flujo en el extremo de aguas arriba de la confluencia para calcular el *momentum* al que contribuyen los flujos de entrada. Si el flujo que pasa por la confluencia es supercrítico, sin la formación de ningún resalto hidráulico aguas arriba, las condiciones de flujo serán muy complicadas debido al desarrollo de ondas cruzadas similares a las estudiadas en la sección 16-5. Estas ondas se propagarán a lo largo de una distancia considerable hacia aguas abajo antes de que sean amortiguadas por la fricción del canal. Luego, se requieren paredes laterales más altas que las usuales no sólo cerca de la confluencia sino también a lo largo de una distancia considerable hacia aguas abajo.

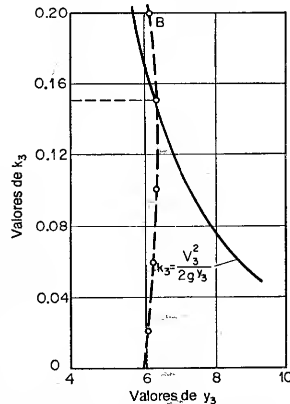


Figura 17-44. Factor k_3 como una función de y_3 (*según E. H. Taylor* [80]).

PROBLEMAS

17-1. Verifique la ecuación (17-5) e interprete las curvas punteadas de la figura 17-3 que representan esta ecuación.

17.2. Utilizando los datos de Formica para expansiones súbitas, grafique una curva que muestre la relación entre ϵ y el ángulo de divergencia θ, y luego analice esta relación.

17-3. Calcule los ángulos de onda β_1 y β_2 para la contracción diseñada en el ejemplo 17-1 y haga un esquema de la posición de los frentes de onda de choque.

17-4. Diseñe una contracción recta para reducir el ancho de un canal rectangular de 6 a 3 pies. El canal conduce un caudal de 4.33 pies³/s con una velocidad de aproximación de 7.2 pies/s. Suponga $y_3/y_1 = 3.00$.

17-5. Calcule los ángulos de onda para el diseño del problema 17-4 y haga un esquema de la posición de los frentes de onda de choque.

17-6. Diseñe la contracción del ejemplo 17-1, suponiendo $y_3/y_1 = 3.00$.

17-7. Un canal de 6 pies de ancho conduce un caudal de 100 pies³/s con una velocidad de 20 pies/s. Construya el contorno superficial del flujo a través de una expansión abrupta del canal con bordes agudos.

17-8. Si el canal descrito en el problema anterior tiene una expansión gradual con sus fronteras representadas por la ecuación (17-11), construya las curvas de nivel superficial de flujo en la expansión.

17-9. Haga un diseño preliminar para una expansión curva en el canal del problema 17-7 con la ayuda de las curvas de frontera adimensionales determinadas mediante el método de las características (figura 17-13). Suponga $b_2/b_1 = 3$.

17-10. Resuelva el ejemplo 17-2 con las siguientes condiciones adicionales: *a*) la línea central del puente y el terraplén de la carretera hacen un ángulo de 70° con la dirección de flujo, *b*) la entrada es redondeada con $r/b = 0.10$, y *c*) el puente tiene un pilar de 30 pies de largo y 10 pies de ancho en el centro de la apertura del canal de agua.

17-11. Determine el caudal de creciente a través de una constricción de un puente con una abertura tipo III con pendientes de terraplén y de estribos de 2:1. La constricción, de 30 pies de longitud, reduce el ancho normal del canal de agua de 400 a 200 pies. El puente tiene tres pilares, cada uno de 30 pies de largo y 6 pies de ancho. Las profundidades de agua promedio en la sección de aproximación localizada 200 pies aguas arriba del puente y en la sección contraída son 20.5 y 19.2 pies, respectivamente. El extremo superior de aguas arriba del terraplén se localiza un pie por encima de la elevación de la superficie del agua en la sección de aproximación. Se tiene un valor de $n = 0.035$.

17-12. Resuelva el problema anterior si la parte inferior del puente se localiza 3 pies por debajo del extremo superior del terraplén. Sin embargo, la plataforma del puente no se inunda.

17-13. Una alcantarilla de una sección cuadrada de 8 pies × 8 pies y una longitud de 60 pies descansa en una pendiente de 1/60. Tiene bordes de entrada cuadrados y paredes verticales. Las elevaciones de aguas arriba y de salida están a 8.02 pies por encima de la batea de entrada y 6 pies por encima de la batea de salida, respectivamente. Determine para la alcantarilla: *a*) el caudal, *b*) el tipo de flujo, y *c*) la profundidad de flujo normal en su cuerpo. Se tiene un valor de $n = 0.015$.

17-14. Resuelva el problema anterior si la profundidad de entrada se encuentra 13 pies por encima de la batea de entrada.

17-15. Resuelva el problema 17-13 si la alcantarilla es circular con un diámetro de 8 pies.

17-16. Resuelva el problema anterior si la profundidad de aguas arriba se localiza 13 pies por encima de la batea de entrada y el cuerpo es rugoso, con $n = 0.025$.

17-17. Un puente de carretera de 350 pies de longitud tiene 6 pilares con narices y colas semicirculares, cada uno de 8 pies de ancho e igualmente espaciados. En el pico de una creciente se encontró que el remanso era de 0.30 pies para las 7 aberturas. La profundidad de flujo promedio inmediatamente aguas abajo de la abertura fue de 8 pies. Calcule el caudal de la creciente mediante: *a*) la ecuación de Nagler, *b*) la ecuación de d'Aubuisson, y *c*) las tablas de Yarnell.

17-18. Un puente tiene cuatro pilares con narices y colas semicirculares, cada uno de 40 pies de longitud y 10 pies de ancho. Durante un flujo pico de 45,000 pies³/s, el ancho total de la corriente fue de 390 pies y la profundidad promedio en la sección de aguas abajo fue de 19.4 pies. Estime el remanso.

17-19. Resuelva el problema anterior utilizando el método del USGS descrito en la sección 17-7. El coeficiente de rugosidad del canal es $n = 0.03$. Los datos no disponibles pueden suponerse razonablemente.

17-20. Si el puente del problema 17-17 se expone a un caudal de creciente de 35,000 pies³/s, estime el remanso. La curva de calibración del canal da una profundidad normal de 8.5 pies para este caudal.

17-21. Un puente de ferrocarril con una estructura de pilares de vía única tiene 840 pies de largo y está soportado por riostas, cada una de 2 pies de ancho y espaciadas 14 pies de centro a centro. En el pico de una creciente se encontró que el remanso promedio fue 0.15 pies. La profundidad promedio de flujo inmediatamente aguas abajo de la estructura fue de 6 pies. Estime el remanso.

17-22. Verifique la ecuación (17-37).

REFERENCIAS

1. Charles Jaeger, "Der Mischungsvorgang bei plötzlichem Querschnittsübergang" ("The mixing process in sudden transitions"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 31, Nº 24, Munich, 1936, pp. 306-309.
2. Charles Jaeger, *Engineering Fluid Mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956, pp. 157-169.
3. Charles Jaeger, "De l'impulsion totale et de ses rapports avec l'énergie totale d'un courant liquide à surface libre" ("The total impulse and its relations with the total energy of a free-surface liquid flow"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 13, Nº 39, Paris, 1947, pp. 143-151.
4. Gianni Formica, "Esperienze preliminari sulle perdite di carico nei canali, dovute a cambiamenti di sezione" ("Preliminary test on head losses in channels due to cross-sectional changes"), *L'Energia elettrica*, Vol. 32, Nº 7, Milano, julio de 1955, pp. 554-568; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Memorie e studi Nº 124*, Milano, 1955.
5. R. L. Daugherty y A. C. Ingersoll, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954, pp. 190-193.
6. Arthur T. Ippen y John H. Dawson, "Design of channel contractions", tercer artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 326-346.
7. Masashi Hom-ma y Sukeyuki Shima, "On the flow in a gradually diverged open channel", *The Japan Science Review*, serie I, Vol. 2, Nº 3, 1952, pp. 253-260.
8. Hunter Rouse, B. V. Bhoota y En-Yun Hsu, "Design of channel expansions", euarto artículo en el simposio "High-velocity flow in open channels", *Transactions*, Vol. 116, *American Society of Civil Engineers*, 1951, pp. 326-346.
9. Fred W. Blaisdell, "Flow through diverging open channel transitions at supercritical veloeities", *U.S. Soil Conservation Service, Progress Report SCS-TP-76*, abril de 1949.
10. Ivan E. Houk, "Calculation of flow in open channels", *Miami Conservancy District, Technical Report*, Parte IV, Dayton, Ohio, 1918.
11. E. W. Lane, "Experiments on the flow of water through contractions in an open channel", *Transactions*, Vol. 83, *American Society of Civil Engineers*, 1919-1920, pp. 1149-1208.
12. Carl E. Kindsvater, Rolland W. Carter y H. J. Tracy, "Computation of peak discharge at contractions", *U.S. Geological Survey, Circular Nº 284*, 1953.
13. Carl E. Kindsvater y Rolland W. Carter, "Tranquil flow through open-channel constrictions", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 955-980.
14. Hubert J. Tracy y Rolland W. Carter, "Backwater effects of open-channel constrictions", *Tran-sactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 993-1006.
15. Tate Dalrymple, "Measuring floods", en "Floods", Vol. III de *Symposia Darcy*, Publication Nº 42, *International Association of Scientific Hydrology*, 1956, pp. 380-404.
16. David L. Yarnell, Floyd A. Nagler, y Sherman M. Woodward, "Flow of water through culverts", *Studies in Engineering*, Bulletin 1, University of Iowa, 1926.
17. F. T. Mavis, "The hydraulics of culverts", *Engineering Experiment Station*, Bulletin 56, *The Pennsylvania State College*, octubre 1 de 1942.
18. Lorenz G. Straub y Henry M. Morris, "Hydraulic data comparison of concrete and corrugated metal culvert pipes", *St. Anthony Falls Hydraulics Laboratory, Technical Paper Nº 3, Series B, University of Minnesota*, julio de 1950.
19. Lorenz G. Straub y Henry Morris, "Hydraulic tests on concrete culvert pipes", *St. Anthony Falls Hydraulics Laboratory, Technical Paper Nº 4, Series B, University of Minnesota*, julio de 1950.
20. Lorenz G. Straub y Henry Morris, "Hydraulic tests on corrugated metal culvert pipes", *St. Anthony Falls Hydraulics Laboratory, Technical Paper Nº 5, Series B, University of Minnesota*, julio de 1950.

21. Lorenz G. Straub, Alvin G. Anderson y Charles E. Bowers, "Effect of inlet design on capacity of culverts on steep slopes", *St. Anthony Falls Hydraulics Laboratory, Project Report Nº 37, University of Minnesota*, agosto de 1953.
22. Lorenz G. Straub, Alvin G. Anderson y Charles E. Bowers, "Importance of inlet design on culvert capacity", en "Culvert hydraulics", *Highway Research Board, Research Report 15-B*, Washington, D.C., 1953, pp. 53-67.
23. Roy H. Shoemaker, Jr., y Leslie A. Clayton, "Model studies of tapered inlets for box culverts", en "Culvert hydraulics", *Highway Research Board, Research Report 15-B*, Washington, D.C., 1953, pp. 1-45.
24. John L. French, "First progress report on hydraulics of short pipes: Hydraulic characteristics of commonly used pipe entrances", *U. S. National Bureau of Standards, Report 4444*, diciembre 28 de 1955.
25. John L. French, "Second progress report on hydraulics of culverts: Pressure and resistance characteristics of a model pipe culvert", *U. S. National Bureau of Standards, Report 4911*, octubre 29 de 1956.
26. John L. French, "Third progress report on hydraulics of culverts: Effect of approach channel characteristics on model pipe culvert operation", *U. S. National Bureau of Standards, Report 5306*, junio 3 de 1957.
27. R. W. Carter, "Computation of peak discharge at culverts", *U. S. Geological Survey, Circular 376*, 1957.
28. Wen-Hsiung Li y Calvin C. Patterson, "Free outlets and self-priming action of culverts", artículo 1009, *Proceedings, Journal*, Nº HY3, *American Society of Civil Engineers, Hydraulics Division*, junio de 1956, pp. 1-22.
29. "Hydraulic chart Nº 1043", *Hydraulic Charts, U. S. Bureau of Public Roads*, marzo de 1951.
30. J. F. d'Aubuisson de Voisins, *Traité d'hydraulique* (*Treatise on Hydraulics*), 2ª ed., Pitois, Levraut & Cie, Paris, 1840.
31. Julius Weisbach, *Die Experimentalhydraulik* (*Experimental Hydraulics*), Freiburg, Germany, 1855.
32. J. F. Bubendey, "Stau an Brücken und Durchlässen" ("Backwater of bridges and culverts"), artículo 25, capítulo 3, parte 3, en *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, Vol. 1, 4ª ed., W. Engelmann, Leipzig, 1911, pp. 767-773.
33. Floyd A. Nagler, "Obstruction of bridge piers to the flow of water", *Transactions*, Vol. 82, *American Society of Civil Engineers*, 1918, pp. 334-395.
34. H. D. Krey, "Berechnung des Staues infolge von Querschnittverengungen" ("Calculation of backwater due to cross-sectional contraction"), *Zentralblatt der Bauverwaltung*, Vol. 39, Nº 79, Berlin, septiembre 27 de 1919, pp. 472-475.
35. Th. Rehboek, "Zur Frage des Brückenstaues" ("On the problem of bridge constriction"), *Zentralblatt der Bauverwaltung*, Vol. 39, Nº 37, Berlin, 1919, pp. 197-200.
36. Th. Rehbock, *Verfahren zur Bestimmung des Brückenstaues bei rein strömenden Wasserdurchfluss* (*A method of determining the backwater at bridges for distinctly streaming flow*), volumen publicado para celebrar la inauguración del nuevo edificio de la Division of Engineering Structures del Technical Institute of Karlsruhe, Germany, noviembre 26 de 1921, pp. 7-13; también en *Der Bauingenieur*, Vol. 2, Nº 22, Berlin, 1921, pp. 603-609.
37. Th. Rehbock, "Brückenstau und Walzenbildung" ("Backwater and eddies at bridges"), *Der Bauingenieur*, Vol. 2, Nº 13, Berlin, 1921, pp. 341-347.
38. Paul Böss, *Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fliesszustandes* (*Computation of Water Surface with Changcs in Flow Type*), Springer-Verlag, Berlin, 1919 y VDI-Verlag, Berlin, 1927.
39. Alexander Koch y Max Carstanjen, *Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften* (*Movement of Water and Associatcd Force Phenomena*), Springer-Verlag, Berlin, 1926, pp. 179-185.
40. Giulio De Marchi, *Idraulica* (*Hydraulics*), Vol. 1, Ulrico Hocpli, Milan, 1930, pp. 401-404.

41. David L. Yarnell, "Pile trestles as channel obstructions", *U. S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 429*, julio de 1934.
42. David L. Yarnell, "Bridge piers as channel obstructions", *U. S. Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 442*, noviembre de 1934.
43. L. Escande y G. Sabathé, "Sur l'emploi des profils aérodynamiques pour les piles de barrages déversoirs, de barrages mobiles et les piles des ponts" ("Use of aerodynamic profiles for movable dams and bridge piers"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 2, Nº 10, Paris, 1936, pp. 546-555.
44. Léopold Escande, "Recherches sur l'écoulement de l'eau entre les piles des ponts" ("Researches on the flow of water through the piers of bridges"), parte A, y "Remarque sur le calcul du remous provoqué par un pont" ("Remark on the calculation of the backwater caused by a bridge"), parte B, *Le Génie civil*, Vol. 115, Nº 6, agosto 5 de 1939, pp. 113-117; Nº 7, agosto 12 de 1939, pp. 138-140, y Nº 13, septiembre 13 de 1939, pp. 259-260.
45. Léopold Escande, "Expériences sur l'écoulement entre piles de ponts" ("Experiments on flow through piers of bridges"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 209, julio 3 de 1939, pp. 14-16.
46. Léopold Escande, "Sur l'écoulement entre piles de ponts" ("On the flow through piers of bridges"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 108, junio 19 de 1939, pp. 1970-1972.
47. Léopold Escande, "Recherches sur l'écoulement de l'eau entre piles de ponts" ("Researches on the flow of water through piers of bridges"), *Le Génie civil*, Vol. 115, Nº 6, agosto 5 de 1939, pp. 113-117, y Nº 7, agosto 12 de 1939, pp. 138-140.
48. Étienne Crausse, "Sur un phénomène d'oscillation du plan d'eau provoqué par l'écoulement autour d'obstacles en form de piles de ponts" ("On the phenomenon of oscillation of water surface caused by flow around obstacles in the form of hridge piers"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 209, julio 24 de 1939, pp. 197-199.
49. Otto Streck, *Grund- und Wasserbau (Foundation and Hydraulic Engineering)*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1950, pp. 420-434.
50. Josef Kozeny, *Hydraulik (Hydraulics)*, Springer-Verlag, Vienna, 1953, pp. 546-549.
51. Philipp Forchheimer, *Hydraulik (Hydraulics)*, 3ª ed., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1930, pp. 519-522 on backwater at hridge piers and pp. 522-524 on loss of head at trash racks.
52. Armin Schoklitsch, *Handbuch des Wasserbaues (Handbook of Hydraulic Engineering)*, Vol. 1, Springer-Verlag, Vienna, 1950, pp. 122-124 on backwater at bridge piers and pp. 125-127 on loss of head at trash racks.
53. Otto Kirschmer, "Untersuchungen über den Gefällsverlust an Rechen" ("Studies on the head loss through a rack"), *Mitteilungen des hydraulischen Instituts der technischen Hochschule München*, Nº 1, Munich, 1926, pp. 21-41.
54. W. Fellenius, "Undersökingar betröffande fallförluster i skyddsgrinder vid vattenkraftanlöggninger" ("Studies of head loss through racks in power plants"), *Transactions*, Nº 5, *Hydraulic Institute of the Royal Technical University of Stockholm*, 1927.
55. J. Spangler, "Untersuchungen über den Verlust an Rechen bei schräger Zuströmung" ("Studies on the head loss through a rack inclined to stream flow"), *Mitteilungen des hydraulichen Instituts der technischen Hochschule München*, Nº 2, Munich, 1928, pp. 46-60.
56. E. Scimemi, "Rilievi sperimentali sul funzionamento idraulico dei grandi impianti industriali" ("Experimental studies on the hydraulic function of large industrial plants", *L'Energia elettrica*, Vol. 10, Milano, Nº 9, septiembre de 1933, pp. 705-723; Nº 11, noviembre de 1933, pp. 897-924.
57. Armin Schoklitsch, *Hydraulic Structures*, Vol. II, traducido del alemán por Samuel Shulits, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1937, pp. 891-892.
58. Léopold Escande, "Expression de la perte de charge à la traversée des grilles" ("Expression of the head loss in water through grills"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 218, enero 31 de 1944, pp. 179-181.
59. Léopold Escande, "Étude expérimentale de la perte de charge à la traversée des grilles" ("Experimental studies of head loss in water through grills"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 218, fehrero 14 de 1944, pp. 266-268.

60. Léopold Escande, "Étude théorique et expérimentale de la perte de charge de l'eau à la traversée d'une grille" ("Theoretical and experimental study of the head loss in water through a grill"), *Le Génie civil*, Vol. 122, Nº 23, diciembre 1 de 1945, pp. 188-190, y Nº 24, diciembre 15 de 1945, pp. 197-198.
61. David H. Kent, "Models of hydraulic structures", parte 1, *Water Power*, Vol. 7, Nº 8, London, agosto de 1955, pp. 301-307. Gives head losses through tailrace fish screens.
62. Floyd A. Nagler y Albion Davis, "Experiments on discharge over spillways and models, Keokuk Dam", *Transactions*, Vol. 94, *American Society of Civil Engineers*, 1930, pp. 777-820.
63. Louis G. Puls, "Spillway discharge capacity of Wilson Dam", *Transactions*, Vol. 95, *American Society of Civil Engineers*, 1931, pp. 316-329.
64. E. Camichel, L. Escande, y G. Sabathé, "Sur la similitude des barrages à contractions latérales" ("On the similitude of dams with lateral contractions"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 194, marzo 7 de 1932, pp. 807-809.
65. E. Camichel, L. Escande y P. Dupin, "Remarques sur certains phénomènes de contractions latérales dans les barrages" ("Notes on certain phenomena of lateral contractions in dams"), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 197, octubre 9 de 1933, pp. 722-725.
66. O. Mueller, "Schwingungsuntersuchungen an unterströmten Wehren" ("Vibration studies on underflow weirs"), *Mitteilungen der preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Nº 13, Berlin, 1933.
67. J. B. Tiffany, "Lahoratory research applied to the hydraulic design of large dams", *U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Bulletin 32*, 1948.
68. Harold R. Henry, "Discussion of Diffusion of submerged jets", por M. L. Albertson, Y. B. Dai, R. A. Jensen y Hunter Rouse, *Transactions*, Vol. 115, *American Society of Civil Engineers*, 1950, pp. 687-694.
69. Arthur Toch, "Discharge characteristics of Tainter gates", *Transactions*, Vol. 120, *American Society of Civil Engineers*, 1955, pp. 290-300.
70. Hunter Rouse (editor), *Engineering Hydraulics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 540-541.
71. Léopold Escande, "Étude théorique et expérimentale de l'écoulement par vanne de fond" ("Theoretical and experimental study of flow through sluice gates"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 4, Nº 19, París, 1938, pp. 25-29, Nº 20, pp. 72-79, y Nº 21, pp. 120-128; Vol. 5, Nº 25, 1939, pp. 21-34, Nº 26, pp. 65-77 y 131-139.
72. Georg Pager, "Über den Strömungsvorgang an einer unterströmten scharfkantigen Planschütze" ("The flow characteristics at an underflow sluice gate"), *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 17, Nº 5, Berlin, octubre de 1937, pp. 259-269.
73. T. Brook Benjamin, "On the flow in channels when rigid obstacles are placed in the stream", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 1, parte 2, London, julio de 1956, pp. 227-248.
74. U. S. Army Corps of Engineers, "Tainter gates on spillway crests—Discharge coefficients, Hydraulic Design Charts 311-1 to 311-5, WES 3-56", en *Corps of Engineers Hydraulic Design Criteria*, preparado por la Office of the Chief of Engineers, U. S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., 1952, y revisado en años posteriores.
75. Nazir Ahmad, "Mechanism of erosion below hydraulic works", *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Joint Meeting of International Association of Hydraulic Research and Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, agosto de 1953, pp. 133-143.
76. Doddiah Doddiah, Maurice L. Albertson y Robert Thomas, "Scour from jets", *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Joint meeting of International Association of Hydraulic Research and Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, agosto de 1953, pp. 161-169.
77. Armin Schoklitsch, *Stauraumverlandung und Kolkabwehr (The Silting of Reservoirs and Scour Prevention)*, Springer-Verlag, Vienna, 1935.
78. C. M. Camichel, "Contrihution à l'étude des veines liquides: Les indéterminations et les solutions multiples dans leurs rapports avec l'hydraulique fluviale" ("Contribution to the theory of liquid

jets: Indeterminacies and multiple solutions in relation to fluvial hydraulics"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 1, Nº 5, Paris, 1935, pp. 235-242 y Nº 6, pp. 293-299.
79. Irby J. Hickenlooper, John C. Guillou y Ven Te Chow, "Hydraulic studies of a highway bridge", *Civil Engineering Studies, Hydraulic Engineering, Series Nº 4, University of Illinois*, junio de 1957.
80. Edward H. Taylor, "Flow characteristics at rectangular open-channel junctions", *Transactions*, Vol. 109, *American Society of Civil Engineers*, 1944, pp. 893-903.
81. Charles E. Bowers, "Studies of open-channel junctions", parte V de "Hydraulic model studies for Whiting Field Naval Air Station, Milton, Florida", *St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Technical Paper Nº 6, Series B, University of Minnesota*, enero de 1950.

PARTE V

FLUJO NO PERMANENTE

FLUJO NO PERMANENTE

El problema de flujo no permanente más comúnmente encontrado en canales abiertos está relacionado con las *ondas traslacionales*, que son ondas gravitacionales que se propagan en un canal abierto y originan un desplazamiento significativo de las partículas de agua en una dirección paralela al flujo[1]. En flujo en canales abiertos reales las partículas de agua también pueden oscilar. Sin embargo, el efecto de oscilación es insignificante en los problemas que se estudiarán en este libro.

Para propósitos de análisis, el flujo no permanente se clasifica en dos tipos: el flujo no permanente gradualmente variado y el flujo no permanente rápidamente variado. En el primer tipo la curvatura del perfil de onda es suave y el cambio en la profundidad es gradual. La componente vertical de la aceleración de las partículas de agua es insignificante en comparación con la aceleración total, en tanto que el efecto de la fricción del canal a menudo es apreciable y debe considerarse para un análisis exacto. En el segundo tipo la curvatura del perfil de onda es muy grande, de modo que la superficie del perfil puede volverse virtualmente discontinua. La componente vertical de la aceleración, por consiguiente, juega un papel importante en el fenómeno, en tanto que el efecto de la fricción en el canal es insignificante en comparación con el efecto dinámico del flujo. Ejemplos comunes de flujo no permanente gradualmente variado son las ondas de creciente y las debidas a la operación lenta de estructuras de control, como las compuertas y las compuertas deslizantes en exclusas. Algunos ejemplos de flujo no permanente rápidamente variado son las oleadas de diferentes clases, causadas por la operación rápida de estructuras de control.

[1] Otro tipo básico de onda gravitacional es la *onda oscilante*, en la cual las partículas de agua oscilan en una órbita alrededor de una posición media, pero no se desplazan significativamente en la dirección de propagación de onda.

El flujo no permanente gradualmente variado se estudiará en los capítulos 18 y 20, y el no permanente rápidamente variado en el capítulo 19[2]. Para una información extensa sobre el flujo no permanente en canales abiertos, *véanse* [5] a [20].

[2] Otras clases de ondas y mareas en canales abiertos están por fuera del alcance del presente trabajo. Para una información completa sobre ondas de agua, *véanse* [1] a [3]. Para referencias en hidráulica de mareas, el lector debe referirse a las bibliografías extensas preparadas por el Committee on Tidal Hydraulics, U. S. Army Corps of Engineers [4].

CAPÍTULO 18

FLUJO NO PERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO

18-1. Continuidad del flujo no permanente. La ley de continuidad para flujo no permanente puede establecerse considerando la conservación de masa en un espacio infinitesimal entre dos secciones de canal (figura 18-1). En flujo no permanente el caudal cambia con la distancia a una tasa $\partial Q/\partial x$, y la profundidad cambia con el tiempo a una tasa de $\partial y/\partial t$. El cambio en el caudal a través del espacio en el tiempo dt es $(\partial Q/\partial x)\, dx\, dt$. El cambio correspondiente en el almacenamiento dentro del canal en el espacio es $T\, dx\, (\partial y/\partial t)\, dt = dx\, (\partial A/\partial t)\, dt$. Debido a que el agua es incompresible, el cambio neto en el caudal más el cambio en el almacenamiento debería ser cero; es decir,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dt + T\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dt + dx \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) dt = 0$$

Al simplificar,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}1)$$

o

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}2)$$

En una sección determinada, $Q = VA$; entonces la ecuación (18-1) se convierte en

$$\frac{\partial (VA)}{\partial x} + T \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}3)$$

o

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + T \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}4)$$

Como la profundidad hidráulica es $D = A/T$ y $\partial A = T\, \partial y$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}5)$$

Las ecuaciones anteriores son todas formas de la *ecuación de continuidad para flujo no permanente en canales abiertos*. Para un canal rectangular de ancho infinito la ecuación (18-1) puede escribirse como

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}6)$$

donde q es el caudal por unidad de ancho. Esta expresión la introdujo por primera vez Saint-Venant [21].

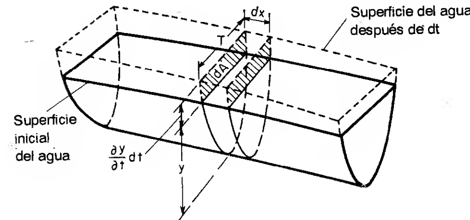


Figura 18-1. Continuidad de flujo no permanente.

Cuando el canal es alimentado lateralmente con un caudal adicional de q' por unidad de longitud, por ejemplo, en un área que está siendo inundada sobre un dique, la ecuación (18-2) puede escribirse como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + q' = 0 \qquad (18\text{-}7)$$

Si el canal está compuesto por una sección principal profunda y otra lateral extensiva y poco profunda, puede suponerse que el caudal en la sección principal es relativamente alto, en tanto que la sección lateral contribuye sólo al almacenamiento pero no al caudal. Luego la ecuación (18-2) puede escribirse como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A'}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}8)$$

donde A' es el área mojada de la sección lateral. Esta ecuación también se aplica al caso de un canal que contiene espolones; el agua circula entre éstos para guiar el flujo hacia el canal principal pero no contribuye al caudal.

18-2. Ecuación dinámica para flujo no permanente. Por simplicidad[1], el flujo no permanente se tratará como flujo permanente bidimensional, con la excepción de que se utilizará una variable adicional para el elemento tiempo, la cual tiene en cuenta la variación en la velocidad de flujo y por consiguiente representa la aceleración, que produce fuerza y causa pérdidas de energía adicionales en el flujo[2].

Con referencia a la figura 18-2, la fuerza debida a la aceleración $\partial V/\partial t$ que actúa sobre un peso unitario w de agua es igual a $(w/g)\, \partial V/\partial t$; es decir, fuerza = masa × aceleración. Se supone que la pendiente del canal es pequeña, que la aceleración ocurre en la dirección x y que su componente vertical es insignificante. Luego el trabajo hecho por esta fuerza a lo largo de la distancia dx entre dos secciones del canal, como las que se muestran en la figura es $(w/g)\,(\partial V/\partial t)\, dx$. Esta cantidad de trabajo es igual a la pérdida de energía debida a la aceleración. Al dividir por w, la pérdida en altura se expresa mediante $(1/g)\,(\partial V/\partial t)\, dx$.

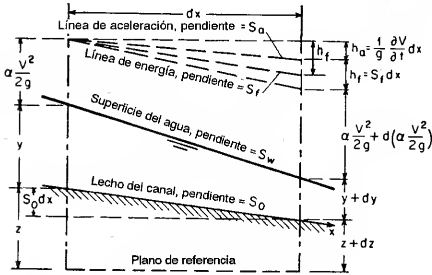


Figura 18-2. Representación simplificada de la energía en flujo no permanente.

El cambio total de altura en la longitud infinitesimal dx puede tratarse exactamente igual que en el caso de flujo permanente, excepto que debe incluirse una pérdida adicional debida a la aceleración. La pérdida total de altura consta de dos partes: la pérdida debida a la fricción $h_f = S_f dx$ y la pérdida debida a la aceleración $h_a = (1/g)\,(\partial V/\partial t) dx$. La línea que indica ésta última se conoce como *línea de aceleración*; su pendiente es $S_a = (1/g)\,(\partial V/\partial t)$. Mediante el principio de energía puede escribirse lo siguiente[3]:

[1] Para un análisis riguroso del flujo no permanente, *véanse* [5], [6], [9], [11], [15] y [20].

[2] La aceleración es positiva para una velocidad de flujo que se incrementa, y negativa para la que disminuye.

[3] Como existen dos variables independientes x y t, los cambios de profundidad y de altura de velocidad se componen de dos partes, es decir, $dy = (\partial y/\partial x)\, dx + (\partial y/\partial t)\, dt$ y $d(\alpha V^2/2g) = [\partial(\alpha V^2/2g)/\partial x]\, dx + [\partial(\alpha V^2/2g)/\partial t]\, dt$. Como el fondo del canal no varía con el tiempo, $\partial z/\partial x = dz/dx$ y $\partial z/\partial t = 0$. Para propósitos de simplicidad, estos detalles matemáticos se omiten en el presente análisis.

$$z + y + \frac{\alpha V^2}{2g} = z + dz + y + dy + \frac{\alpha V^2}{2g} + d\left(\frac{\alpha V^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\, dx + S_f\, dx \qquad (18\text{-}9)$$

Al simplificar,

$$d\left(z + y + \frac{\alpha V^2}{2g}\right) = -S_f\, dx - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\, dx \qquad (18\text{-}10)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa el cambio de altura total. Los dos términos de la derecha son las pérdidas de altura debidas a la fricción y a la aceleración, respectivamente. Esta ecuación establece que el cambio de altura total en un flujo no permanente gradualmente variado depende de los efectos de fricción y aceleración. En flujo permanente gradualmente variado, el cambio de altura depende por completo de la fricción, siempre y cuando las pérdidas por remolino sean insignificantes.

Al dividir por dx en la ecuación (18-10) y al utilizar derivadas parciales,

$$\frac{\partial(z + y)}{\partial x} + S_f + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha V^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (18\text{-}11)$$

o

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} + S_f = 0 \qquad (18\text{-}12)$$

Esta es la *ecuación dinámica general para flujo no permanente gradualmente variado*. La pendiente de fricción en la ecuación puede evaluarse por medio de la ecuación de Manning, la de Chézy o cualquier otra de flujo uniforme adecuada.

Para canales prismáticos, es decir, para $-\partial z/\partial x = S_0$, la ecuación (18-12) puede escribirse como

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = S_0 - S_f \qquad (18\text{-}13)$$

Las ecuaciones de continuidad y dinámica para flujo no permanente gradualmente variado las publicó por primera vez Saint-Venant [21, 22]. La validez de estas ecuaciones ha sido verificada mediante muchas observaciones y experimentos. Sin embargo, debido a su complejidad matemática, la integración exacta de estas ecuaciones es imposible. Para aplicaciones prácticas, puede obtenerse una solución de las ecuaciones mediante métodos de paso aproximados o basados en suposiciones simplificativas.

18-3. Onda creciente monoclinal. Un caso especial de flujo no permanente posible en canales prismáticos es el *flujo uniformemente progresivo*, que tiene un perfil de onda estable, el cual no cambia de forma a medida que se mueve a lo largo del canal. De acuerdo con esta definición, el flujo uniformemente progresivo tiene las siguientes características notables: 1) las posiciones sucesivas del frente de onda

en diferentes tiempos son paralelas; 2) la velocidad del frente de onda o *celeridad* es mayor que la velocidad media del agua, en cualquier sección de la onda; y 3) la configuración de la onda viaja hacia aguas abajo con una velocidad constante, pero la velocidad media del agua en la sección transversal puede variar de una sección a otra a medida que cambia el radio hidráulico y la pendiente superficial. De las diferentes formas de configuración de onda en un flujo uniformemente progresivo se tomará la *onda creciente monoclinal* como el caso clásico para el siguiente análisis, debido a que esta onda puede aproximarse a la mayor parte de las ondas de creciente en canales naturales y a que es manejable mediante un tratamiento matemático simple.

La onda creciente monoclinal (figura 18-3) es traslacional y de configuración estable, es decir, uniformemente progresiva, que viaja a lo largo del canal con una velocidad constante V_w desde una región aguas arriba de flujo uniforme con y_1, V_1 y Q_1 hacia una región de aguas abajo con flujo uniforme con y_2, V_2 y Q_2. La profundidad del frente de onda varía de manera gradual desde la sección de aguas arriba hasta la de aguas abajo. Durante un intervalo de tiempo t, el frente de onda se mueve hacia adelante una distancia igual a $V_w t$. La velocidad de onda es mayor que las velocidades medias V_1 y V_2 en las regiones de flujo uniforme. Cuando el frente de onda pasa sobre el flujo en el canal, toma un caudal permanente $Q_o = (V_w - V_1) A_1$ en el frente. Debido a que la configuración de la onda es estable y su volumen constante, el frente deja un caudal permanente $Q_o = (V_w - V_2) A_2$ igual al del lado de aguas arriba. El caudal permanente Q_o que fluye a través del frente de onda en la dirección hacia aguas arriba se conoce como *rebase*. Al igualar los valores del caudal permanente,

$$Q_o = (V_w - V_1)A_1 = (V_w - V_2)A_2 \tag{18-14}$$

Al resolver para V_w,

$$V_w = \frac{V_1A_1 - V_2A_2}{A_1 - A_2} \tag{18-15}$$

Como en las regiones de flujo uniforme $Q_1 = V_1A_1$ y $Q_2 = V_2A_2$, la ecuación (18-15) puede escribirse como

$$V_w = \frac{Q_1 - Q_2}{A_1 - A_2} \tag{18-16}$$

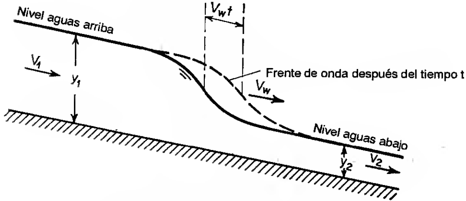


Figura 18-3. Onda creciente monoclinal.

Las ecuaciones anteriores pueden utilizarse para el cálculo de la velocidad de la onda creciente monoclinal. La ecuación (18-15) muestra que, si no existe flujo inicial, es decir, si $V_1 = 0$ y $A_1 = 0$, entonces $V_w = V_2$. Si existe flujo inicial, entonces V_w es siempre mayor que V_1 o V_2. Esto es cierto debido a que la onda se mueve más rápidamente que las partículas de agua si tiene que proveer el volumen de la configuración de onda en cualquier momento.

En canales naturales la velocidad de una onda de creciente monoclinal supuesta puede determinarse utilizando el conocido *principio de Kleitz-Seddon*. La ecuación (18-16) indica que la velocidad de una onda creciente monoclinal es una función de la relación entre el área mojada y el caudal para el canal. La figura 18-4 muestra una curva que representa tal relación. Para secciones de canal comunes en las cuales la velocidad aumenta al igual que el área mojada, esta curva es cóncava hacia arriba. En la figura, $\tan\theta_1 = Q_1/A_1 = V_1$, $\tan\theta_2 = Q_2/A_2 = V_2$ y $\tan\theta_w = (Q_1 - Q_2)/(A_1 - A_2) = V_w$ = la pendiente de la línea P_1P_2. Como la curva es cóncava hacia arriba, nótese que V_w debe ser mayor que V_1 o V_2. Para una V_w máxima, la pendiente de la línea P_1P_2 debe ser máxima. Esto ocurre cuando $Q_1 = Q_2$ o cuando el punto P_2 se aproxima al punto P_1 y la pendiente de la secante P_1P_2 se aproxima a la pendiente de la tangente P_1 como límite. Por consiguiente,

$$(V_w)_{máx} = \frac{dQ}{dA} \tag{18-17}$$

Como $dA = T\,dy$, la anterior ecuación se convierte en

$$(V_w)_{máx} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dy} \tag{18-18}$$

donde dQ/dy es la pendiente de la curva de calibración de caudal. Si se conoce el ancho superficial de la sección del canal, puede calcularse la velocidad máxima utilizando esta ecuación. De igual modo, si se conoce la velocidad máxima, puede determinarse el ancho promedio de canal. El término dQ/dy para un nivel determinado puede calcularse por medio de la pendiente media de las curvas de calibración de caudal en las estaciones de aforo dentro del tramo en consideración. La velocidad máxima V_w puede determinarse a partir de la distancia y el tiempo del viaje de la onda entre las estaciones.

La ecuación (18-18) también puede utilizarse para determinar la relación entre la velocidad máxima de onda y la velocidad del agua en un canal prismático. Con base en la ecuación de Manning, puede demostrarse que la relación es 1.67, 1.33, y 1.44, para canales rectangulares anchos, canales triangulares y canales parabólicos anchos, respectivamente. Con base en la ecuación de Chézy, las relaciones correspondientes son: 1.50, 1.25, y 1.33.

Las ecuaciones (18-17) y (18-18) se aplican sólo a pequeños aumentos en el nivel de creciente, donde el frente de onda tiene una pendiente tan pequeña que el término dQ/dy puede tomarse aceptablemente de la curva de calibración para flujo uniforme.

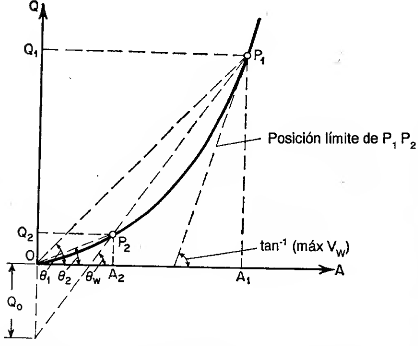


Figura 18-4. Interpretación gráfica de las relaciones de área mojada, caudal y velocidad en una onda creciente monoclinal.

El principio del método antes mencionado lo desarrolló matemáticamente Kleitz [27] por primera vez, pero Seddon [28] también lo descubrió a partir de observaciones reales en un estudio sobre las alturas de aforo en los ríos Mississippi y Missouri. Wilkinson [29] describió la aplicación del método a los ríos Clinch y Bajo Tennessee. Él concluyó que la velocidad de onda en canales naturales puede establecerse bastante bien mediante este método. Encontró que los puntos medios de los niveles de aumento y caída eran los que mejor se ajustaban a la determinación de la velocidad de una onda observada.

18-4. Ecuación dinámica para flujo uniformemente progresivo. En un intervalo de tiempo dt el frente de onda de un flujo uniformemente progresivo (figura 18-3) viajará una distancia $V_w\, dt$. Puede demostrarse que a medida que la onda avanza la velocidad de flujo decrece con la distancia a una tasa de $-\partial V/\partial x$. Por consiguiente, el cambio de velocidad en dt es $dV = -V_w\, dt\, (\partial V/\partial x)$. Utilizando diferenciales parciales, $\partial V/\partial t = V_w(\partial V/\partial x)$.

También puede escribirse una ecuación similar a la (18-14) para el caso general de flujo uniformemente progresivo; es decir, $Q_o = (V_w - V)A$. Al derivar esta ecuación con respecto a x, $\partial V/\partial x = (Q_o/AD)\,(\partial y/\partial x)$.

Al sustituir las expresiones anteriores para $\partial V/\partial t$ y $\partial V/\partial x$, respectivamente, en la ecuación (18-13), suponiendo $\alpha = 1$ y al simplificar, $\partial y/\partial x$ para el flujo en un canal prismático es

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Q_o^2/gA^2D} \qquad (18\text{-}19)$$

Como $S_f = Q^2/K^2 = V^2A^2/K^2 = (V_wA - Q_o)^2/K^2$, la ecuación (18-19) se convierte en

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S_0 - (V_wA - Q_o)^2/K^2}{1 - Q_o^2/gA^2D} \qquad (18\text{-}20)$$

Ésta es la *ecuación dinámica para flujo uniformemente progresivo en un canal prismático*. Como el flujo es no permanente, la posición del perfil de onda cambia constantemente, pero la forma de perfil en cualquier instante permanece igual. Por consiguiente, la ecuación (18-20) describe una "fotografía instantánea" del perfil en cualquier momento. Para canales rectangulares anchos la ecuación puede simplificarse además y ser matemáticamente integrable. Nótese que $\partial y/\partial x$ representa la pendiente superficial instantánea del perfil de onda. En un instante determinado ésta es igual a la pendiente permanente dy/dx y por consiguiente puede expresarse mediante ésta última.

Existe una similitud aparente entre la ecuación (18-20) y la ecuación dinámica para flujo variado permanente [por ejemplo, la ecuación (9-16) con $\alpha = 1$]. Esta similitud puede explicarse como sigue. Imagine que un observador en la banca del canal corre de manera simultánea con el flujo uniformemente progresivo de la figura 18-3, en la misma dirección y con la misma velocidad V_w que el frente de onda. Éste observará una imagen de un flujo permanente como el que se muestra en la figura 18-5; para él la superficie del agua aparecerá estacionaria y el flujo mostrará un caudal permanente Q_o y una velocidad $V_w - V$ en cada punto a lo largo del canal. Por consiguiente, si Q_o se toma como un caudal permanente, puede aplicarse la ecuación de flujo variado permanente de manera directa a este flujo uniformemente progresivo excepto que el caudal utilizado para el cálculo de la pendiente friccional debe tomarse igual a $V_wA - Q_o$. Este caudal es responsable de las pérdidas friccionales.

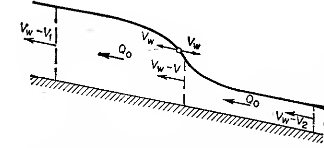


Figura 18-5. Visión de un observador que sigue el frente de onda de un flujo uniformemente progresivo.

El caudal de cualquier sección de un flujo uniformemente progresivo es $Q = V_wA - Q_o$. Luego, $Q_o = V_wA - Q$ y la ecuación (18-20) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - Q^2/K^2}{1 - (V_wA - Q)^2/gA^2D} \qquad (18\text{-}21)$$

Si la velocidad es muy baja de manera que el segundo término del denominador, el cual cubre el efecto de la altura de velocidad, puede ignorarse, la anterior ecuación puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = S_0 - \frac{Q^2}{K^2} \qquad (18\text{-}22)$$

Mediante la ecuación (9-11), $K^2 = Q_n^2/S_0$. Luego la ecuación (18-22) se convierte en

$$Q = Q_n \sqrt{1 - \frac{1}{S_0}\frac{dy}{dx}} \qquad (18\text{-}23)$$

Supóngase que j representa la tasa de aumento en la superficie del agua en una determinada sección del canal. Entonces $j = -V_w\, dy/dx$ o $dy/dx = -j/V_w$. Al sustituir esta expresión en la ecuación (18-23),

$$Q = Q_n \sqrt{1 + \frac{j}{V_w S_0}} \qquad (18\text{-}24)$$

Esta ecuación puede utilizarse para calcular de manera aproximada el caudal real de un flujo no permanente en una estación determinada, siempre y cuando la velocidad sea baja. En la ecuación, el caudal normal Q_n puede determinarse mediante la curva de calibración de la estación, y las otras cantidades pueden medirse en el campo. Jones [30] desarrolló empíricamente una ecuación similar, que se utiliza a menudo para corregir el caudal normal con el fin de obtener el caudal real en un río cuando el nivel está cambiando. Sin embargo, en la ecuación de Jones la velocidad de onda en la ecuación (18-24) se remplaza por la superficial, la cual es mucho más fácil de determinar pero es menor que la velocidad de onda real. A partir de la ecuación (18-21) puede obtenerse una ecuación más exacta que la (18-24) haciendo $dy/dx = -j/V_w$ y resolviendo para Q. Sin embargo, la deducción y la forma resultante de la ecuación son muy complicadas para propósitos prácticos.

18-5. Perfil de onda del flujo uniformemente progresivo. Éste puede deducirse con facilidad para canales rectangulares anchos mediante la ecuación de Chézy. Para el ancho unitario de un canal rectangular ancho, $A = R = D = y$. Mediante la ecuación de Chézy, $K^2 = C^2y^3$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación (18-20), puede expresarse la pendiente en cualquier punto de perfil de onda en cualquier instante como

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{y^3 - (V_w y - Q_o)^2/C^2 S_0}{y^3 - Q_o^2/g} \qquad (18\text{-}25)$$

Cuando $dy/dx = 0$, la anterior ecuación da $y^3 - (V_w y - Q_o)^2/C^2S_0 = 0$. Esta es una ecuación cúbica para y; la naturaleza de sus tres raíces puede determinarse mediante un discriminante Δ[4]. La ecuación dará tres raíces reales diferentes si $\Delta > 0$; tres raíces reales, dos de ellas semejantes si $\Delta = 0$; y una raíz real y dos raíces imaginarias si $\Delta < 0$. Puede demostrarse que el tercer caso no producirá perfiles de onda posibles y que el segundo es un caso especial del primero. Para $\Delta > 0$ la ecuación cúbica puede escribirse como $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$, donde las dos raíces positivas y_1 y y_2 son, respectivamente, las profundidades normales, final e inicial, a las cuales el frente de onda es asintótico. La tercera raíz es $y_3 = Q_o^2/C^2S_0y_1y_2$. Como y_3 no es asintótica a cualquier parte real del perfil de onda, no tiene significado físico.

[4] Esta ecuación puede escribirse en la forma $y^3 + c_1y^2 + c_2y + c_3 = 0$. Luego $\Delta = 18c_1c_2c_3 - 4c_1^3c_3 + c_1^2c_2^2 - 4c_2^3 - 27c_3^2$.

Cuando $dy/dx = \infty$, la ecuación (18-25) da $y = \sqrt[3]{Q_o^2/g} = y_c$. Ésta se conoce como *profundidad crítica de rebase*, o profundidad crítica correspondiente a un caudal permanente igual al rebasamiento. Por consiguiente, el perfil de onda es vertical a la línea de profundidad crítica de rebase.

Al sustituir y_c^3 para Q_o^2/g y $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ para el numerador de la ecuación (18-25) y al resolver para x,

$$x = \frac{1}{S_0}\int \frac{y^3 - y_c^3}{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}\,dy + C_1 \qquad (18\text{-}26)$$

donde C_1 es una constante de integración. Con los valores conocidos de V_w, Q_o, S_0 y C, esta ecuación representa cierto número de perfiles de onda posibles. Para una onda creciente monoclinal con un nivel inicial y_1 y uno final y_2, los perfiles posibles se muestran en la figura 18-6 para $y_c < y_2$ y $y_c > y_2$. En teoría, en el caso $y_c < y_2$ el frente de onda se extiende una distancia infinita hacia aguas abajo, debido a que el perfil de onda es asintótico al nivel de aguas abajo. Esto no parece ser razonable, debido a que la onda en realidad empieza en un tiempo finito y viaja con una velocidad finita. La explicación es que el perfil de onda se volverá estable sólo después de que la onda alcanza su equilibrio. Los primeros trazos de la onda se transmiten hacia aguas abajo mediante propagación dinámica con una velocidad $V_2 + \sqrt{gy}^2$, la cual es mucho mayor que la velocidad de onda final V_w. Mediante esta acción el extremo de aguas abajo de una onda real se aproximará a la forma asintótica teórica muy rápidamente. Si la velocidad V_w es mayor que $V_2 + \sqrt{gy_2}$, es imposible que el frente de onda se extienda a lo largo de una distancia infinita hacia aguas abajo. Éste es el caso cuando $y_c > y_2$. El extremo de aguas abajo de la onda termina con un frente abrupto, que en teoría debería cruzar verticalmente la línea de profundidad crítica de rebase. El frente de onda en esencia es un flujo no permanente rápidamente variado, conocido como *oleada hidráulica* (sección 19-2).

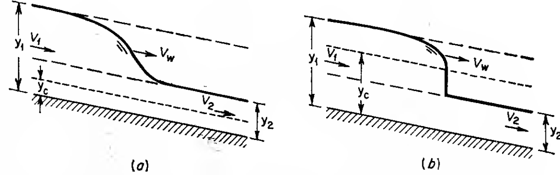


Figura 18-6. Perfiles de flujo uniformemente progresivo: (*a*) cuando $y_c < y_2$ o $V_w < V_2 + \sqrt{gy_2}$; (*b*) cuando $y_c > y_2$ o $V_w > V_2 + \sqrt{gy_2}$.

Ejemplo 18-1. Determine el perfil de onda de la creciente generada por la falla de una presa[5], que causa una liberación súbita del agua embalsada hacia un canal rectangular seco. Utilice la ecuación de Manning para expresar la velocidad de flujo uniforme.

Solución. En este caso el frente de onda se mueve formando una pared de agua inclinada y empinada cuyo perfil en apariencia no cambia siempre y cuando las condiciones del canal permanezcan fijas y la fuente de suministro sea constante. Por consiguiente, éste puede considerarse un caso especial de flujo uniformemente progresivo, conocido como *onda de remolino*, en la cual $A_2 = 0$, $V_2 = 0$, $Q_o = 0$ y $V_w = V_1 = C\sqrt{y_1 S_0}$. Al sustituir los valores de Q_0 y V_w y $K = CA\sqrt{y}$ en la ecuación (18-20),

$$\frac{dy}{dx} = S_0\left(1 - \frac{y_1}{y}\right) \tag{18-27}$$

Sea $y_1 = y_n$, la cual es la profundidad normal en la cresta de la onda, donde el flujo es uniforme. Resuelva la ecuación (18-27) para dx; entonces

$$dx = \frac{1}{S_0}\left(1 - \frac{1}{1 - y/y_n}\right) dy \tag{18-28}$$

Escoja la punta del frente de onda, donde $x = 0$ y $y = 0$, como el origen, e integre la ecuación anterior; la longitud del perfil de onda desde el frente de onda hasta la sección con profundidad y es

[5] Éste es el llamado problema del rompimiento de una presa, muy conocido en hidráulica. En 1892 Ritter [31] dio la primera solución al problema mediante la ecuación aproximada de Saint-Venant pero ignorando los efectos friccionales y de resistenia turbulenta al flujo no permanente. En consecuencia, esta solución clásica no real no se apoyó en los experimentos y hubo necesidad de buscar análisis más prácticos. En 1914, Forchheimer [5, pp. 267-271] presentó un resumen de la mayor parte de los trabajos previos sobre este problema, incluidos los intentos de incorporar los efectos de resistencia.

Hacia el final de la Segunda Guerra Mundial, Ré [32] recibió la orden del Comando Aliado de estudiar el problema con anticipación de la posible destrucción de grandes presas sobre el río Rin en la frontera suizo alemana. Mediante un cálculo gráfico de diferencias finitas de la ecuación característica (sección 20-2) desarrollado por Craya [33], Ré pudo calcular el flujo esperado en la destrucción de una presa para un valor específico de la pendiente y el factor de resistencia de Chézy. La solución de Ré incluyó la presencia inicial de agua en el lado de aguas abajo de la presa, causando la formación de una oleada en su problema.

En 1952, Lévin [34] describió una solución al problema mediante un método gráfico; en el mismo año Dressler [35] presentó una solución al problema en la cual el efecto de resistencia se evaluaba utilizando la ecuación de Chézy. Esta solución presenta una buena coincidencia con los datos observados excepto en la región cercana a la punta del frente de onda. En consecuencia, se cree que la ecuación de Chézy no es apropiada para la aplicación de flujos altamente no permanentes o a la condición de turbulencia en la región del frente. En 1953, Dressler y Whitham [36] mejoraron la solución mediante un análisis más riguroso del flujo en la región del frente. Dressler [36] también desarrolló un método para analizar el flujo durante el muy pequeño intervalo de tiempo después de que se inicia el movimiento.

Los datos experimentales sobre el problema de rompimiento de presas son pocos, entre los que se destacan los experimentos iniciales hechos por Schoklitsh [37] y Eguiazaroff [38] y los últimos hechos por el U. S. National Bureau of Standards [36].

Un problema similar al de rompimiento de una presa se relaciona con el flujo debido a la apertura súbita de una compuerta deslizante. En 1950, Pohle [39] realizó un análisis teórico de los perfiles de onda aquí desarrollados, suponiendo un potencial de velocidad de flujo en coordenadas lagrangianas. Experimentos sobre este problema también los realizó el National Bureau of Standards. Una comparación de las teorías y los experimentos de ambos problemas la presentó Dressler [36] en 1954. Stoker [5, pp. 513-522] en 1957 dio un tratamiento completo del problema de rompimiento de presas a lo largo de las líneas trabajadas por Pohle.

$$x = \frac{1}{S_0}\int_0^y \left(1 - \frac{1}{1 - y/y_n}\right) dy \tag{18-29}$$

Al integrar,

$$x = \frac{y_n}{S_0}[z + \ln(1 - z)] \tag{18-30}$$

donde $z = y/y_n$. Esta ecuación representa el perfil requerido de la onda de remolino debida a la falla de una presa[6]. Si el suministro de flujo de aguas arriba es limitado, el perfil de onda que se propaga hacia aguas arriba se describirá en el ejemplo 19-5.

Ejemplo 18-2. Determine el perfil de una onda creciente monoclinal en un canal rectangular ancho. Suponga que la onda se mueve con una velocidad constante en el nivel máximo sin cambiar con el tiempo.

Solución. Para un ancho unitario del canal rectangular ancho, $A_1 = y_1$ y $A_2 = y_2$. Mediante la ecuación de Chézy, $V_1 = C\sqrt{y_1 S_0}$ y $V_2 = C\sqrt{y_2 S_0}$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación (18-15) y al simplificar,

$$V_w = V_2 G \tag{18-31}$$

donde

$$G = \frac{1 - (y_1/y_2)^{3/2}}{1 - y_1/y_2} \tag{18-32}$$

Mediante la ecuación (18-15), remplazando A_1 y V_1 por A y V, respectivamente, para cualquier sección determinada,

$$V_w = \frac{A_2 V_2 - AV}{A_2 - A} \tag{18-33}$$

Al eliminar V_w de las ecuaciones (18-31) y (18-33) y al resolver para V,

$$V = \left(G - \frac{G - 1}{z}\right) V_2 \tag{18-34}$$

donde $z = y/y_2$. El perfil de onda en consideración es largo y aplanado; luego la velocidad media V cambiará muy lentamente con respecto al tiempo t y a la distancia x. Luego $\partial V/\partial t = 0$ y $\partial V/\partial t = 0$. A partir de la ecuación (18-13) y al utilizar diferenciales,

$$\frac{dy}{dx} = S_0 - S_f \tag{18-35}$$

Como $V = C\sqrt{yS_f}$ y $V_2 = C\sqrt{y_2 S_0}$, la ecuación (18-34) da

$$S_f = \frac{V^2}{C^2 y} = \frac{S_0}{z}\left(G - \frac{G - 1}{z}\right)^2 \tag{18-36}$$

Al sustituir esta ecuación para S_f en la ecuación (18-35),

$$\frac{dy}{dx} = S_0 - \frac{S_0}{z}\left(G - \frac{G - 1}{z}\right)^2 \tag{18-37}$$

o

$$dx = \frac{y_2}{S_0}\left\{1 + \frac{(Gz - G + 1)^2}{(z - 1)[z^2 - (G^2 - 1)z + (G - 1)^2]}\right\} dz \tag{18-38}$$

[6] Para una solución refinada de este problema, *véase* [36].

Al integrar,

$$x = \frac{y_2}{S_0}\left\{z + \frac{1}{3-2G}\ln(1-z) - \frac{(G-1)^2(2G+1)}{2(3-2G)}\ln[z^2-(G^2-1)z+(G-1)^2] - \frac{(G-1)^2[(2G+1)(G+1)-4]}{2(3-2G)\sqrt{(G+1)^2-4}}\ln\frac{2z-(G^2-1)-(G-1)\sqrt{(G+1)^2-4}}{2z-(G^2-1)+(G-1)\sqrt{(G+1)^2-4}}\right\} + C_1 \qquad (18\text{-}39)^7$$

donde $z = y/y_2$, y_2 es la profundidad correspondiente al nivel alto, y es la profundidad en cualquier sección a lo largo del perfil de onda, G se define mediante la ecuación (18-32), y_1 es la profundidad correspondiente al nivel bajo y C_1 es una constante que puede determinarse de la condición de que $x = 0$ cuando $y = (y_1 + y_2)/2$.

Ejemplo 18-3. Determine la velocidad y el perfil de onda de un flujo uniformemente progresivo en un canal ancho si $y_1 = 25$ pies, $y_2 = 10$ pies, el C de Chézy = 100 y $S_0 = 0.0004$.

Solución. Mediante la ecuación de Chézy y la ecuación (18-15), $V_w = 12.45$ pies/s. Mediante la ecuación (18-14), $Q_o = 61.25$ pies³/s por unidad de ancho. Como el discriminante Δ es positivo, el numerador de la ecuación (18-25) tiene tres raíces reales, las cuales son $y_1 = 25$, $y_2 = 10$ y $y_3 = 61.25^2/(100^2 \times 0.0004 \times 25 \times 10) = 3.76$. La profundidad crítica de rebase es $y_c = \sqrt[3]{61.25^2/32.2} = 4.89$ pies. Como $y_c < y_2$, no se formará ninguna oleada hidráulica. Al sustituir todos los valores conocidos en la ecuación (18-26),

$$x = \frac{1}{0.0004}\int\frac{y^3 - 116.7}{(y-25)(y-10)(y-3.76)}\,dy + C_1 \qquad (18\text{-}40)$$

Expresado en fracciones parciales,

$$x = \frac{1}{0.0004}\int\left(1 - \frac{48.68}{25-y} - \frac{9.437}{y-10} - \frac{0.4794}{y-3.76}\right)dy + C_1 \qquad (18\text{-}41)$$

Al integrar,

$$x = \frac{1}{0.0004}\left[y + \ln\frac{(25-y)^{48.68}}{(y-10)^{9.437}(y-3.76)^{0.4794}}\right] + C_1 \qquad (18.42)$$

Al tomar el origen en $x = 0$, $y = 24$, la ecuación (18-42) da $C_1 = 5{,}840$. El perfil de onda calculado mediante esta ecuación se grafica como se muestra en la figura 18-6*a*.

18-6. Propagación de ondas. Antes de continuar con otros análisis de flujo no permanente, parece pertinente estudiar la propagación de ondas gravitacionales en canales. Para este propósito se describirá una sola forma de onda gravitacional, conocida como *onda solitaria*.

Russell [41][8] observó por primera vez e investigó experimentalmente la onda solitaria la cual tiene una configuración simple (figura 18-7), que en su totalidad consta de una elevación sin ninguna depresión o valle asociado. La onda se localiza por completo por encima de la superficie normal del agua y se mueve suave y tranquilamente sin turbulencia en cualquier lugar de su perfil. En un canal sin

[7] La deducción de esta ecuación la dio originalmente Moots [40].

[8] Ésta la descubrió por primera vez Russell en 1834. El análisis matemático de la onda solitaria fue trabajado original e independientemente por Boussinesq [42] y Rayleigh [43]. Un recuento completo del análisis puede encontrarse en Lamb [3, pp. 423-426].

fricción la onda puede viajar una distancia infinita sin cambiar su forma y su velocidad, pero en un canal real la altura de la onda se reduce de manera gradual por los efectos de la fricción. Esta onda puede producirse en un laboratorio mediante un desplazamiento horizontal súbito de la compuerta del canal (figura 18-7) o por medio de otros métodos. En la naturaleza estas ondas las generan los terremotos y se han observado viajando a través de los océanos.

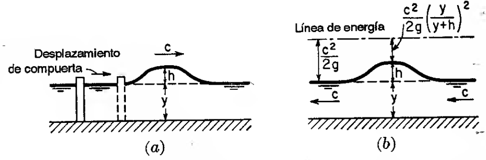


Figura 18-7. Generación de una onda solitaria. (*a*) Flujo no permanente; (*b*) flujo que aparece como permanente para un observador que sigue la cresta de la onda.

Considere una onda solitaria que viaja hacia la derecha en un canal rectangular, con celeridad c (figura 18-7*a*). Un observador que en la orilla corre con la cresta de la onda con una velocidad igual a su celeridad notará una imagen de flujo permanente (figura 18-7*b*) en la cual la onda parece permanecer quieta en tanto que el flujo se mueve con una velocidad igual a c en magnitud. Al ignorar la fricción y al suponer una pendiente pequeña y $\alpha = 1$ para todas las secciones, la ecuación de energía entre la sección normal del flujo y la sección en la cresta de la onda puede escribirse como

$$y + \frac{c^2}{2g} = y + h + \frac{c^2}{2g}\left(\frac{y}{y+h}\right)^2 \qquad (18\text{-}43)$$

Al resolver para c,

$$c = \sqrt{\frac{2g(y+h)^2}{2y+h}} \qquad (18\text{-}44)$$

donde h es la altura de la onda por encima de la superficie normal del agua. Para ondas de altura moderada, la ecuación (18-44) puede aproximarse mediante

$$c = \sqrt{gy\left(1 + \frac{3h}{2y}\right)} \approx \sqrt{gy}\left(1 + \frac{3h}{4y}\right) \qquad (18\text{-}45)$$

Ésta se conoce comúnmente como *ecuación de celeridad de Saint-Venant* en honor de su descubridor [44]. Para ondas de pequeña altura, h es insignificante. Luego,

$$c = \sqrt{gy} \qquad (18\text{-}46)$$

Esta es la ecuación para la propagación de ondas pequeñas en canales rectangulares. Comúnmente se conoce como *ecuación de celeridad de Lagrange* en honor de Lagrange [45], quien fue el primero en deducirla.

Del mismo modo puede demostrarse que la celeridad de ondas pequeñas en canales no rectangulares es

$$c = \sqrt{gD} \tag{18-47}$$

donde D es la profundidad hidráulica, que es igual a A/T.

En el análisis anterior no se consideran el efecto de la fuerza centrífuga sobre la curvatura de la onda ni la componente vertical de la aceleración de las partículas de agua. De acuerdo con observaciones de campo hechas por Russell [41] y con experimentos hechos por Bazin [46], una ecuación mejor para la celeridad de una onda solitaria en un canal rectangular es

$$c = \sqrt{g(y + h)} \tag{18-48}$$

De acuerdo con un análisis completo descrito por Lamb [3, pp. 423-426], una ecuación más exacta para las ondas gravitacionales en general, pero aun suponiendo pequeñas alturas, es

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi y}{\lambda}} \tag{18-49}$$

donde λ es la longitud de onda de cresta a cresta. Porlo general ésta se conoce como *ecuación de celeridad de Airy* en honor de su descubridor [47]. En aguas profundas, donde y es muy grande comparado con λ, la anterior ecuación se convierte en $c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. Para pequeñas alturas de onda, λ es muy grande comparado con h y $\tanh(2\pi y/\lambda)$ puede remplazarse por $2\pi y/\lambda$. Luego la ecuación (18-49) se convierte en la (18-46).

La ecuación para la celeridad, ecuación (18-46) o (18-47), puede utilizarse para estudiar la propagación de ondas gravitacionales. Si se deja caer un canto rodado en agua quieta, el patrón de onda puede representarse mediante círculos concéntricos como los que se muestran en la figura 18-8*a*. Las ondas viajan hacia afuera de la fuente de perturbación en todas las direcciones con una velocidad o celeridad igual a c.

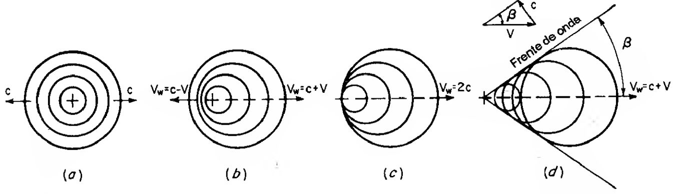


Figura 18-8. Patrones de onda creados por perturbaciones. (*a*) Agua quieta, $V = 0$; (*b*) flujo subcrítico, $V < c$; (*c*) flujo crítico, $V = c$; (*d*) flujo supercrítico, $V > c$.

Si el agua fluye, el patrón de ondas introducido por una perturbación se desplazará en la dirección de flujo. Cuando la velocidad V del agua es menor que la celeridad, el patrón se muestra en la figura 18-8*b*. Como la velocidad de flujo es menor que la celeridad, es posible que el frente de onda viaje hacia aguas arriba con una velocidad igual a

$$V_w = c - V \tag{18-50}$$

La onda que viaja hacia aguas abajo se encuentra en la dirección del flujo. Su velocidad se incrementa a

$$V_w = c + V \tag{18-51}$$

Nótese que la celeridad representada mediante la ecuación (18-47) es idéntica a la velocidad crítica del flujo [ecuación (1-10)]. Por consiguiente, el flujo en consideración es subcrítico.

Cuando la velocidad del agua es igual a la celeridad, los frentes de ondas en la dirección hacia aguas arriba son estacionarios o $V_w = 0$, y aquellos en la dirección hacia aguas abajo tienen una velocidad igual a $V_w = 2c$. Este patrón de ondas se muestra en la figura 18-8*c*. Obviamente el flujo es crítico.

Cuando la velocidad del agua es mayor que la celeridad, las ondas sólo viajarán hacia aguas abajo. Este patrón se muestra en la figura 18-8*d*. Obviamente el flujo es supercrítico. Las líneas tangentes a los frentes de onda se localizan en un ángulo con respecto a la dirección original del flujo. β es el ángulo de onda y su magnitud la determina la ecuación (16-15), o

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{V} = \frac{\sqrt{gD}}{V} = \frac{1}{\mathbf{F}} \tag{18-52}$$

donde **F** es el número de Froude.

La celeridad c debe distinguirse con claridad de la velocidad absoluta de la onda V_w. La celeridad es la velocidad de una onda relativa a la velocidad del flujo. Cuando la onda se propaga a través de agua quieta, la celeridad es idéntica a la velocidad absoluta y en canales abiertos, ésta es la velocidad de la onda relativa a una cierta sección fija del canal. Matemáticamente puede escribirse una ecuación general que expresa la velocidad absoluta de la onda como la suma vectorial de la celeridad y de la velocidad V no perturbada del agua a través de la cual la onda se propaga; es decir

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{V} + \mathbf{c} \tag{18-53}$$

Como regla general, estos vectores son paralelos al eje del canal; luego la ecuación (18-53) puede reducirse a una suma algebraica simple

$$V_w = V \pm c \tag{18-54}$$

donde las velocidades se consideran positivas en la dirección hacia aguas abajo y negativas en el sentido contrario. El flujo inicial de agua en el canal se supone que ocurre en la dirección hacia aguas abajo.

En el análisis de la dirección de progresión de ondas en canales pueden reconocerse tres casos principales: 1) *flujo progresivamente positivo* si la perturbación progresa hacia aguas abajo, 2) *flujo negativamente progresivo* si la perturbación progresa hacia aguas arriba, y 3) *flujo progresivo mixto* si la perturbación o perturbaciones se mueven tanto hacia aguas arriba como hacia aguas abajo y se encuentran y se combinan.

18-7. Solución de las ecuaciones de flujo no permanente. Debido a la complejidad de las condiciones de flujo, las ecuaciones generales de flujo no permanente no tienen una solución matemática exacta. Para propósitos demostrativos, se analizarán brevemente dos métodos aproximados sugeridos por Thomas [15]: el *método de incrementos finitos* (conocido como *método completo*, desarrollado por Thomas) y el *método de ensayo y error*.

Mediante el método de los incrementos finitos, un canal rectangular se divide en tramos de longitud finita Δx. El intervalo de tiempo en consideración es Δt. Para un tramo determinado, los diferentes elementos se designan en la figura 18-9. La siguiente notación se utiliza para adaptar las ecuaciones de flujo no permanente al uso de incrementos finitos:

$$A = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = \frac{\Sigma A}{4}$$
$$T = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{\Sigma T}{4}$$
$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{4} = \frac{\Sigma R}{4}$$
$$V = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} = \frac{\Sigma V}{4}$$

Al expresar los diferenciales parciales mediante incrementos finitos,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_3 - y_1}{\Delta x} + \frac{y_4 - y_2}{\Delta x}\right) = -\frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2\,\Delta x}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_3 - V_1}{\Delta x} + \frac{V_4 - V_2}{\Delta x}\right) = -\frac{V_1 + V_2 - V_3 - V_4}{2\,\Delta x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (AV)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3V_3 - A_1V_1}{\Delta x} + \frac{A_4V_4 - A_2V_2}{\Delta x}\right)$$
$$= -\frac{A_1V_1 + A_2V_2 - A_3V_3 - A_4V_4}{2\,\Delta x}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - y_1}{\Delta t} + \frac{y_4 - y_3}{\Delta t}\right) = -\frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{2\,\Delta t}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_2 - V_1}{\Delta t} + \frac{V_4 - V_3}{\Delta t}\right) = -\frac{V_1 - V_2 + V_3 - V_4}{2\,\Delta t}$$

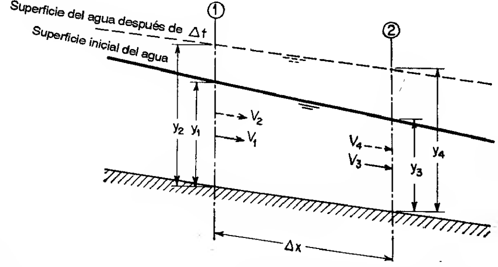


Figura 18-9. Esquema de definición para el método de los incrementos finitos. El subíndice 1 corresponde a la sección de aguas arriba en el estado inicial; el 2 es para la sección de aguas arriba después de Δt; el 3 corresponde a la sección de aguas abajo en el estado inicial; y el 4 es para la sección de aguas abajo después de Δt.

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (18-1) y al resolver para V_4,

$$V_4 = \frac{\Delta x\, \Sigma T(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4\,\Delta t + A_1V_1 + A_2V_2 - A_3V_3}{A_4} \tag{18-55}$$

Al sustituir $S_f = V^2/C^2R$ y las expresiones anteriores en la ecuación (18-13) y al simplificar,

$$S_0 = \frac{(\Sigma V)^2}{4C^2\,\Sigma R} - \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2\,\Delta x} - \frac{\alpha \Sigma V(V_1 + V_2 - V_3 - V_4)}{8g\,\Delta x} - \frac{V_1 - V_2 + V_3 - V_4}{2g\,\Delta t} \tag{18-56}$$

En un problema determinado se conocen las cantidades $y_1, A_1, V_1, y_2, A_2, V_2, y_3, A_3$ y V_3 utilizando las condiciones iniciales y los cálculos en tramos anteriores. Las cantidades desconocidas y_4 y V_4 pueden obtenerse resolviendo simultáneamente las ecuaciones (18-55) y (18-56). Al repetir el cálculo para los tramos subsecuentes, pueden determinarse el perfil completo y la variación de la velocidad de flujo. Sin embargo, es claro que la solución por el método de los incrementos finitos es muy dispendiosa.

En el método de ensayo y error, primero se esquematiza de manera arbitraria el perfil de onda a través del tramo dado y luego se revisa si el perfil esquematizado satisface o no todas las condiciones necesarias. El procedimiento para el cálculo de un flujo positivamente progresivo es como sigue:

1. Para un determinado tramo dibuje el perfil de onda en el instante inicial y esquematícelo en el instante final extendiéndolo desde el tramo de aguas arriba. En la figura 18-9 se muestra el perfil extendido mediante la línea punteada.

2. Mida las profundidades y_1, y_2, y_3 y y_4 y las pendientes superficiales S_1, S_2, S_3 y S_4 en las secciones e instantes en consideración.

3. Calcule las áreas mojadas A_1, A_2, A_3 y A_4, los radios hidráulicos R_1, R_2, R_3, y R_4, las velocidades V_1, V_2, V_3, y V_4 y los caudales Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4.

4. Sustituya las cantidades anteriores en la ecuación de continuidad. Por incrementos finitos, la ecuación (18-2) da

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4)\,\Delta t = (-A_1 + A_2 - A_3 + A_4)\,\Delta x \qquad (18\text{-}57)$$

Si los valores dados no satisfacen esta ecuación, revise el perfil esquematizado y repita el trabajo hasta que se obtenga una verificación satisfactoria en la misma.

5. Continúe el procedimiento de un tramo a otro, procediendo hacia aguas abajo.

Nótese que el procedimiento anterior no incluye los términos de altura de velocidad y de altura de aceleración, que si se incluyeran, el procedimiento se volvería tan tedioso que sería casi inaplicable para propósitos prácticos.

Uno de los problemas más importantes en el flujo no permanente gradualmente variado es el tránsito de una onda de creciente a través de un canal. Se han desarrollado muchas soluciones prácticas a este problema. Debido a su naturaleza única, el problema con sus soluciones prácticas se estudiarán por separado en el capítulo 20.

18-8. Flujo superficial no permanente espacialmente variado. La ecuación diferencial general para el flujo no permanente espacialmente variado puede obtenerse introduciendo un término para el efecto de aceleración en la ecuación para flujo permanente espacialmente variado. De acuerdo con la sección 18-2, el término es $(1/g)\,(\partial V/\partial t)\,dx$. Al incluir este término en la ecuación (12-2) y al utilizar diferenciales parciales,

$$\partial y = -\frac{1}{g}\left(V\,\partial V + \frac{V}{A}\,\partial Q\right) + (S_0 - S_f)\,\partial x - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\,\partial x \qquad (18\text{-}58)$$

o

$$S_0 - S_f = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{g}\left(V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{A}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) \qquad (18\text{-}59)$$

Ésta es la ecuación requerida. Sin embargo su solución es extremadamente difícil aun mediante aproximaciones de incrementos finitos.

Un importante problema práctico relacionado con el flujo superficial no permanente espacialmente variado es la determinación de la escorrentía no permanente del flujo superficial que resulta de un evento de lluvia[9]. El caudal de la escorrentía cambia con el tiempo desde que la lluvia empieza; por consiguiente, el flujo es no permanente. Si la tasa de lluvia se mantiene constante, eventualmente se alcanzará un tiempo de equilibrio en el cual el caudal es igual a la tasa de lluvia y la escorrentía se vuelve permanente. Cuando la lluvia cesa, la escorrentía baja y en consecuencia el caudal disminuye. En el periodo de recesión la escorrentía de nuevo se vuelve no permanente. Para propósitos prácticos se han desarrollado dos métodos empíricos. Uno para flujo turbulento y otro para flujo laminar. Las relaciones

[9] Para estudios avanzados sobre este problema, *véanse* los trabajos de Iwagaki [48-51].

empíricas utilizadas en ellos se obtuvieron en experiencias que cubrieron un amplio rango de variación de las condiciones. Por consiguiente, éstos sólo dan una respuesta aproximada al problema.

A. Flujo laminar. La variación del caudal de escorrentía con respecto al tiempo a menudo se representa mediante un *hidrograma*, el cual es una curva que se obtiene al graficar el caudal contra el tiempo[10]. A partir del análisis de los hidrogramas resultantes de una lluvia simulada con tasa constante, Izzard [52] encontró que la forma del hidrograma creciente puede representarse mediante una curva adimensional única, como la que se muestra en la figura 18-10. La notación correspondiente es:

q = caudal de flujo superficial en pies³/s por pie de ancho, en el tiempo t desde el inicio de la lluvia.

q_e = caudal de flujo superficial en pies³/s por pie de ancho en el equilibrio.

En la condición de equilibrio, la tasa de suministro de la lluvia es igual al caudal de salida. Si i es la intensidad de lluvia en pulg/hr y L es la longitud en pies del flujo superficial, entonces

$$q_e = \frac{iL}{43{,}200} \qquad (18\text{-}60)$$

Nótese que la condición de equilibrio se alcanza asintóticamente.

t = tiempo en minutos desde el inicio de la lluvia

t_e = tiempo de equilibrio en minutos

Debido a que la condición de equilibrio se alcanza asintóticamente, el tiempo t_e debe determinarse de manera arbitraria. En la figura 18-10, t_e se define como el tiempo cuando q alcanza $0.97q_e$; es decir, $q/q_e = 0.97$. Empíricamente se ha encontrado que el volumen de agua, representado por D_e en pies³, en el flujo superficial sobre una banda de ancho unitario en el equilibrio (el área por encima de la curva) es igual al volumen de agua descargado en el tiempo requerido para alcanzar el equilibrio (el área por debajo de la curva). Por consiguiente, el tiempo de equilibrio t_e se expresa mediante

$$t_e = \frac{2D_e}{60q_e} \qquad (18\text{-}61)$$

D = detención en pies³, es decir, el volumen de agua en el flujo superficial sobre una banda de ancho unitario en el tiempo t desde el inicio de la lluvia.

D_e = detención en pies³ en el equilibrio.

Empíricamente, ésta puede expresarse mediante

$$D_e = KLq_e^{1/3} \qquad (18\text{-}62)$$

[10] Un hidrograma también puede ser una curva de nivel o de velocidad de flujo graficada contra el tiempo (sección 20-2).

El exponente varía de alrededor de 0.2 para pavimentos muy lisos hasta 0.4 para césped. El valor de K depende de la intensidad de la lluvia i, de la pendiente de la superficie S y del factor de rugosidad c; es decir,

$$K = \frac{0.0007i + c}{S^{1/3}} \tag{18-63}$$

Esta ecuación se desarrolló para pendientes no superiores a 0.04 aproximadamente. El coeficiente de rugosidad c se evaluó como sigue:

Tipo de superficie	*Valor de c*
Pavimento de aslfalto muy liso	0.0070
Pavimento de brea y arena	0.0075
Papel para tejados prensado de pizarra	0.0082
Pavimento de concreto, condición normal . . .	0.0120
Pavimento de brea y gravas	0.0170
Césped muy corto	0.0460
Pasto azul denso	0.0600

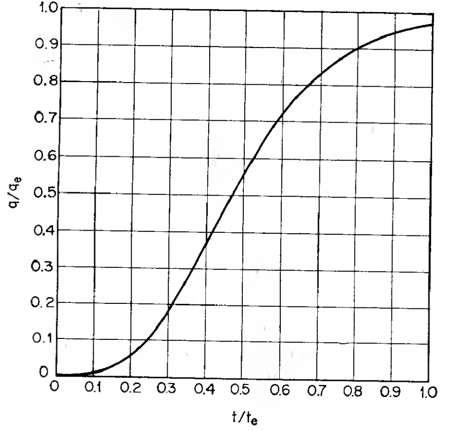


Figura 18-10. Hidrograma adimensional para flujo superficial (*según C. F. Izzard* [52]).

Cuando la lluvia cesa, la escorrentía disminuye. El tiempo t_r desde el inicio del hidrograma de recesión hasta el punto donde $q/q_e = r$ es

$$t_r = \frac{D_0 F(r)}{60 q_e} \tag{18-64}$$

donde D_0 es la detención correspondiente a D_e después del final de la lluvia, el cual corresponde a la detención cuando $i = 0$; y donde

$$F(r) = 0.5(r^{-2/3} - 1) \tag{18-65}$$

La ecuación (18-64) se deduce matemáticamente del hecho de que la detención en la curva de recesión es proporcional a la potencia un tercio del caudal, es decir,

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{q}{q_e}\right)^{1/3} = r^{1/3}$$

Mediante el hidrograma adimensional y las ecuaciones anteriores, es posible construir un hidrograma para la escorrentía superficial debida a una lluvia de intensidad y duración determinadas. Se entiende que los experimentos hechos para deducir el hidrograma adimensional y las anteriores ecuaciones empíricas se realizaron en condiciones de flujo laminar en todo momento. Por consiguiente el método es más apto para flujo laminar y, según Izzard, debe limitarse a casos donde el producto de la intensidad de lluvia en pulgadas por hora y la longitud de la superficie de flujo en pies sea menor que 500.

B. Flujo turbulento. Con referencia al tipo de flujo que varía desde completamente turbulento a laminar, Horton [53] desarrolló la siguiente ecuación para el caudal de un flujo superficial no permanente espacialmente variado debido a una tasa uniforme de exceso de lluvia o tasa de suministro:

$$q = \sigma \tanh^m \left[\frac{m+1}{m} (\sigma K)^{1/m} \frac{t}{60}\right] \tag{18-66}$$

donde q = caudal en el extremo más bajo de una banda elemental, en pies³/s/acre o pulg/hr.

σ = tasa de exceso de lluvia o de suministro, en pulg/hr. El exceso de lluvia es la cantidad neta de lluvia que se convierte en escorrentía directa, debido a que una parte de la lluvia total se pierde por evaporación, infiltración, etc.

m = un exponente dependiente del estado de flujo; $m = 3.00$ para flujo laminar y 5/3 para flujo completamente turbulento.

t = tiempo en minutos desde el inicio del suministro.

K = una constante dependiente de las características de la superficie de drenaje; se expresa mediante

$$K = \frac{1{,}020\sqrt{S}}{IcL} \tag{18-67}$$

donde S es la pendiente superficial en la dirección del flujo; I es el factor de turbulencia, es decir, $0.75(3.0 - m)$; c es el factor de rugosidad; y L es la longitud en pies de la banda elemental sobre césped, superficie descubierta o superficie pavimentada.

Según Horton, la ecuación (18-66) es estrictamente racional para el 75% de flujo turbulento, o $m = 2.00$. La ecuación se ha utilizado en el diseño de drenajes de

aeropuertos [54]. Para superficies promedio de aeropuertos, el 75% de turbulencia puede suponerse y la ecuación de Horton puede escribirse como

$$q = \sigma \tanh^2 \left[0.922t \left(\frac{\sigma}{cL} \right)^{0.50} S^{0.25} \right] \qquad (18\text{-}68)$$

En conexión con el uso de esta ecuación, se recomiendan los siguientes valores de c:

Tipo de superficie	*Valor de c*
Pavimento liso	0.02
Suelo firme, descubierto, sin piedras	0.10
Cubierta pobre en pastos o superficie descubierta moderadamente rugosa	0.20
Cubierta promedio en pastos	0.40
Cubierta densa en pastos	0.80

La ecuación de Horton es más aplicable a flujo turbulento con caudales altos. El uso de esta ecuación producirá un hidrograma para el flujo superficial debido a una tasa uniforme de lluvia con duración indefinida. Sin embargo, el hidrograma para una lluvia de duración finita t puede deducirse con facilidad. En la figura 18-11 la parte superior muestra el hidrograma para una lluvia de duración infinita, la figura intermedia muestra un hidrograma desplazado para el cual la misma lluvia empieza un tiempo t más tarde. La diferencia entre ambos eventualmente producirá la figura inferior, que es el hidrograma para una lluvia de duración t.

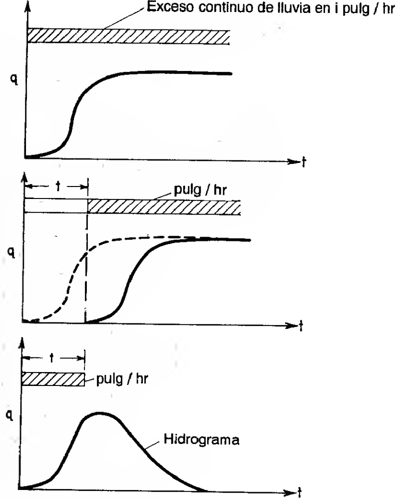


Figura 18-11. Deducción del hidrograma para una lluvia de duración finita.

Ejemplo 18-4. Un pavimento de carretera en asfalto liso tiene 72 pies de largo y una pendiente de 0.005. Determine el hidrograma en el extremo de aguas abajo del pavimento cuando se aplica una lluvia de 1.89 pulg/hr durante 10 min.

Solución. Los datos dados son L = 72 pies, S = 0.005, i = 1.89 pulg/hr y el tiempo total t = 10 min. Como 1.89 × 72 < 500, se aplica el método de Izzard. Para pavimentos de asfalto liso, c = 0.007.

Mediante las ecuaciones del método de Izzard, las constantes se calculan como q_e = 0.00315, K = 0.0487, D_e = 0.515 y t_e = 5.45. El cálculo de la curva de aumento del hidrograma se muestra en la tabla 18-1 y en la figura 18-12. El valor de q/q_e para el valor correspondiente de t/t_e se obtiene del hidrograma adimensional (figura 18-10). En $t = t_e$ = 5.45 min, el caudal $q = 0.97q_e$ = 0.0031 pies³/s por unidad de ancho del pavimento. Por consiguiente, se supone que el caudal alcanza su valor máximo de q_e en t = 10 min.

Tabla 18-1. Cálculo del hidrograma para un flujo superficial

t	t/t_e	$q/q_e = r$	$F(r)$	t_r	q
1.00	0.183	0.05	....	....	0.0002
2.00	0.367	0.30	....	....	0.0010
2.50	0.458	0.48	....	....	0.0015
3.00	0.550	0.65	....	....	0.0021
4.00	0.733	0.85	....	....	0.0027
5.00	0.917	0.94	....	....	0.0030
5.45	1.000	0.97	....	....	0.0031
6.00	.....	1.00	....	....	0.0032
7.00	.....	1.00	....	....	0.0032
8.00	.....	1.00	....	....	0.0032
9.00	.....	1.00	....	....	0.0032
10.00	.....	1.00	....	....	0.0032
10.43	.....	1.00	....	....	0.0032
10.91	.....	0.60	0.21	0.48	0.0019
11.40	.....	0.40	0.42	0.97	0.0013
11.86	.....	0.30	0.62	1.43	0.0009
12.64	.....	0.20	0.96	2.21	0.0006
14.57	.....	0.10	1.80	4.14	0.0003

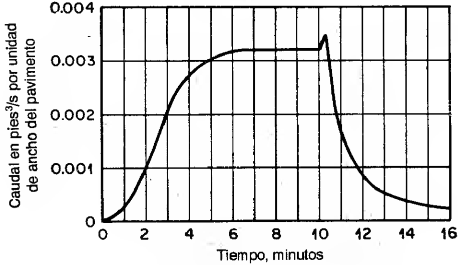


Figura 18-12. Hidrograma para un flujo superficial.

Cuando la lluvia cesa en 10 min, se notará que existe un incremento momentáneo en el caudal, después del cual la curva cae rápidamente. Este incremento se debe al hecho de que durante la lluvia la cantidad de detención en el pavimento es mayor que la requerida para causar el mismo caudal después de que la lluvia ha cesado. Para $i = 0$ la ecuación (18-63) da $K = 0.041$ y la (18-62) da $D_0 = 0.434$ pies³. Por consiguiente, el exceso de detención es $0.515 - 0.434 = 0.081$ pies³, que descarga a una tasa igual o mayor que $q_e = 0.00315$ pies³/s. La longitud del tiempo requerido para descargar el exceso es, por consiguiente, 0.081/0.00315 = 26 seg o 0.43 min. De acuerdo con esto, el punto de inicio de la curva de recesión real es 10 + 0.43 = 10.43 min; en este momento $q = 0.00316$ pies³/s y la detención es 0.434 pies³. El tiempo de recesión del hidrograma (figura 18-12) puede calcularse fácilmente utilizando la ecuación (18-64).

PROBLEMAS

18-1. Suponga que la condición de flujo no cambia con el tiempo y deduzca mediante las ecuaciones (18-1) y (18-13) las ecuaciones de continuidad y dinámica para flujo permanente gradualmente variado en canales prismáticos.

18-2. Demuestre que el rebase de una onda creciente monoclinal puede expresarse como

$$Q_o = \frac{A_2Q_1 - A_1Q_2}{A_1 - A_2} \tag{18-69}$$

18-3. Demuestre que el rebase y la velocidad de una onda creciente monoclinal en un canal rectangular ancho que tiene una anchura unitaria pueden expresarse, respectivamente, como

$$Q_o = \frac{y_1y_2C\sqrt{S_0}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \tag{18-70}$$

y

$$V_w = \frac{1 - (y_1/y_2)^{3/2}}{1 - y_1/y_2} V_2 \tag{18-71}$$

donde C es el factor de resistencia de Chézy.

18-4. En el tramo de la milla 333 del río Missouri aguas abajo de Kansas City, Seddon encontró que la curva de calibración y la velocidad promedio en millas por día puede expresarse como $Q_o = 0.15(1.17y + 19)^4$ y $V_w = 70 + 3.27y$, respectivamente. Demuestre que el ancho superficial promedio del canal en este tramo puede expresarse como $T = 5.62(y + 16.3)^3/(y + 21.4)$, y construya la forma promedio de la sección del canal.

18-5. Con base en la ecuación de Manning, determine la relación entre la máxima velocidad de onda y la velocidad del agua en una onda creciente monoclinal en: *a*) un canal rectangular ancho, *b*) un canal triangular, y *c*) un canal parabólico ancho.

18-6. Resuelva el problema anterior a partir de la ecuación de Chézy.

18-7. Mediante la ecuación de Manning, deduzca una expresión para el perfil de onda de la creciente debida a la falla de una presa.

18-8. Dados $S_0 = 0.0004$ y $y_n = 25$ pies, grafique el perfil de la onda de remolino deducida del ejemplo 18-1.

18-9. Resuelva el problema anterior utilizando el resultado del problema 18-7 para el perfil de onda y compare este resultado con el obtenido antes.

18-10. Grafique el perfil de onda deducido en el ejemplo 18-2 cuando $y_1 = 10$ pies, $y_2 = 25$ pies y $S_0 = 0.0004$.

18-11. Resuelva el ejemplo 18-3 para $y_2 = 0$, 2, 5 y 15 pies, respectivamente, y demuestre que la pendiente superficial de la configuración de onda disminuye junto con el nivel inicial y_2.

18-12. Resuelva el ejemplo 18-3 si $S_0 = 0.004$.

18-13. Resuelva el ejemplo 18-3 si $S_0 = 0.06$.

18-14. Las profundidades inicial y final de una onda de creciente monoclinal son 10 pies y 25 pies, respectivamente. Si $C = 100$ y $S_0 = 0.0004$, determine el porcentaje del incremento en el caudal real sobre el caudal normal para las profundidades de 15 y 20 pies.

18-15. Calcule el número de Reynolds para el caudal pico sobre el pavimento descrito en el ejemplo 18-4 y demuestre que el flujo es laminar. El caudal inmediatamente después de cesar la lluvia se supone que se incrementa momentáneamente alrededor del 10%.

18-16. Resuelva el ejemplo 18-4 si la lluvia es 3.78 pulg/hr.

18-17. Resuelva el ejemplo 18-4 si la lluvia es 1.89 pulg/hr para los primeros 2 mín y luego se incrementa a 3.78 pulg/hr para los 8 mín restantes. Para resolver este problema, es necesario convertir los primeros 2 mín a un tiempo, por ejemplo t_0, de manera que la lluvia de 3.78 pulg/hr que dura t_0 mín acumule el mismo volumen de detención absoluto que el que se consigue en 2 min a 1.89 pulg/hr. El cálculo del hidrograma después de 2 mín se relaciona simplemente con una intensidad de lluvia constante de 3.78 pulg/hr que dura t_0 + 8 min.

18-18. En un aeropuerto una franja de área en césped tiene 510 pies de longitud y una pendiente de 0.9%. Construya el hidrograma del flujo superficial sobre el área debido a un exceso de lluvia de 4.36 pulg/hr durante 10 min. Para el área en césped suponga que $c = 0.32$ en la ecuación de Horton.

REFERENCIAS

1. J. J. Stoker, "Water Waves", Vol. IV de *Pure and Applied Mathematics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
2. G. H. Keulegan, "Wave motion", capítulo XI de *Engineering Hydraulics*, editado por Hunter Rouse, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 711-768.
3. Sir Horace Lamb, *Hydrodynamics*, 6ª ed., Dover Publications, New York, 1932. For tidal waves, see chap. VIII, pp. 250-362; for surface waves, see chap. IX, pp. 363-475.
4. U. S. Army Corps of Engineers, "Bibliography on tidal hydraulics", *Committee on Tidal Hydraulics*, reporte Nº 2, febrero de 1954; suplemento Nº 1, junio de 1955; suplemento Nº 2, mayo de 1957 y suplemento Nº 3, mayo de 1959.
5. Philipp Forchheimer, *Hydraulik* (*Hydraulics*), 3ª ed., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig y Berlin, 1930.
6. Charles Jaeger, *Engineering Fluid Mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956.
7. Takeo Kinosita, "Hydrodynamical study on the flood flow", en "Floods", Vol. III de *Symposia Darcy*, publicación Nº 42, *International Association of Scientific Hydrology*, 1956, pp. 56-63.
8. N. J. Dahl, "On non-permanent flow in open canals", *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association for Hydraulic Research, The Hague 1955*, Vol. 4, 1955, pp. D19-1 a D19-16.
9. François Serre, "Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux" ("Contribution to the study of permanent and nonpermanent flows in channels"), *La Houille blanche*, año 8, Nº 3, Grenoble, junio-julio de 1953, pp. 374-388 y Nº 6, diciembre de 1953, pp. 830-872.
10. J. C. Schönfeld, "Distortion of long waves. Equilibrium and stability", *Assemblée générale de Bruxelles*, 1951, *International Association of Scientific Hydrology*, publicación Nº 35, Vol. 4, 1951, pp. 140-157.
11. Bruce R. Gilcrest, "Flood routing", capítulo X en *Engineering Hydraulics*, editado por Hunter Rouse, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 635-710.
12. Giulio Supino, "Sur l'amortissement des intumescences dans les canaux" ("On the damping of translatory waves in channels"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 16, Nº 57, Paris, 1950, pp. 144-147.

13. D. N. Dietz, "A new method for calculating the conduct of translation waves in prismatic canals", *Physica*, Vol. 8, Nº 2, febrero de 1941, pp. 177-195.
14. Giulio Supino, "Sur la propagation des ondes dans les canaux" ("On the propagation of waves in channels"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 5, Nº 29, Paris, 1939, pp. 260-262.
15. Harold A. Thomas, "The hydraulics of flood movements in rivers", *Carnegie Institute of Technology, Engineering Bulletin*, 1934; reimpreso en 1936 y 1937.
16. L. Cagniard, "Hydrodynamique fluviale: Régimes variables" ("Fluvial hydrodynamics: Variable regimes"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 3, Nº 15, Paris, mayo-junio de 1937, pp. 128-136.
17. René Massé, "Des intumescences dans les torrents" ("Translatory waves in torrents"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 3, Nº 18, Paris, 1937, pp. 305-306.
18. Ph. Deymié, "Propagation d'une intumescence allongée" ("Propagation of a gradually varied translatory wave"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vols. 1-2, Nº 3, Paris, 1935-1936, pp. 138-142.
19. Pierre Massé, "L'amortissement des intumescences" ("The damping of translatory waves"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vols. 1-2, Nº 6, Paris, 1935-1936, pp. 300-308.
20. Josef Frank, *Nichtstationäre Vorgänge in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftwerken* (*Unsteady Flow in Headraces and Tailraces of Hydropower Plants*), Springer-Verlag, Berlin, 1957.
21. A. J. C. Barré de Saint-Venant, *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes* (*Theoretical and Practical Studies of Stream Flow*), Paris, 1848.
22. A. J. C. Barré de Saint-Venant, "Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits" ("Theory of the nonpermanent movement of waters with application to the floods of rivers and to the introduction of the tides within their beds"), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 73, 1871, pp. 147-154 y 237-240.
23. H. Reineke, "Die Berechnung der Tidewelle im Tideflusse" ("Computation of tidal wave in a tidal river"), *Besondere Mitteilungen, Jahrbuch für die Gewässerkunde Norddeutschlands*, Vol. 3, Nº 4, Berlin, 1921.
24. J. Frank y J. Schüller, *Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftanlagen* (*Oscillations in Headraces and Tailraces of Hydropower Plants*), Springer-Verlag, Berlin, 1938.
25. H. Favre, *Étude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts* (*Theoretical and Experimental Study of Translatory Waves in Open Channels*), Dunod, Paris, 1935.
26. Carlo Drioli, "Esperienze sul moto perturbato nei canali industriali" ("Experiment on surges in industrial canals"), *L'Energia elettrica*, Vol. 14, Nº 4, Milano, abril de 1937, pp. 285-305, y apéndice, pp. 306-311.
27. M. Kleitz, "Note sur la théorie du mouvement non permanent des liquides et sur application à la propagation des crues des rivières" ("Note on the theory of unsteady flow of liquids and on application to flood propagation in rivers"), *Annales des ponts et chaussées*, Ser. 5, Vol. 16, 2º semestre, 1877, pp. 133-196.
28. James A. Seddon, "River hydraulics", *Transactions*, Vol. 43, *American Society of Civil Engineers*, 1900, pp. 179-229.
29. J. H. Wilkinson, "Translatory waves in natural channels", *Transactions*, Vol. 110, *American Society of Civil Engineers*, 1945, pp. 1203-1225.
30. Benjamin E. Jones, "A method for correcting river discharge for a changing stage", *U. S. Geological Survey, Water Supply Paper 375* (e), 1916, pp. 117-130.
31. A. Ritter, "Die Fortpflanzung der Wasserwellen" ("Propagation of waves"), *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol. 36, Nº 33, agosto 13 de 1892, pp. 947-954.
32. R. Ré, "Étude du lâcher instantané d'une retenue d'eau dans un canal par la méthode graphique" ("Study of the instantaneous release of water in a reservoir to a canal by the graphical method"), *La Houille blanche*, año 1, Nº 3, Grenoble, mayo de 1946, pp. 181-187.

33. A. Craya, "Calcul graphique des régimes variables dans les canaux" ("Graphical calculation of variable flow regimes in open channels"), *La Houille blanche*, año 1, Nº 1, Grenoble, noviembre de 1945, pp. 19-38, Nº 2, marzo de 1946, pp. 117-130.
34. Léon Lévin, "Mouvement non permanent sur les cours d'eau à la suite de rupture de barrage" ("Unsteady flow in channels following the rupture of dam"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 18, Nº 72, Paris, noviembre-diciembre de 1952, pp. 297-315.
35. Robert F. Dressler, "Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions", artículo 2356, *Journal of Research*, Vol. 49, Nº 3, *U. S. National Bureau of Standards*, septiembre de 1952, pp. 217-225.
36. Robert F. Dressler, "Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave", *Assemblée générale de Rome*, 1954, *International Association of Scientific Hydrology*, publicación Nº 38, Vol. 3, 1954, pp. 319-328.
37. A. Schoklitsch, "Über Dambruchwellen" ("On waves produced by broken dams"), *Stitzungsberichte, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Akademie der Wissenschaften in Wien*, Vol. 126, parte IIa, Vienna, 1917, pp. 1489-1514.
38. I. B. Eguiazaroff, "Regulation of the water level in the reaches of canalized rivers and regulation of the flow below the last lock dam according to whether the water power is or is not used", reporte Nº 8, en "Inland Navigation", 2ª question, Sec. 1, *16th. International Congress of Navigation*, Brussels, 1935.
39. Frederick V. Pohle, "Motion of wave due to breaking of a dam and related problems", artículo Nº 8 en "Symposium on gravity waves", *U. S. National Bureau of Standards, Circular 521*, 1952, pp. 47-53.
40. Elmer E. Moots, "A study in flood waves", *Studies in Engineering, Bulletin 14*, University of Iowa, 1938.
41. J. Scott-Russell, "Report on waves", *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1844, pp. 311-390.
42. J. V. Boussinesq, "Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts" ("On the steady varied flow of water in conduits and open channels"), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 73, 1871, pp. 101-105.
43. Lord Rayleigh, "On waves", *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Ser. 5, Vol. 1, abril de 1876, pp. 257-279.
44. A. J. C. Barré de Saint-Venant, "Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique; et remarques sur les propagations du son et de la lumière, sur les ressauts, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents" ("Elementary demonstration of the propagation formula for a wave or a translatory wave in a prismatic channel; and remarks on the propagation of sound and light, on hydraulic jumps, and also on the distinction between rivers and torrents"), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 71, julio 18 de 1870, pp. 186-195.
45. Joseph L. de Lagrange, *Mécanique analytique* (*Analytical Mechanics*), parte 2, Sec. II, Art. 2, Paris, 1788, p. 192.
46. H. Bazin, "Expériences sur la propagation des ondes le long d'un cours d'eau torrentueux, et confirmation par ces expériences des formules données par M. Boussinesq, dans sa théorie du mouvement graduellement varié des fluides" ("Experiments on wave propagation in torrential flow and their confirmation of the Boussinesq equations for gradually varied flow"), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 100, junio 15 de 1885, pp. 1492-1494.
47. Sir George Biddle Airy, "Tides and waves", *Encyclopaedia Metropolitana*, London, 1845, pp. 241-396.
48. Yuichi Iwagaki, "Theory of flow on road surface", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Vol. 13, Nº 3, Japan, julio de 1951, pp. 139-147.
49. Y. Iwagaki y T. Sueishi, "Approximate method for calculation of unsteady flow in open channels with lateral flow", *Proceedings, 4th. Japan National Congress for Applied Mechanics*, marzo de 1954, pp. 235-240.

50. Yuichi Iwagaki y Tomitaro Sueishi, "On the unsteady flow in open channels with uniform lateral inflow" (en japonés), *Proceedings*, Vol. 39, Nº 11, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, noviembre de 1954, pp. 575-583.
51. Yuichi Iwagaki y Takuma Takasao, "On the effects of rainfall and drainage basin characteristics on runoff relation" (en japonés), *Proceedings, 5th. Anniversary of the Establishment of the Disaster Prevention Research Institute*, Kyoto University, Kyoto, Japan, noviembre de 1956, pp. 191-200.
52. Carl F. Izzard, "Hydraulics of runoff from developed surfaces", *Proceedings of the 26th. Annual Meeting of the Highway Research Board*, Vol. 26, diciembre de 1946, pp. 129-146.
53. Robert E. Horton, "The interpretation and application of runoff plot experiments with reference to soil erosion problems", *Proceedings*, Vol. 3, *Soil Science Society of America*, 1938, pp. 340-349.
54. Gail A. Hathaway, "Design of drainage facilities", en el simposio "Military airfields", *Transactions*, Vol. 110, *American Society of Civil Engineers*, 1945, pp. 697-733.

CAPÍTULO **19**

FLUJO NO PERMANENTE RÁPIDAMENTE VARIADO

19-1. Flujo uniformemente progresivo. Si el frente de una onda creciente monoclinal presenta un cambio abrupto en la curvatura o un cambio súbito en la profundidad, el flujo en el frente es rápidamente variado. Este efecto puede producirse por un incremento súbito de la abertura de compuerta en la entrada del canal, como se muestra en la figura 19-1. La velocidad de la masa del agua entre la compuerta y el frente de onda se incrementa desde V_1 hasta V_2, y en consecuencia se incrementa el *momentum*. Mediante la segunda ley de Newton, la fuerza desbalanceada requerida para cambiar el *momentum* por unidad de tiempo es el producto de la masa por el cambio de la velocidad por unidad de tiempo, o

$$F = \frac{1}{g}(V_w - V_2)A_2 w(V_2 - V_1) \tag{19-1}$$

donde w es el peso unitario del agua. La fuerza desbalanceada es igual a la diferencia entre las presiones hidrostáticas sobre las áreas A_2 y A_1 en las secciones 2 y 1, respectivamente; es decir,

$$F = wA_2\bar{y}_2 - wA_1\bar{y}_1 \tag{19-2}$$

donde $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_1$ son las profundidades centroidales de las áreas. Al igualar los anteriores valores de F y al simplificar

$$(V_w - V_2)(V_2 - V_1) = \left(\bar{y}_2 - \frac{A_1}{A_2}\bar{y}_1\right)g \tag{19-3}$$

Al resolver la ecuación (18-15) para V_2,

$$V_2 = \frac{V_1A_1 + V_wA_2 - V_wA_1}{A_2} \tag{19-4}$$

Al sustituir la anterior expresión para V_2 en la ecuación (19-3) y reducir,

$$(V_w - V_1)^2 = \frac{(A_2\bar{y}_2 - A_1\bar{y}_1)g}{A_1(1 - A_1/A_2)} \tag{19-5}$$

o

$$V_w - V_1 = \sqrt{\frac{(A_2\bar{y}_2 - A_1\bar{y}_1)g}{A_1(1 - A_1/A_2)}} \tag{19-6}$$

o

$$V_w = \sqrt{\frac{(A_2\bar{y}_2 - A_1\bar{y}_1)g}{A_1(1 - A_1/A_2)}} + V_1 \tag{19-7}$$

Ésta es una ecuación general que expresa la velocidad absoluta de onda si el flujo es como se muestra en la figura 19-1. En términos matemáticos, el signo de la raíz cuadrada en las ecuaciones anteriores también puede ser negativo. Sin embargo, debido a que la onda se mueve hacia aguas abajo en la dirección del flujo inicial, su velocidad debe considerarse mayor que la velocidad del flujo inicial. En otras palabras, $V_w - V_1$ debe ser positivo. Por consiguiente, sólo se considera práctico el signo positivo.

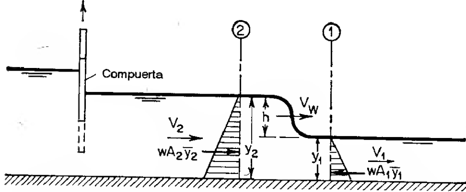


Figura 19-1. Flujo uniformemente progresivo rápidamente variado.

Si la velocidad inicial $V_1 = 0$, es decir, si la onda viaja sobre agua tranquila entonces el término que involucra la raíz cuadrada en las ecuaciones anteriores es igual a la velocidad absoluta de la onda. En cualquier caso, este término, al ser igual a $V_w - V_1$, representa la velocidad de la onda con respecto a la del flujo inicial. Por consiguiente, es la celeridad; es decir,

$$c = \sqrt{\frac{(A_2\bar{y}_2 - A_1\bar{y}_1)g}{A_1(1 - A_1/A_2)}} \tag{19-8}$$

Para canales rectangulares, $\bar{y}_1 = y_1/2$, $\bar{y}_2 = y_2/2$, $A_1 = by_1$ y $A_2 = by_2$. Luego la ecuación (19-8) se convierte en

$$c = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} \tag{19-9}$$

Puede demostrarse que para ondas de altura moderada la ecuación (19-9) se convierte en la (18-45). Para ondas muy pequeñas, la ecuación (19-9) se convierte

en la (18-46). Para ondas muy pequeñas en canales no rectangulares, la ecuación (19-8) se convierte en la (18-47).

En todos los casos, la ecuación (19-7) puede escribirse como

$$V_w = c + V_1 \tag{19-10}$$

que es idéntica a la ecuación (18-51).

En teoría, existen cuatro tipos de flujo no permanente rápidamente variado (figura 19-2): tipo A, que tiene un frente de onda de avance que se mueve hacia aguas abajo; tipo B, con un frente de onda de avance que se mueve hacia aguas arriba; tipo C, con un frente de onda de retroceso que se mueve hacia aguas abajo; y tipo D, con un frente de onda de retroceso que se mueve hacia aguas arriba. El tipo A acaba de describirse. Para el tipo B puede demostrarse que

$$V_w = c - V_1 \tag{19-11}$$

que es idéntica a la ecuación (18-50), y también que la ecuación (19-10) se aplica al tipo C, y la ecuación (19-11) al tipo D. En teoría es posible que las velocidades V_1 y V_2 tengan direcciones opuestas. En ese caso, una velocidad se considera negativa si su dirección es opuesta a la que se muestra en la figura 19-2.

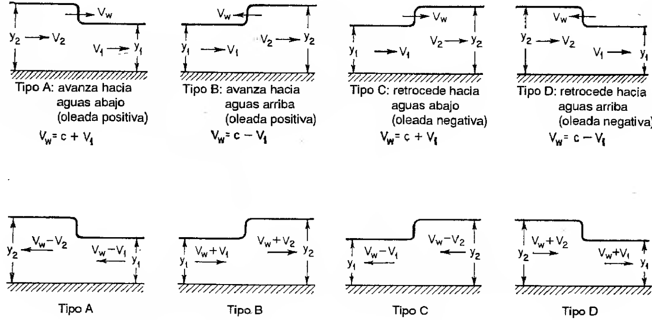


Figura 19-2. Cuatro tipos de flujo uniformemente progresivo rápidamente variado (*parte superior*) flujos no permanentes; (*parte inferior*) los flujos correspondientes que parecen permanentes a un observador que sigue el frente de onda.

La velocidad absoluta V_w de onda también puede expresarse mediante la ecuación (18-15). Debido a que esta ecuación se dedujo con base en el principio de continuidad, se aplica tanto a ondas crecientes monoclinales gradualmente variadas como a las rápidamente variadas.

Nótese que el perfil de onda es estable para un frente que avanza e inestable para un frente de retroceso. Puede suponerse que el frente de onda está conformado por un número grande de pequeñas ondas localizadas una encima de la otra. Como la onda de la parte superior tiene una mayor profundidad que la que se encuentra

por debajo, tiene mayor velocidad, [ecuación (18-46)] y se mueve con más rápidez. En el caso de un frente de onda de avance, las ondas superiores sobrepasarán a las inferiores en dirección hacia adelante. La tendencia es que las ondas se combinen y eventualmente conformen un frente de onda grande único, el cual es empinado y estable. En el caso de un frente de retroceso, las ondas superiores se retirarán con mayor rapidez que las inferiores. El resultado es que el frente de onda se vuelve pendiente y eventualmente se aplana.

Debido a la presencia de la fricción del canal, el perfil de onda de un frente de avance cambia. Este efecto puede no ser significativo en canales artificiales relativamente cortos con pequeños efectos de fricción, pero sí lo es en tramos largos de canales naturales donde la fricción es considerable.

19-2. El resalto hidráulico móvil. Cuando un flujo no permanente rápidamente variado involucra un cambio en el nivel desde subcrítico a supercrítico, originará un *resalto hidráulico móvil.* Un observador que se mueve en la orilla al mismo tiempo y con la misma velocidad que la cresta de la onda la verá como un resalto hidráulico estacionario. Esto se ilustra en la parte inferior de la figura 19-2 para los cuatro tipos de flujo. Todas las ecuaciones deducidas en la sección anterior se aplican también a estos flujos. Sin embargo, puede describirse un método adicional para deducir la ecuación.

Para un resalto hidráulico estacionario, la ecuación (3-21) puede reducirse a:

$$V_1 = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} \tag{19-12}$$

El lado derecho de la ecuación es igual a la celeridad expresada por la ecuación (19-9). Al aplicar esta ecuación al resalto hidráulico permanente de tipo A en la figura 19-2, como lo ve el observador, V_1 debe remplazarse por $V_w - V_1$; es decir,

$$V_w - V_1 = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} = c \tag{19-13}$$

o

$$V_w = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} + V_1 = c + V_1 \tag{19-14}$$

Ésta es idéntica a la ecuación (19-10). Al aplicar el mismo procedimiento al flujo tipo B,

$$V_w = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} - V_1 = c - V_1 \tag{19-15}$$

que es idéntica a la ecuación (19-11).

Nótese que los flujos tipos C y D en realidad no son posibles, debido a que no puede formarse un resalto estable si el flujo cambia de un nivel alto a uno bajo. Por esta razón, ni el tipo C ni el D pueden tener un frente empinado estable parecido al de un resalto hidráulico.

El término resalto hidráulico móvil a menudo se utiliza como sinónimo de oleada y oleada hidráulica. Sin embargo, oleada por lo general se refiere a un resalto hidráulico que se mueve debido a un descenso o incremento abrupto de flujo, como el causado por el cierre súbito o la apertura de una compuerta. El término oleada hidráulica igualmente se refiere a un resalto hidráulico móvil debido a efectos de mareas; éste posee un frente de avance empinado y agudo[1].

Cuando un resalto hidráulico móvil específicamente se denomina oleada, se clasifica en dos clases: positiva y negativa[2]. La oleada positiva eleva la superficie del agua avanzando en un frente estable hacia aguas arriba o hacia aguas abajo (figura 19-2, tipos A y B). La oleada negativa baja la superficie del agua retirándose en un frente inestable hacia aguas arriba o hacia aguas abajo (figura 19-2, tipos C y D).

Para los tipos de resaltos hidráulicos móviles ilustrados en la figura 19-2, pueden citarse ejemplos clásicos. Para el tipo A los ejemplos son la famosa inundación en Johnstown en 1889, causada por la falla de una presa de tierra en el embalse South Fork, en Pennsylvania [6-8]; la creciente de Heppner, debida a una tormenta en Willow Creek, en Oregon, en 1903 [9]; y la inundación debida a la falla de la presa Saint Francis, cerca de Los Angeles, California, en 1928 [10]. En el caso de Johnstown, la creciente fue precedida por una oleada que tenía inicialmente de 125 a 150 pies de altura en la presa y que se redujo de 30 a 40 pies a medida que corría hacia aguas abajo a lo largo de 15 millas de un valle angosto y ondulante hasta Johnstown con una velocidad de 50 millas/hr o mayor. El caudal se estimó cercano a 200,000 pies^3/s.

El flujo tipo B a menudo ocurre en ríos sometidos a mareas. Ejemplos comunes son la oleada Hangchow, en Haining sobre el río Chien Tang (figura 19-3); la oleada en el río Severn, cerca de Gloucester, Inglaterra; y las oleadas en los ríos que conectan la bahía de Fundy, en Nueva Escocia. En canales que alimentan turbinas hidráulicas, el flujo tipo B, conocido como *oleada de rechazo*, ocurrirá como resultado de una disminución súbita en la generación de potencia.

El flujo tipo C por lo general resulta de un descenso súbito en el suministro de flujo aguas arriba, como el que causa el cierre de una compuerta aguas arriba en un canal o en el canal de salida de una planta hidroeléctrica.

El flujo tipo D, conocido como *oleada de demanda*, ocurre en canales que alimentan turbinas hidráulicas, si la demanda en el extremo de aguas abajo del canal se aumenta súbitamente.

En la figura 19-2 los niveles inicial y final después de que pasa la oleada se suponen uniformes. Estas oleadas a menudo ocurren en canales de baja pendiente. En canales inclinados, los cuatro tipos de oleada ocurrirán como se muestra en la figura 19-4 [11].

[1] Para una investigación teórica y experimental sobre la oleada, *véanse* [1] y [2].
[2] Para estudios analíticos y experimentales, *veánse* [3] a [5].

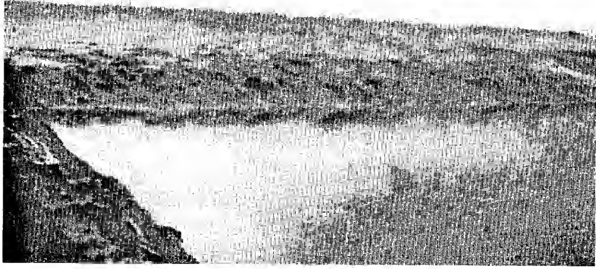
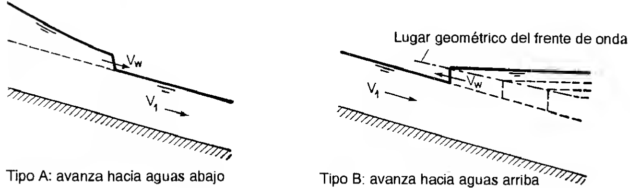


Figura 19-3. La oleada Hangchow, en Haining, sobre el río Chien Tang, China. el frente de onda tenía 16 pies de altura; y viajaba a alta velocidad. Siete minutoss después de que pudiera observarse en el horizonte, la onda había pasado. El agua alcanzó una altura final de alrededor de 28 pies en 30 minutos. El ancho del río en el lugar de observación era cercano a 1 milla (*cortesía de Mead and Hunt, Inc.*).



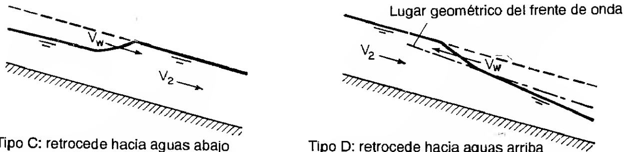


Figura 19-4. Flujo rápidamente variado en canales inclinados (*según M. D. Chertousov* [11]).

19-3. Oleadas positivas. Éstas tienen un frente de avance con el perfil de un resalto hidráulico móvil. Cuando la altura de la oleada es pequeña, ésta aparece ondulante, muy similar a un resalto ondulante. Cuando la altura se incrementa, esta ondulación desaparecerá y tendrá un frente agudo y empinado.

Considere la oleada positiva de tipo A (figura 19-2); la velocidad absoluta de onda puede expresarse mediante la ecuación (18-15). Para un canal rectangular la velocidad es

$$V_w = \frac{V_1 y_1 - V_2 y_2}{y_1 - y_2} \tag{19-16}$$

Al eliminar V_w de las Ecuaciones (19-14) y (19-16) y simplificar,

$$(V_1 - V_2)^2 = (y_1 - y_2)^2 \frac{(y_1 + y_2)g}{2y_1 y_2} \tag{19-17}$$

Esta ecuación representa la relación entre las velocidades inicial y final y las profundidades de la oleada. De la misma manera puede demostrarse que la ecuación (19-17) también se aplica a una oleada del tipo B (figura 19-2). Nótese que si se utiliza la ecuación (19-17) para determinar y_1 o y_2, debe resolverse por ensayo y error.

Al multiplicar la ecuación (19-17) por el cuadrado de la (19-9) y simplificar, puede demostrarse que

$$V_1 - V_2 = \pm \frac{h}{c}\left(\frac{y_1 + y_2}{2y_1}\right) g \tag{19-18}$$

donde $h = y_2 - y_1$, o la altura de la oleada, y donde c es la celeridad. En el lado derecho de la ecuación, el signo positivo se aplica a la oleada tipo B, y el negativo a la de tipo A.

Cuando la altura de la oleada es pequeña comparada con la profundidad de flujo, $y_1 \approx y_2$. Luego la ecuación (19-18) puede escribirse como

$$V_1 - V_2 = \pm \frac{hg}{c} \tag{19-19}$$

Para evitar la confusión en la convención de signos, el signo de las ecuaciones (19-18) y (19-19) puede simplificarse ignorando el signo negativo en los lados derechos y recordando que h y c siempre son cantidades positivas. De acuerdo con esto, $V_1 - V_2$ siempre debe ser positivo. Si $V_2 < V_1$, entonces $V_1 - V_2$ debe remplazarse por $V_2 - V_1$. Si V_1 y V_2 tienen direcciones opuestas, entonces su suma $V_1 + V_2$ debe utilizarse en lugar de su diferencia.

Varios casos comunes del análisis de oleadas positivas se dan a continuación:

A. Oleada debida a un corte súbito del flujo. Si el agua que fluye en un canal con una velocidad V se corta instantáneamente se producirá una oleada del tipo B. En este caso, $V_1 = V$ y $V_2 = 0$; luego la ecuación (19-17) da

$$V = (y_2 - y_1)\sqrt{\frac{(y_1 + y_2)g}{2y_1 y_2}} \tag{19-20}$$

También, de la ecuación (19-18),

$$V = \frac{h}{c}\left(\frac{y_1 + y_2}{2y_1}\right) g \qquad (19\text{-}21)$$

Luego la altura de la oleada es

$$h = \frac{c}{g}\left(\frac{2y_1}{y_1 + y_2}\right) V \qquad (19\text{-}22)$$

Si la altura de la oleada es pequeña con relación a la profundidad de flujo, las ecuaciones (19-21) y (19-22) pueden aproximarse, respectivamente, a

$$V = \frac{h}{c} g \qquad (19\text{-}23)$$

y

$$h = \frac{c}{g} V \qquad (19\text{-}24)$$

B. Encuentro de dos oleadas. Cuando dos oleadas con direcciones opuestas se encuentran, el resultado es la generación de dos nuevas oleadas que viajan en direcciones contrarias. Esto se ilustra en la figura 19-5, en la que se indica toda la notación.

Al aplicar la ecuación (19-17) al lado izquierdo de la nueva oleada, con $V_2 = -V$, $y_2 = y$ y remplazar V_1 por $-V_1$,

$$(V_1 - V)^2 = (y_1 - y)^2 \frac{(y_1 + y)g}{2y_1 y} \qquad (19\text{-}25)$$

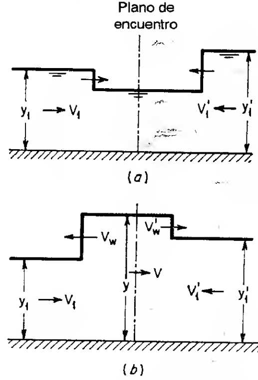


Figura 19-5. Encuentro de dos oleadas. (*a*) antes; (*b*) después.

Al aplicar la ecuación (19-17) al lado derecho de la nueva oleada con $V_2 = V$, $V_1 = -V_1'$, $y_2 = y$ y $y_1 = y_1'$,

$$(V_1' + V)^2 = (y_1' - y)^2 \frac{(y_1' + y)g}{2y_1' y} \qquad (19\text{-}26)$$

Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones anteriores, pueden determinarse las incógnitas V y y. Las velocidades absolutas de onda de las nuevas oleadas pueden determinarse mediante la ecuación (19-16). Entonces,

$$V_w = \frac{V_1 y_1 - V y}{y - y_1} \qquad (19\text{-}27)$$

y

$$V_w' = \frac{V_1' y_1' + V y}{y - y_1'} \qquad (19\text{-}28)$$

Cuando la altura de las oleadas es pequeña con relación a la profundidad de flujo, puede aplicarse la ecuación (19-19). Luego,

$$V_1 \pm V = \frac{h}{c} g \qquad (19\text{-}29)$$

El signo positivo se aplica a la oleada del lado derecho y el signo negativo a la del lado izquierdo.

C. Oleada que cruza un escalón. En el análisis de una oleada, un escalón sobre el piso del canal puede ser real o ficticio. El ficticio a menudo se supone para simular el efecto de la pendiente del canal. Sin embargo, el método de análisis es el mismo en ambos casos.

En los análisis anteriores se supuso pequeña la pendiente del canal. Para canales de pendiente alta el análisis de movimiento de oleadas se ilustrará mediante el ejemplo 19-2. En cálculos simplificados el efecto de la pendiente puede tratarse convirtiéndola en una serie de escalones. De este modo la longitud del canal se divide en cierto número de tramos, y en cada uno el fondo se considera horizontal, y la caída real en la elevación del fondo debida al efecto de la pendiente se representa mediante un escalón (figura 19-6) colocado en la mitad o en uno de los extremos del tramo. La altura F del escalón es igual a la pendiente del canal mul- tiplicada por la longitud del tramo. Este cálculo simplificado a menudo se utiliza en análisis que también consideran el efecto de la fricción (sección 19-5).

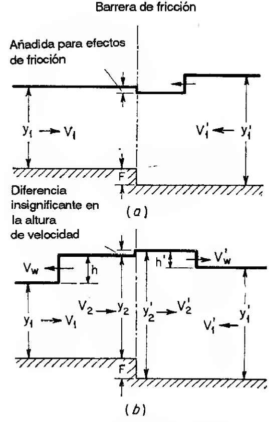


Figura 19-6. Arribo de una oleada a una barrera de escalón y fricción. (*a*) Antes; (*b*) después.

Cuando la oleada llega a un escalón produce dos nuevas oleadas, una que viaja hacia aguas arriba y la otra hacia aguas abajo. La figura 19-6 ilustra el arribo de la oleada al escalón y la condición inmediatamente después del mismo. Al aplicar la ecuación (19-17) a la nueva oleada del lado izquierdo,

$$(V_1 - V_2)^2 = (y_1 - y_2)^2 \frac{(y_1 + y_2)g}{2y_1 y_2} \qquad (19\text{-}30)$$

Al aplicarla a la nueva oleada del lado derecho,

$$(V_1' + V_2')^2 = (y_1' - y_2')^2 \frac{(y_1' + y_2')g}{2y_1' y_2'} \qquad (19\text{-}31)$$

que es similar a la ecuación (19-30). Mediante continuidad geométrica,

$$y_2 + F = y_2' \qquad (19\text{-}32)$$

Mediante continuidad hidráulica,

$$V_2 y_2 = V_2' y_2' \tag{19-33}$$

Al resolver simultáneamente las cuatro ecuaciones anteriores pueden determinarse las incógnitas V_2, y_2, V_2' y y_2', y las velocidades de onda mediante la ecuación (19-16).

Cuando la altura de las oleadas es pequeña en relación con la profundidad de flujo se aplica la ecuación (19-19). Luego las ecuaciones (19-30) y (19-31) pueden escribirse como

$$V_1 - V_2 = \frac{h}{c} g \tag{19-34}$$

y

$$V_1' + V_2' = \frac{h'}{c'} g \tag{19-35}$$

donde c y c' son las celeridades de las oleadas del lado derecho y del lado izquierdo, respectivamente.

Ejemplo 19-1. Un flujo permanente con 6.80 pies/s y una profundidad de 42.90 pies se corta súbitamente en el extremo de aguas abajo de un tramo de 9,700 pies sobre un canal rectangular sin fricción. Determine la oleada que se produce.

Solución. El resultado es una oleada reflejada que avanza hacia aguas arriba. La velocidad en el extremo de aguas abajo cambia desde $V_1 = 6.80$ pies/s a $V_2 = 0$. Mediante las ecuaciones (19-17) o (19-20), con $y_1 = 42.90$ pies, se calcula la profundidad de la oleada de avance y_2 como 51.09 pies.

Nótese que las ecuaciones (19-17) o (19-20) deben resolverse por tanteo. Un procedimiento simplificado es utilizar la ecuación (18-46) en conjunto con la (19-24). Luego la ecuación (18-46) da $c = \sqrt{32.2 \times 42.9} = 37.2$ pies/s y la (19-24) da $h = 37.2 \times 6.80/32.2 = 7.85$ pies, lo cual hace que $y_2 = 42.90 + 7.85 = 50.75$ pies. Este valor puede utilizarse como el mejor estimativo para la solución por tanteo de las ecuaciones (19-17) o (19-20).

Mediante la ecuación (19-16) la velocidad de onda es $V_w = 35.6$ pies/s. El tiempo requerido para que el frente de onda llegue al extremo de aguas arriba del tramo es 9,700/35.6 = 272 s. La celeridad es 35.6 + 6.8 = 42.4 pies/s.

Ejemplo 19-2. Un flujo permanente gradualmente variado se disminuye en el extremo inferior de un canal rectangular inclinado mediante el cierre parcial súbito de una compuerta. Describa un método para determinar la oleada que se produce (*véanse* también sección 19-5).

Solución. Con referencia a la figura 19-7, el canal tiene una pendiente S_0 y conduce un canal permanente Q. La profundidad y y la velocidad V del flujo permanente en cualquier sección, por ejemplo *nn*, pueden calcularse.

Para la determinación de la oleada debida al descenso súbito del flujo en la sección 00, puede emplearse un cálculo de pasos. El canal se divide en cierto número de tramos, cada uno con una longitud igual a Δx. El cálculo puede empezar en la sección 00 y luego proceder para cada tramo hacia aguas arriba. Considere el cálculo desde la sección *n'n'* a la *nn*. Se supone que la condición de flujo en la sección *n'n'* se ha determinado y se requiere ahora para determinar la altura h de la oleada y la velocidad V_w en la sección *nn*.

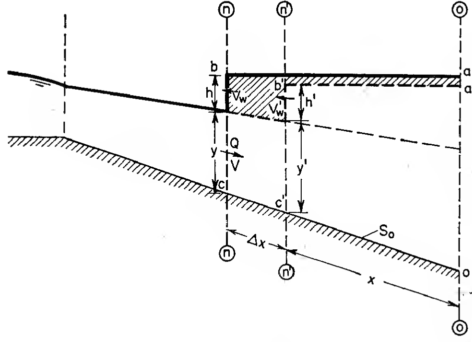


Figura 19-7. Oleada positiva que se mueve hacia aguas arriba en un canal inclinado.

El caudal en el frente de la oleada es

$$\Delta Q_n = V_w b h \tag{19-36}$$

donde b es el ancho del canal.

Mediante la ecuación (19-15), utilizando la ecuación (18-45) para c,

$$V_w = \sqrt{gy\left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{h}{y}\right)} - V \tag{19-37}$$

donde y es la profundidad y V es la velocidad de flujo en la sección *nn*. Si la altura de la oleada es relativamente pequeña, por ejemplo $h \leq 0.1y$, la ecuación anterior puede remplazarse por

$$V_w = \sqrt{gy} - V \tag{19-38}$$

El tiempo requerido para que la oleada se mueva desde la sección *n'n'* hasta la *nn* puede expresarse como

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{V}_w} \tag{19-39}$$

donde

$$\bar{V}_w = \tfrac{1}{2}(V_w + V_w') \tag{19-40}$$

Sea W la representación del área sombreada (figura 19-7), que es una medida del incremento en el almacenamiento del canal debido al avance de la oleada en el tiempo Δt. Luego,

$$W = \Delta Q \, \Delta t \tag{19-41}$$

donde ΔQ es la reducción en el caudal debido al cierre parcial de la compuerta.

Al eliminar $\bar{V}_w$ y Δt en las tres ecuaciones anteriores la velocidad de la oleada puede escribirse como

$$V_w = \frac{2\,\Delta Q\,\Delta x}{W} - V_w' \tag{19-42}$$

En el cálculo, primero suponga h. Luego deetermine W por geometría, suponiendo una superficie del agua horizontal en el canal después de que pasa la oleada. Entonces, calcule los valores de V_w mediante las Ecuaciones (19-37) y (19-42), respectivamente. Si estos valores de

V_w no coinciden, suponga otro h y repita el cálculo hasta que coincidan y por consiguiente se hayan obtenido los valores correctos de h y V_w. Para empezar el cálculo de paso en la sección 00, puede utilizarse la ecuación (19-36) para remplazar la (19-42), debido a que en la primera el valor de ΔQ_n en la sección 00 es igual a ΔQ.

Ejemplo 19-3. Un escalón con F = 2.38 pies se localiza en el extremo de aguas arriba del tramo considerado en el ejemplo 19-1. Determine la condición de flujo inmediatamente después de que la oleada llega a esta barrera. El flujo aguas arriba del tramo en consideración tiene una velocidad permanente de 7.00 pies/s en la dirección hacia aguas abajo y una profundidad de 41.65 pies.

Solución. En el escalón la oleada producida en el ejemplo 19-1 se divide en dos oleadas componentes, una que viaja más lejos hacia aguas arriba, y la otra, una oleada reflejada que viaja hacia aguas abajo. Para la que viaja hacia aguas arriba la ecuación (19-30) da

$$(7.00 - V_2)^2 = (41.65 - y_2)^2 \frac{(41.65 + y_2)g}{83.30y_2} \tag{19-43}$$

Mediante la ecuación (19-32), $y_2' = y2 + 2.38$. Luego, para la que viaja hacia aguas abajo, la ecuación (19-31) da

$$(0 - V_2')^2 = (48.71 - y_2)^2 \frac{(53.47 + y_2)g}{102.18(y_2 + 2.38)} \tag{19-44}$$

Mediante la continuidad de flujo, la ecuación (19-33) da

$$V_2y_2 = V_2'(y_2 + 2.38) \tag{19-45}$$

Las ecuaciones (19-43) a (19-45) pueden resolverse simultáneamente por tanteo. Al suponer V_2 = 0.52 pies/s, la ecuación (19-43) da y_2 = 49.34 pies, y la ecuación (19-44) da V_2' = 0.50 pies/s. La ecuación (19-45) sirve para propósitos de verificación. Luego, $0.52 \times 49.34 \approx 0.50 \times 51.72$.

Si la ecuación (19-45) no se satisface deben probarse otros valores de V_2 y repetirse los cálculos hasta que la condición de continuidad del flujo sobre el escalón esté bien establecida.

Nótese que en este ejemplo las elevaciones de la superficie del agua en los dos lados del escalón no son iguales en las condiciones de flujo permanente; debido al efecto de fricción la diferencia es 41.65 + 2.38 – 42.90 = 1.13 pies, y puede tratarse en combinación con el efecto de pendiente en el análisis de las oleadas (*véase* sección 19-5).

El efecto de la fricción en un tramo puede suponerse concentrado en un elemento ficticio conocido como *barrera de fricción.* Este elemento puede posicionarse convenientemente en la sección donde se provee un escalón para tener en cuenta el efecto de pendiente. A ambos lados de la barrera la superficie del agua se mantiene horizontal, pero las profundidades de flujo no son iguales; cada una representa la profundidad promedio del flujo permanente en su tramo, que puede determinarse mediante un cálculo de perfil de flujo con base en una rugosidad determinada del canal. Cuando la oleada llega a la barrera, el agua más rápida en uno de los lados de ésta saltará hacia el agua más lenta en el otro lado. Como resultado se dispara un pequeño chorro de agua, que inmediatamente separa el flujo en dos nuevas oleadas, que se mueven en direcciones contrarias. En la barrera permanece una pequeña onda estacionaria, que tiene en cuenta la diferencia entre las dos alturas de velocidades existentes a ambos lados de la barrera. En general, esta diferencia es tan pequeña que puede ignorarse.

Ejemplo 19-4. Deduzca una expresión que muestre la cantidad aproximada de energía en una oleada.

Solución. Considere un elemento de la oleada con una longitud en la dirección del canal igual a la unidad; la energía potencial de la oleada es igual al trabajo hecho para subir la masa del agua whT a una altura $h/2$, o

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2} w h^2 T \tag{19-46}$$

donde w es el peso unitario del agua, T es el ancho superficial y h es la altura de la oleada. La energía cinética del elemento es igual a

$$\text{E.C.} = \frac{wV^2yT}{2g} \tag{19-47}$$

donde y es la profundidad de agua y V es la velocidad del flujo. Mediante las ecuaciones (19-23) o (19-19), según el caso respectivo, la anterior ecuación puede reducirse a

$$\text{E.C.} = \frac{wh^2gyT}{2c^2} \tag{19-48}$$

Al suponer una altura de oleada pequeña,

$$c = \sqrt{gy}$$

y la anterior ecuación se convierte en

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2} w h^2 T \tag{19-49}$$

La energía total de la oleada por unidad de longitud es, por consiguiente,

$$E = \text{E.P.} + \text{E.C.} = w h^2 T \tag{19-50}$$

19-4. Oleadas negativas. Éstas no son de configuración estable debido a que las partes superiores de la onda viajan más rápidamente que las inferiores (sección 19-1). Si se supone que el perfil inicial de la oleada tiene un frente empinado, se aplanará con rapidez a medida que la oleada se mueva a lo largo del canal (figura 19-8). Si la altura de la oleada es moderada o pequeña en comparación con la profundidad de flujo, pueden aplicarse las ecuaciones deducidas para una oleada positiva con el fin de determinar de manera aproximada la propagación de la oleada negativa. Si es relativamente grande, se necesita un análisis más elaborado, como sigue:

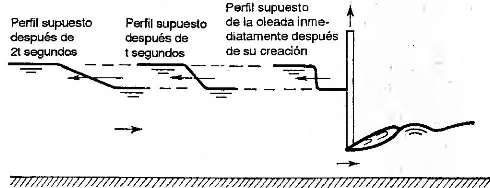


Figura 19-8. Propagación de una oleada negativa debida a la apertura súbita de una compuerta deslizante.

La figura 19-9 muestra una oleada tipo D (figura 19-2) con una altura relativamente grande, retirándose en una dirección hacia aguas arriba. La oleada es causada por la elevación súbita de una compuerta deslizante y su velocidad de onda varía de un punto a otro. Por ejemplo, V_w es la velocidad de onda en un punto sobre

la superficie de la onda donde la profundidad es y y la velocidad de flujo a través de la sección es V. Durante un intervalo de tiempo dt el cambio en y es dy, que es positivo si y aumenta, y negativo si disminuye. Mediante el principio de *momentum*, el cambio correspondiente en la presión hidrostática debería ser igual a la fuerza requerida para cambiar el *momentum* del elemento vertical entre y y $y + dy$. Al considerar un ancho unitario para el canal y suponer $\beta_1 = \beta_2 = 1$,

$$\frac{w}{2} y^2 - \frac{w}{2} (y + dy)^2 = \frac{w}{g} (y + ½\, dy)(V + V_w)\, dV \qquad (19\text{-}51)$$

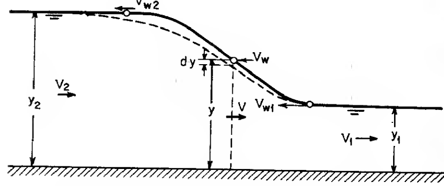


Figura 19-9. Análisis de una oleada negativa.

Al simplificar la ecuación anterior ignorar los términos con diferenciales de órdenes altos,

$$dy = -\frac{V + V_w}{g} dV \qquad (19\text{-}52)$$

Como se describió antes (sección 19-1), puede suponerse que el frente de onda completo está compuesto por un gran número de ondas muy pequeñas colocadas una encima de otra, cuya velocidad en el punto en consideración puede expresarse de acuerdo con la ecuación (19-11) como

$$V_w = \sqrt{gy} - V \qquad (19\text{-}53)$$

De igual modo, la velocidad en la cresta de la onda es

$$V_{w2} = \sqrt{gy_2} - V_2 \qquad (19\text{-}54)$$

y, en la parte más baja de la onda,

$$V_{w1} = \sqrt{gy_1} - V_1 \qquad (19\text{-}55)$$

Cuando la oleada no es muy alta, puede suponerse una relación de línea recta entre V_{w1} y V_{w2}. Luego puede considerarse que la velocidad media de la onda es

$$V_m = \frac{V_{w1} + V_{w2}}{2} \qquad (19\text{-}56)$$

Ahora, al eliminar V_w en las ecuaciones (19-52) y (19-53),

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dV}{\sqrt{g}} \qquad (19\text{-}57)$$

Al integrar esta ecuación desde y_2 hasta y y desde V_2 hasta V, y resolver para V,

$$V = V_2 + 2\sqrt{gy_2} - 2\sqrt{gy} \qquad (19\text{-}58)$$

A partir de la ecuación (19-53),

$$V_w = 3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_2} - V_2 \qquad (19\text{-}59)$$

Luego la velocidad de onda en su parte más baja es

$$V_{w1} = 3\sqrt{gy_1} - 2\sqrt{gy_2} - V_2 \qquad (19\text{-}60)$$

Sea t el tiempo transcurrido desde la creación de la oleada o, en este caso, desde el momento en que se abrió la compuerta deslizante. En $t = 0$ la longitud de onda $\lambda = 0$. Después de t segundos, la longitud de onda es igual a

$$\lambda = (V_{w2} - V_{w1})t \qquad (19\text{-}61)$$

El análisis anterior puede aplicarse de manera similar a una oleada negativa del tipo C.

Ejemplo 19-5. Demuestre que la ecuación del perfil de onda que resulta de la falla de una presa tiene la forma de

$$x = 2t\sqrt{gy_2} - 3t\sqrt{gy} \qquad (19\text{-}62)$$

donde x es la distancia desde el sitio de presa, y es la profundidad del perfil de onda, y_2 es la profundidad del agua embalsada y t es el tiempo a partir del rompimiento de la presa.

Solución. Como el agua embalsada tiene velocidad cero o $V_2 = 0$, la velocidad de onda mediante la ecuación (19-59) es $V_w = 3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_2}$. Como V_w está en la dirección negativa de x, $x = -V_w t$, según la ecuación (19-62).

La ecuación (19-62) representa una parábola con un eje vertical y su vértice en el fondo del canal, como se muestra en la figura 19-10. En el sitio de la presa, $x = 0$ y la profundidad es $y_c = 4y_2 / 9$. Debido a la fricción en el canal, el perfil real toma la forma indicada por la línea punteada y tiene un frente redondeado en el extremo de aguas abajo que forma un frente de onda (*véase* ejemplo 18-1). En el extremo de aguas arriba, el perfil teórico desarrollado de esta manera se verificó satisfactoriamente mediante experimentos hechos por Schoklitsch [12].

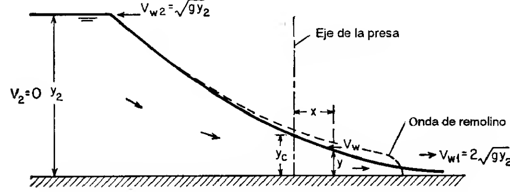


Figura 19-10. Perfil de onda debido a la falla de una presa.

19-5. Oleadas en canales de centrales hidroeléctricas. Los ingenieros están interesados en determinar el nivel máximo del agua que puede alcanzarse como resultado de un rechazo súbito de carga en un canal que alimenta una central de generación hidroeléctrica. Esta información se requiere para el diseño del canal con el fin de establecer la altura necesaria de los muros para prevenir reboses.

La figura 19-11*a* muestra la condición de flujo permanente en un canal que alimenta una central de generación. El perfil de flujo y las pérdidas por fricción pueden calcularse. Cuando la carga se corta de repente, se produce una oleada de rechazo que avanza hacia aguas arriba, como se muestra en la figura 19-11*b*. De acuerdo con observaciones usuales, la superficie del agua *ab* aguas abajo del frente de onda es casi horizontal. Cuando el frente de onda alcanza el embalse, la superficie de agua a lo largo de todo el canal se vuelve horizontal (figura 19-11*c*). Sin embargo, un volumen permanentemente creciente debe pasar a través del frente de onda para llenar el espacio correspondiente a *abc*. Debido a esta acción y al efecto de la fricción, el frente de onda se reduce siempre en altura y velocidad en su camino hacia el embalse. Además, a medida que la oleada llega al embalse, la velocidad de flujo en el canal debe mostrar un incremento progresivo desde un máximo en el embalse hasta cero en el extremo de aguas abajo donde no existe salida de alivio. Como resultado, el agua alcanzará un nivel máximo en el extremo de aguas abajo, como se muestra en la figura 19-11*d*, momentos después del arribo del frente de onda al embalse.

Para la determinación del máximo nivel producido por la oleada de rechazo[3], Johnson [14, 15] aplicó un método analítico[4] al diseño del canal de suministro de la planta Queenston-Chippewa, cerca de las cataratas del Niágara. En este ejemplo (figura 19-12*a*), la longitud total del canal se divide en cuatro tramos cada uno con 9,700 pies de longitud.

En el inicio, $t = 0$, el flujo es permanente y su perfil puede calcularse. La caída en la elevación de la superficie del agua en cada tramo se indica en la sección de división entre éstos, por ejemplo, 1.13 pies para el tramo 4 de la figura 19-12*b* (*véase* ejemplo 19-3). En cada tramo se supone que la superficie del agua es horizontal, y en la condición de flujo permanente se considera la fricción para el cálculo del perfil de flujo. El efecto de la pendiente del canal se representa mediante una caída en el fondo en cada una de las secciones de división entre los tramos, por ejemplo, 2.38 pies para el tramo 4 (sección 19-3*C*). Las profundidades de agua en pies se representan por los números escritos verticalmente. Las velocidades en pies por segundo se representan mediante los números escritos horizontalmente. En el tramo 4, por ejemplo, la profundidad es 42.90 pies y la velocidad es 6.80 pies/s.

Cuando la carga se corta de repente, se desarrolla una oleada en el extremo de aguas abajo del canal (figura 19-12*c*) cuyo cálculo se presentó en el ejemplo 19-1.

Después de 272 segundos desde el momento en que se produjo la oleada, ésta llega a la barrera del extremo de aguas arriba del tramo 4 (figura 19-12*d*). La profundidad del agua a lo largo de éste es 51.09 pies y la velocidad de flujo es cero.

[3] Para otro método, *véase* [13].
[4] Johnson dio el crédito de este método a P. Wahlman.

En la barrera, la oleada se divide rápidamente en dos oleadas componentes, una que viaja hacia aguas arriba y la otra hacia aguas abajo, y cuyo cálculo se dio en el ejemplo 19-3.

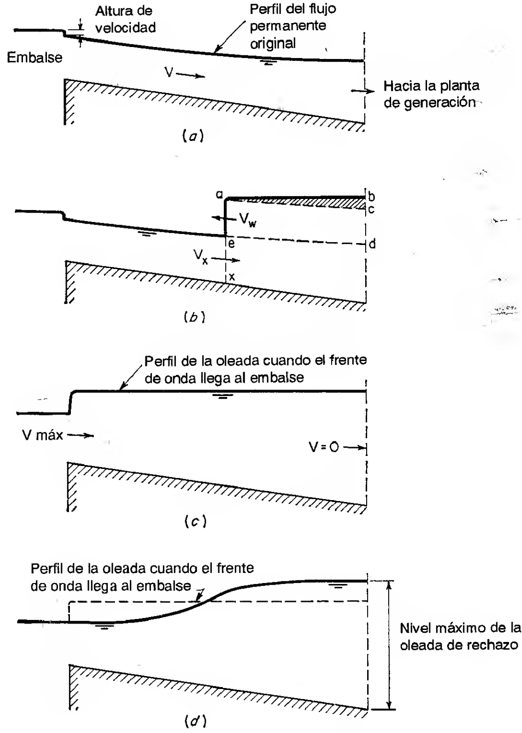


Figura 19-11. Desarrollo de una oleada de rechazo en un canal sin fricción.

La oleada componente que viaja hacia aguas abajo rápidamente alcanzará ese extremo del canal, y una vez que esto ocurra, se reflejará y viajará de nuevo hacia aguas arriba.

La oleada componente que viaja hacia aguas arriba rápidamente alcanzará otra barrera de fricción, en la que se dividirá en dos componentes, una que viaja más lejos hacia aguas arriba, y la otra que viaja hacia aguas abajo. Cuando se encuentran dos oleadas que viajan en sentido contrario, se generan dos nuevas oleadas, cuyo cálculo se describió en la sección 19-3*B*.

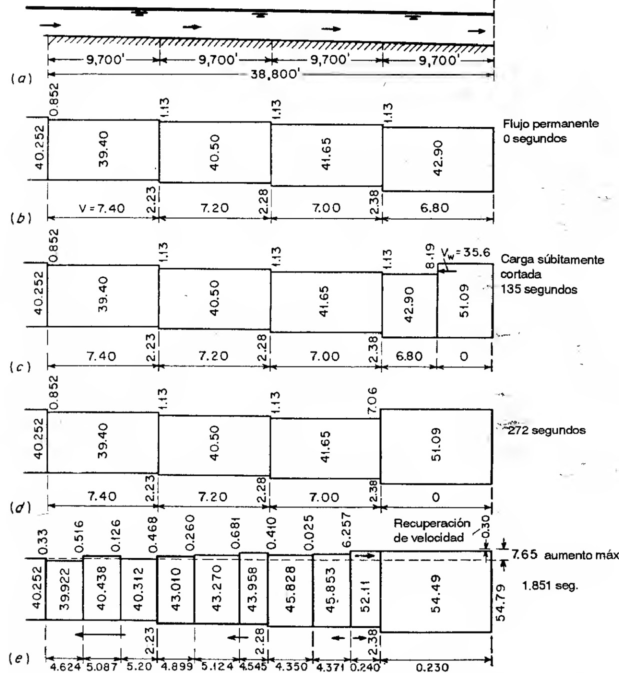


Figura 19-12. Análisis de una oleada de rechazo mediante el método de Johnson.

Las oleadas continuarán viajando, dividiéndose y combinándose. El cálculo seguirá de esta manera hasta que se obtenga el nivel máximo en el extremo de aguas abajo del canal. En el ejemplo dado por Johnson, el nivel máximo era 7.65 pies por encima del nivel del embalse (figura 19-12*e*). Esto se alcanza 1,851 segundos después del rechazo de carga.

El método de Johnson es muy dispendioso, y se vuelve muy tedioso a medida que los cálculos continúan, porque se producen y se propagan muchas oleadas. Las oleadas en canales también pueden estudiarse mediante modelos hidráulicos y computadores electrónicos, que a menudo son mucho más fáciles pero más caros*.

* *Nota del traductor.* Esta afirmación era cierta en la época en que Ven Te Chow escribió este libro (1959). Sin embargo, hoy en día el uso de computadores es generalizado y cualquier proceso de modelación en ellos es muy barato.

El análisis de oleadas es importante para el diseño de túneles de salida ventilados en estaciones hidroeléctricas subterráneas. En tales casos, la oleada de demanda usualmente se desarrolla como el resultado de un incremento súbito en la producción de carga [16, 17].

Las oleadas de rechazo en canales que alimentan centrales hidroeléctricas pueden controlarse mediante dos estructuras de uso común: vertederos laterales longitudinales a lo largo del canal y compuertas basculantes en la parte superior del vertedero, automáticas u operadas mediante turbinas. La teoría para vertederos laterales longitudinales la desarrollaron Drioli [18], Schmidt [19] y Citrini [20, 21]. La teoría de Citrini se basa en el método de las características y Gentilini [22], Penati [23] y De Marchi [24, 25] la verificaron de manera satisfactoria. De Marchi también reportó experimentos sobre el uso de compuertas basculantes como estructura de control.

Para un estudio más completo flujos no permanentes, *véase* Frank [26].

19-6. Oleadas en canales de navegación. Éstas pueden ocurrir como resultado de las operaciones de esclusas, perturbaciones debidas al tráfico, acción de mareas u otras causas, y en condiciones severas afectarán de manera crítica el tráfico en el canal, por disminución del nivel del agua y la consecuente reducción de la profundidad efectiva del canal o por aumento del nivel del agua y su consecuente aumento del borde libre requerido. También pueden imponer una carga súbita de impacto sobre los barcos, las estructuras del canal y las maquinarias que operan las compuertas de émbolo[5].

En la mayor parte de los canales de navegación, sin embargo, las oleadas son pequeñas e insignificantes. A pesar de esto, es conveniente tener alguna consideración para el problema de las oleadas durante el diseño del canal, en particular si el tráfico es pesado y si el canal es largo y está controlado por compuertas de gran altura. En esta sección se estudiarán las oleadas debidas a la operación de esclusas. Se excluyen aquellas debidas a las perturbaciones de tráfico porque sólo son importantes para la consideración de los requisitos de potencia de los barcos. Aquéllas debidas a las acciones de las mareas están por fuera del alcance de este libro, porque constituyen un aspecto importante en la hidráulica de mareas. Las oleadas también pueden ocurrir en las cámaras de las esclusas; sin embargo, esto se trata a menudo como un problema especial en el diseño de esclusas [15, pp. 190-213].

Existen varios métodos para controlar las oleadas en canales de navegación, entre los cuales se encuentran los siguientes:

1. Aumentar el tiempo de igualación. En general la altura de la oleada es proporcional a su tasa de caudal e inversamente proporcional al tiempo de igualación de los niveles en la esclusa, y puede reducirse hasta cualquier nivel deseado aumentando de manera apropiada el tiempo de igualación. En un canal existente esto puede hacerse mediante el estrangulamiento de las tomas de entrada, y en un diseño nuevo, mediante la utilización de tomas de entrada de baja capacidad. Este método es simple y poco costoso pero tiene la desventaja de demorar el tráfico.

[5] Para un análisis de oleadas desarrolladas por la apertura parcial o completa de una compuerta de émbolo, *véase* [27].

2. Aumentar las dimensiones del canal. Un aumento en la profundidad del canal incrementará la celeridad y reducirá la altura de la oleada. Un aumento en el ancho del canal disminuirá la altura de la oleada sin cambiar su celeridad. En ambos casos se reducen la velocidad de flujo y por consiguiente el riesgo de choque.

3. Embalses laterales. Éstos se conectan a la esclusa y al canal mediante válvulas de control y se instalan en los lados de aguas arriba y de aguas abajo de la esclusa. Al llenar la esclusa, el agua se toma del embalse de aguas arriba, que después se llena hasta su nivel original tomando lentamente agua del canal de aguas arriba. Al vaciar la esclusa, el agua se lleva al embalse de aguas abajo, que después se desocupa hasta su nivel original liberando de manera gradual el agua al canal de aguas abajo. En esencia el efecto de los embalses laterales es reducir el tiempo de igualación de la esclusa sin desarrollar oleadas severas en el canal.

4. Expansiones del canal. Estas expansiones abruptas se colocan en el canal en los lados de aguas arriba y aguas abajo de la esclusa. Para producir reflexiones negativas, que pueden anular de manera parcial las oleadas viajantes.

Mediante un ejemplo numérico[6], puede ilustrarse el método de análisis de oledadas en canales de navegación en los cuales no pueden tolerarse oleadas de gran altura ni de altas velocidades. Luego, el análisis puede simplificarse bastante en muchos problemas suponiendo que las posibles oleadas son de pequeña altura y el flujo tiene efectos de velocidad insignificantes. Debido a que la generación, la propagación y la reflexión de las oleadas son fenómenos en esencia dinámicos y gravitacionales, éstas también pueden estudiarse mediante pruebas en modelos basados en la ley de Froude.

Ejemplo 19-6. Se produce una oleada en un canal de navegación causada por el vaciado de la cámara de una esclusa. En la figura 19-13*a* se muestra el caudal de salida de la cámara en función del tiempo. El tiempo de igualación es 10 minutos. El canal tiene una sección rectangular de 200 pies de ancho y una profundidad media del agua de 15 pies. Se supone que la pendiente del canal es horizontal. Determine el perfil de la oleada.

Solución. El cálculo para la determinación del perfil de la oleada se muestra en la tabla 19-1. En el análisis se supone que el caudal se libera en intervalos de tiempo, en los cuales se produce una oleada de pequeña altura que viajará hacia aguas abajo con una velocidad calculada mediante las ecuaciones deducidas en las secciones anteriores. De este modo, la configuración de la oleada resultante se debe a la acumulación de los frentes de las oleadas incrementales. Las columnas de la tabla se explican como sigue:

Columna 1. Tiempo en segundos desde que empieza el caudal. El intervalo de tiempo se determina arbitrariamente. Para una determinación más aproximada debe utilizarse un intervalo pequeño.

Columna 2. Caudal en pies^3/s por pie de ancho del canal, igual al caudal total que se muestra mediante el hidrograma (figura 19-13*a*) en el tiempo correspondiente dividido por 200 pies.

Columna 3. Velocidad inicial del flujo en pies/s antes de que la oleada incremental llegue, igual a V_2 (columna 4) para el paso previo.

[6] El U. S. Army Corps of Engineers [28], utiliza métodos similares con aproximaciones adicionales.

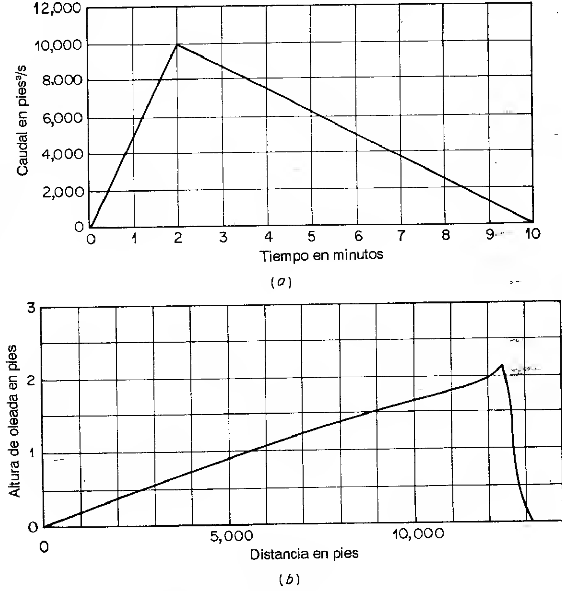


Figura 19-13. Análisis de una oleada en un canal de navegación. (*a*) Hidrograma; (*b*) perfil de la oleada.

Columna 4. Velocidad final del flujo en pies/s después de que pasa la oleada incremental, igual al valor del caudal de la columna 2 dividido por la profundidad final y_2 (columna 7) del paso anterior. Esto es una aproximación, debido a que y_2 de la oleada incremental en consideración es desconocida.

Columna 5. Profundidad inicial en pies, igual a la profundidad final y_2 del paso previo.

Columna 6. Altura en pies de la oleada incremental, calculada mediante la ecuación (19-19) o

$$h = \frac{c}{g}(V_2 - V_1) \qquad (19\text{-}63)$$

Como una aproximación, puede utilizarse el valor de c (columna 8) del paso previo. Después de $t = 150$ s, V_1 se vuelve menor que V_2; es decir, ocurre la oleada incremental negativa. Luego el valor de h calculado es negativo.

Columna 7. Profundidad final del flujo en pies, igual a la profundidad inicial de la columna 5 más la altura de la oleda incremental de la columna 6.

Columna 8. Celeridad en pies/s, calculada mediante la ecuación (19-9).

Columna 9. Velocidad absoluta de la oleada en pies/s, calculada mediante la ecuación (19-16).

Columna 10. Valor acumulado de la altura de la oleada incremental (columna 6).

Columna 11. Tiempo de tránsito en segundos hasta que el caudal se detiene, igual al tiempo de igualación (600 s) menos el tiempo de la columna 1 desde que se inició el caudal.

Columna 12. Distancia de tránsito en pies para cada oleada incremental hasta que el caudal se detiene, igual al producto del tiempo de la columna 11 por la velocidad absoluta de la columna 9.

Al graficar la distancia de tránsito contra la altura acumulada de las oleadas incrementales, en la figura 19-13*b* se muestra la configuración completa de la oleada. Éste es el perfil de la oleada en el canal de aguas abajo después de un periodo igual al tiempo de igualación. La altura máxima de la oleada es alrededor de 2 pies, que por lo general se requiere para el diseño del borde libre y la presión del agua contra las paredes del canal. Esta altura al final del tiempo de igualación debe ser cero. El valor calculado de −0.01 se debe a la aproximación del procedimiento de cálculo utilizado.

Tabla 19-1. Cálculo del perfil de oleada en un canal de navegación.

T	q	V_1	V_2	y_1	h	y_2	c	V_w	Σh	t	L
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
0	0	0	0	15.00	0	15.00	22.0	22.0	0	600	13,200
30	12.5	0	0.83	15.00	0.57	15.57	22.4	22.4	0.57	570	12,800
60	25.0	0.83	1.60	15.57	0.54	16.11	22.8	23.6	1.11	540	12,700
90	37.5	1.60	2.33	16.11	0.52	16.63	23.2	24.8	1.63	510	12,600
120	50.0	2.33	3.01	16.63	0.49	17.12	23.5	25.8	2.12	480	12,400
150	46.9	3.01	2.74	17.12	−0.20	16.92	23.3	26.3	1.92	450	11,800
180	43.8	2.74	2.59	16.92	−0.11	16.81	23.3	26.0	1.81	420	10,900
210	40.6	2.59	2.42	16.81	−0.12	16.69	23.2	25.8	1.69	390	10,100
240	37.5	2.42	2.24	16.69	−0.13	16.56	23.1	25.5	1.56	360	9,200
270	34.4	2.24	2.08	16.56	−0.11	16.45	23.0	25.2	1.45	330	8,300
300	31.3	2.08	1.90	16.45	−0.13	16.32	22.9	25.0	1.32	300	7,500
330	28.1	1.90	1.72	16.32	−0.13	16.19	22.8	24.7	1.19	270	6,700
360	25.0	1.72	1.55	16.19	−0.12	16.07	22.8	24.5	1.07	240	5,900
420	18.8	1.55	1.17	16.07	−0.27	15.80	22.6	24.2	0.80	180	4,400
480	12.5	1.17	0.79	15.80	−0.27	15.53	22.4	23.6	0.53	120	2,800
540	6.3	0.79	0.41	15.53	−0.26	15.27	22.0	22.8	0.27	60	1,400
600	0	0.41	0	15.17	−0.28	14.99	0	0	−0.01	0	0

19-7. Oleadas a través de transiciones en canales. Cuando una oleada llega a una transición en un canal, a menudo se divide en dos oleadas componentes, una que viaja hacia adelante y la otra hacia atrás. Un caso común de una oleada positiva que pasa a través de la contracción de un canal se describió en la sección 19-3*C*. Sin embargo, en esta sección se presentan unos casos más generales pero más simplificados.

La figura 19-14 muestra cuatro casos para los cuales oleadas positivas y negativas pasan a través de contracciones y expansiones de un canal. En cada caso la oleada que llega de altura h_1 y celeridad c_1 se dividide en una oleada hacia adelante de altura h_2 y celeridad c_2 y una oleada reflejada o hacia atrás de altura h_3 y celeridad c_3. Para efectos de simplicidad, se supone que las oleadas tienen pequeña altura, de

manera que puedan escribirse ecuaciones simplificadas. Además se supone que el agua se encuentra inicialmente en reposo y que no ocurren pérdidas de energía en la transición.

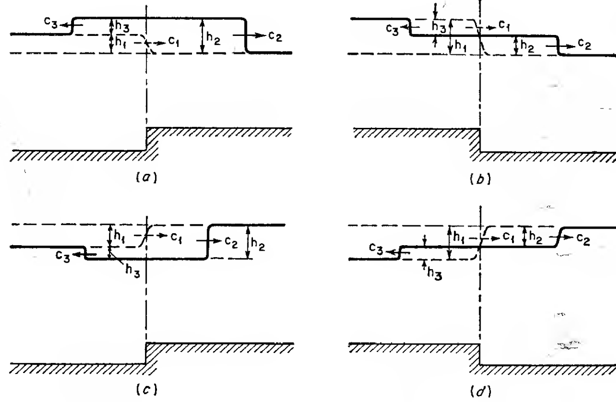


Figura 19-14. Oleada a través de transiciones de canal. (*a*) Oleada positiva a través de una contracción; (*b*) oleada positiva a través de una ampliación; (*c*) oleada negativa a través de una contracción; (*d*) oleada negativa a través de una ampliación.

Mediante continuidad del flujo, la cantidad total de agua que pasa a través de la transición debe ser constante. Por consiguiente,

$$T_1 h_1 c_1 = T_2 h_2 c_2 + T_3 h_3 c_3 \tag{19-64}$$

donde T_1, T_2 y T_3 son los anchos superficiales de las oleadas.

Mediante el principio de la conservación de energía la cantidad total de energía permanece igual después de que la oleada que llega se divide. Con la ayuda de la ecuación (19-50) puede escribirse la relación de energías entre las oleadas durante un intervalo de tiempo común, como

$$h_1^2 T_1 c_1 = h_2^2 T_2 c_2 + h_3^2 T_3 c_3 \tag{19-65}$$

Para el caso de una oleada positiva que pasa a través de una contracción (figura 19-14*a*), $c_1 \approx c_3$ y $T_1 = T_3$. Luego las ecuaciones (19-64) y (19-65) se convierten en

$$T_1(h_1 - h_3)c_1 = T_2 h_2 c_2 \tag{19-66}$$

$$T_1(h_1^2 - h_3^2)c_1 = T_2 h_2^2 c_2 \tag{19-67}$$

A partir de las ecuaciones (19-66) y (19-67) o mediante geometría,

$$h_1 + h_3 = h_2 \tag{19-68}$$

Al resolver las ecuaciones (19-66) y (19-68) para h_2 y h_3,

$$h_2 = \frac{2T_1c_1}{T_1c_1 + T_2c_2} h_1 \tag{19-69}$$

y

$$h_3 = \frac{T_1c_1 - T_2c_2}{T_1c_1 + T_2c_2} h_1 \tag{19-70}$$

La relación entre la altura reflejada y la altura inicial de la oleada se conoce como *coeficiente de reflexión* C_r. Al hacer $T_2 = nT_1$ y utilizar la ecuación (19-70),

$$C_r = \frac{h_3}{h_1} = \frac{c_1 - nc_2}{c_1 + nc_2} \tag{19-71}$$

Como una aproximación adicional, $c_1 \approx c_2$; luego

$$C_r = \frac{1-n}{1+n} \tag{19-72}$$

La relación entre n y C se muestra debajo:

Relación de ancho	Coeficiente de reflexión	Reflexión	Condición del canal
$n = 0$	$C_r = 1$	Positiva	Una barrera de extremo muerto
$n < 1$	$C_r > 0$	Parcial positiva	Contracción
$n = 1$	$C_r = 0$	Ninguna	Sin transición
$n > 1$	$C_r < 0$	Parcial negativa	Expansión
$n = \infty$	$C_r = -1$	Negativa	Entrada a un lago o al mar

En el caso de una reflexión positiva, una oleada positiva y otra negativa se reflejan como tales. En el caso de una reflexión negativa, una oleada positiva se refleja como una negativa, y viceversa.

Ejemplo 19-7. En un canal de navegación se construyen canales de maniobras entre las esclusas y los canales en sí para dar un acomodo adecuado al tráfico (figura 19-15). La profundidad del agua en el canal de maniobras de aguas abajo y en el canal en sí es 9 pies, y los anchos son 300 pies y 150 pies, respectivamente. Determine la condición aproximada del flujo cuando una oleada, producida por la descarga súbita de 1,800 pies³/s de agua desde la esclusa, llega a la transición entre el canal de maniobras y el canal en sí.

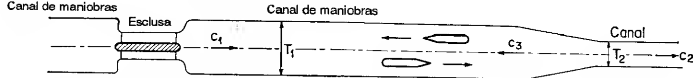


Figura 19-15. Análisis de una oleada a través de la transición entre un canal de maniobras y un canal en sí (*según J. Kozeny* [31]).

Solución. La oleada inicial tiene una celeridad aproximadamente igual a $c_1 = \sqrt{9g} = 17.0$ pies/s y una altura $h_1 = \Delta Q_1/c_1T_1 = 1{,}800/(17.0 \times 300) = 0.353$ pies. La celeridad en el canal es casi igual a c_1, debido a que su profundidad es igual a la del canal de maniobras. Mediante la ecuación (19-69),

$$h_2 = \frac{2T_1c_1}{T_1c_1 + T_2c_2} h_1 = \frac{2 \times 300}{300 + 150} \times 0.353 = 0.471 \text{ pies}$$

Luego, $h_3 = h_2 - h_1 = 0.118$ pies. El coeficiente de reflexión es $0.118/0.353 = 0.334$. Mediante la ecuación (19-71), $C_r = 0.333$.

El caudal que entra al canal es $\Delta Q_2 = c_2T_2h_2 = 17.0 \times 150 \times 0.471 = 1{,}200$ pies³/s. El caudal reflejado es $\Delta Q_3 = 1{,}800 - 1{,}200 = 600$ pies³/s.

Ahora, si la transición entre el canal y la esclusa se supone gradual, como se muestra en la figura 19-15, el cálculo puede realizarse haciendo que $h_2 = h_1 + dh_1$ y $c_2T_2 = c_1T_1 + d(c_1T_1)$. De acuerdo con esto, la ecuación (19-69) puede escribirse como

$$\frac{dh_1}{h_1} = -\frac{d(c_1T_1)}{2c_1T_1 + d(c_1T_1)} \approx -\frac{d(c_1T_1)}{2c_1T_1} \tag{19-73}$$

Al integrar y simplificar la ecuación anterior,

$$\log\left(h_1\sqrt{c_1T_1}\right) = \text{const.} \tag{19-74}$$

Del mismo modo, puede demostrarse que

$$\log\left(h_2\sqrt{c_2T_2}\right) = \text{const.} \tag{19-75}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{c_1T_1}{c_2T_2}} \approx \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \tag{19-76}$$

Con $T_1/T_2 = 2$, la ecuación anterior da $h_2/h_1 = 1.414$. Luego $h_2 = 1.414h_1 = 0.499$ pies y $h_3 = 0.146$ pies. El correspondiente $C_r = 0.413$, $\Delta Q_2 = 1{,}270$ pies³/s y $\Delta Q_3 = 530$ pies³/s.

Este ejemplo ilustra la aplicación de la teoría de oleadas al estudio hidráulico de una esclusa y un canal de maniobras. Estas aplicaciones las describieron muchos ingenieros hidráulicos, entre quienes se encuentran Dantscher [29, 30] y Koženy [31].

19-8. Oleadas en confluencias de canales. Cuando una oleada llega a una confluencia de canales se divide en varias oleadas, y cada una entra a uno de los canales conectados. Para explicar el fenómeno puede utilizarse un caso simple, como el que se muestra en la figura 19-16.

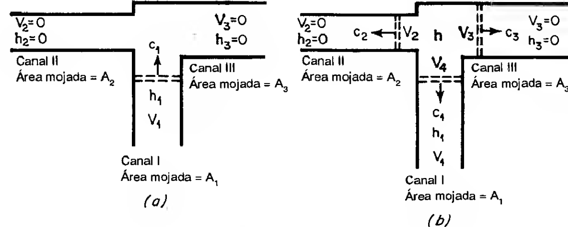


Figura 19-16. Oleada en una confluencia de canales. (*a*) Antes del arribo de la oleada; (*b*) después del arribo de la oleada.

La figura 19-16*a* muestra que una oleada en el canal I se aproxima a la confluencia de tres canales rectangulares y tiene una altura h_1 y una celeridad c_1. El canal I tiene un área mojada A_1 y una profundidad de flujo y_1. Como no existen oleadas en los canales II y III, $h_2 = h_3 = 0$. Las velocidades iniciales de los canales se toman iguales a cero sobre todo para propósitos de simplificación, a pesar de que pueden suponerse diferentes velocidades.

Cuando la oleada que llega alcanza la confluencia su altura se reduce debido al incremento del área superficial que encuentra la oleada en los dos canales adicionales. Oleadas de altura reducida h viajarán a través de los dos canales adicionales con celeridades c_2 y c_3, respectivamente. Al suponer que las alturas de oleada son pequeñas con relación a la profundidad del agua en los canales, las celeridades pueden calcularse mediante la ecuación (18-46). Entre tanto, una oleada reflejada viajará a lo largo del canal I con una celeridad casi igual a c_1. La figura 19-16*b* muestra la condición en la confluencia inmediatamente después del arribo de la oleada entrante.

Como se supone que las alturas de oleadas son pequeñas comparadas con las profundidades de flujo, pueden aplicarse las ecuaciones (19-19) y (19-24). Entonces pueden escribirse las siguientes ecuaciones para los canales I, II y III, respectivamente:

Para el canal I $$h_1 - h = \frac{c_1}{g}(V_4 - V_1) \qquad (19\text{-}77)$$

Para el canal I $$h_1 = \frac{c_1}{g} V_1 \qquad (19\text{-}78)$$

Para el canal II $$h = \frac{c_2}{g} V_2 \qquad (19\text{-}79)$$

Para el canal III $$h = \frac{c_3}{g} V_3 \qquad (19\text{-}80)$$

Mediante la ley de la continuidad de flujo, se requiere que la cantidad de agua que fluye hacia adentro de la confluencia sea igual a la que fluye hacia afuera de la misma, o

$$A_1 V_4 = A_2 V_2 + A_3 V_3 \qquad (19\text{-}81)[7]$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones anteriores para h,

$$h = \frac{2h_1 A_1}{I c_1} \qquad (19\text{-}82)$$

donde $$I = \frac{A_1}{c_1} + \frac{A_2}{c_2} + \frac{A_3}{c_3} \qquad (19\text{-}83)$$

[7] V_4 tiene una dirección opuesta a c_1.

Si una oleada entrante de altura h_2 se aproxima a la confluencia desde el canal II, entonces puede demostrarse que

$$h = \frac{2h_2 A_2}{I c_2} \qquad (19\text{-}84)$$

De la misma manera, si una oleada entrante de altura h_3 se aproxima a la confluencia desde el canal III, entonces

$$h = \frac{2h_3 A_3}{I c_3} \qquad (19\text{-}85)$$

Mediante el principio anterior es posible analizar oleadas en una red complicada de canales. Tal método la desarrolló Swain [32, 33] para una determinación aproximada de los flujos de oleadas en un sistema interconectado de canales de estuario como respuesta a variaciones en la marea. En este método se supone que la barrera de fricción se localiza en la mitad de un tramo del canal, y que las oleadas tienen alturas pequeñas comparadas con la profundidad de flujo, de manera que puedan aplicarse ecuaciones simplificadas. Para acelerar el cálculo, es necesario tener un arribo coincidencial de oleadas en una barrera o confluencia en un instante determinado. Esto es posible mediante el uso de un procedimiento que involucre una modificación de la longitud real de los tramos del canal. El método analítico desarrollado por Swain en realidad se aplicó a un problema para la determinación de flujos en canales de estuarios interconectados en el área del delta de la bahía Suisun, en California del Este. El U. S. Bureau of Reclamation estudió el mismo problema utilizando un modelo hidráulico elaborado [34-36] y un modelo de analogía electrónica [37]. De esta manera se verificaron satisfactoriamente los resultados del método de Swain.

19-9. Flujo pulsante. Cuando la pendiente de un canal se vuelve muy empinada, el flujo supercrítico con profundidad uniforme en el canal se romperá en un tren de ondas viajantes o pulsos, conocido como *flujo pulsante*. Tal flujo no permanente ocurre en diferentes situaciones y cada una de éstas tiene un significado específico. Cuando ocurre en rápidas empinadas y en vertederos, el aumento en la altura del flujo requiere bordes libres adicionales para prevenir derrames, y la masa concentrada en los frentes de onda necesita factores de seguridad estructurales adicionales para prevenir las presiones y los esfuerzos transientes. En modelos hidráulicos la presencia de este flujo a menudo interfiere con las condiciones de similaridad. En tierras de cultivo y caminos no estabilizados, la alta capacidad de socavación del flujo causa erosiones superficiales. En procesos químicos, el efecto del flujo incrementará la tasa de transferencia de masas entre gas y líquido en reacciones de difusión.

Existen numerosos estudios del fenómeno de flujo pulsante. Sin embargo, la mayor parte de ellos se hicieron primordialmente en conexión con el mecanismo de la inestabilidad del flujo (sección 8-8). Thomas [38] realizó un estudio analítico y experimental de flujo pulsante de mucho interés para los ingenieros hidráulicos, en el cual establece que este flujo consta de dos partes: una sección de altura brusca y turbulenta y una sección suave. Los resultados del estudio indican que para que el

flujo pulsante ocurra en un canal rectangular ancho, la pendiente del canal debe ser mayor que cuatro veces la pendiente crítica o que la velocidad de flujo sea mayor que dos veces la velocidad crítica. Otra investigación, realizada por Mayer [39], encontró que el flujo pulsante puede clasificarse en dos tipos diferentes, conocidos como ondas de remolino y flujo ondulante.

De acuerdo con Mayer, las *ondas de remolino* se caracterizan por risos transversales de alta vorticidad. Las regiones entre las crestas son tranquilas. Las ondas se inician mediante perturbaciones finitas al igual que infinitesimales en la capa límite laminar. El proceso puede ser acelerado por causas externas, como la adición del agua por lluvia o por la liberación de burbujas de aire en el embalse de aguas arriba aumentando la rugosidad de la entrada del canal o el contacto de la superficie de flujo con corrientes de aire perturbadoras. Sin embargo, para que las ondas de remolino se formen, la velocidad superficial del flujo no perturbado debe ser menor que la velocidad de onda, y la pendiente del canal debe ser supercrítica. Este requerimento asegurará el rompimiento de las ondas en sus extremos de aguas abajo y por consiguiente permitirá un aumento de la pendiente hacia adelante de la configuración de onda y un aumento subsecuente de los efectos de capilaridad. Este proceso es el principal responsable de la formación de las ondas de remolino. En el experimento de Mayer no se observaron ondas de remolino en pendientes menores que el 3% y en ningún caso el número de Reynolds fue superior a 420.

El *flujo ondulante* se caracteriza por oleadas de bordes turbulentos que tienen crestas separadas por regiones altamente agitadas. En canales de modelos, éstas se originan aleatoriamente en las paredes laterales y en el canal como pequeños paquetes de turbulencia, los cuales exhiben características similares a las de los resaltos hidráulicos móviles. Éstos son el resultado de la transición de flujo supercrítico laminar a subcrítico turbulento. Para que se forme el flujo ondulante la velocidad superficial debe ser mayor que la velocidad de onda. Esto asegurará el empinamiento y el rompimiento de las ondas en sus extremos de aguas arriba y originará resaltos hidráulicos móviles. En el experimento de Mayer no se formó flujo ondulante en pendientes menores cercanas al 2%. El rango del número de Reynolds para flujos ondulantes fue aproximadamente de 1,000 a 4,000. Para números de Reynolds mayores que 4,000 el flujo fue turbulento, en su totalidad.

Al considerar una distribución de velocidades parabólica para el flujo uniforme en un canal inclinado, la velocidad superficial dada por la ecuación (6-42) para $y = y_m$ es $gSy_m^2/2\nu$. La velocidad promedio del flujo está dada por la ecuación (6-43) o $V = gSy_m^2/3\nu$. Por consiguiente, la velocidad superficial es igual a 1.5 veces la velocidad promedio, o $1.5V$.

Según la descripción anterior, una onda de remolino puede formarse cuando la velocidad superficial no es mayor que la velocidad de onda absoluta, es decir, cuando

$$1.5V \leqq V + c \tag{19-86}$$

o

$$V/c \leqq 2 \tag{19-87}$$

Como V/c es igual al número de Froude y debido a que las ondas de remolino pueden formarse sólo en pendientes supercríticas, el rango del número de Froude

para la formación de ondas de remolino es $1 \leqq \mathbf{F} \leqq 2$. Al resolver la ecuación (6-43) para S puede demostrarse que $S = 3\mathbf{F}^2/\mathbf{R}$. Luego el rango de la pendiente para la formación de ondas de remolino es $3/\mathbf{R} \leqq S \leqq 12/\mathbf{R}$.

El flujo ondulante puede formarse cuando la velocidad superficial es mayor que la velocidad de onda. Por consiguiente, en teoría la formación del flujo pulsante ocurrirá cuando $\mathbf{F} > 2$ y $S > 12/\mathbf{R}$.

PROBLEMAS

19-1. Pruebe la ecuación (19-11).

19-2. Pruebe la ecuación (19-15).

19-3. Suponiendo que la pérdida de energía en el resalto hidráulico móvil es insignificante, Koch y Carstanjen [27] dedujeron la siguiente ecuación para la velocidad de onda de una oleada:

$$V_w = \sqrt{\left(\frac{V_1 - V_2}{4}\right)^2 + gy_1} \pm \frac{V_1 + 3V_2}{4} \tag{19-88}$$

donde el signo positivo corresponde a las oleadas tipo A y C y el tipo negativo a las oleadas B y D (figura 19-2). Verifique esta ecuación.

19-4. Suponiendo una profundidad inicial de 20 pies, una velocidad inicial de 15 pies/s y una sección transversal rectangular, calcule la velocidad y el rebase de la oleada mostrada en la figura 19-3 y estime la distancia recorrida por la oleada en 7 minutos.

19-5. Calcule las alturas, profundidades y velocidades de onda para las dos oleadas componentes producidas en el ejemplo 19-3.

19-6. Una oleada positiva de 0.63 pies de altura y 51.72 pies de profundidad se mueve en agua tranquila con 51.09 pies de profundidad y una velocidad de 41.70 pies/s hacia el extremo muerto de un canal. Determine la altura y la velocidad de onda de la oleada reflejada después de que la oleada original choca con el extremo muerto.

19-7. Resuelva el ejemplo 19-1 si el flujo permanente original tiene una velocidad de 10 pies/s y una profundidad de 50 pies.

19-8. Resuelva el ejemplo 19-3 si el obstáculo tiene una altura de $F = 3$ pies.

19-9. Dos oleadas positivas de 3 y 2 pies de altura, respectivamente, se mueven en direcciones opuestas una hacia la otra en un canal horizontal sin fricción donde el agua está inicialmente estacionaria con una profundidad de 30 pies. La velocidad de onda es de 30 pies/s para la oleada alta, y de 20 pies/s para la oleada baja. Determine la condición de flujo después de que las oleadas se encuentran.

19-10. Resuelva el ejemplo 19-1 si el canal tiene una pendiente de 0.01. El flujo permanente inicial se supone uniforme.

19-11. Demuestre que la fórmula de celeridad en la forma de la ecuación (18-45) se aplica sólo a oleadas positivas, y que la correspondiente para oleadas negativas es

$$c = \sqrt{gy\left(1 - \frac{3h}{2y}\right)} \tag{19-89}$$

19-12. Con referencia al ejemplo 19-5, demuestre que la velocidad en la cresta $V_{w2} = \sqrt{g y_2}$, que la velocidad en el punto bajo $V_{w1} = 2\sqrt{g y_2}$, que a través del sitio de presa la velocidad de flujo es $\frac{2}{3}\sqrt{g y_2}$ y el caudal es $\frac{8}{27}\sqrt{g}\, y_2^{3/2}$.

19-13. Continúe el cálculo del ejemplo ilustrado en la figura 19-12 y determine las condiciones de flujo a los 420, 504, 552, 743 y 767 segundos, respectivamente, después de que la carga se cortó de manera brusca.

19-14. Resuelva el ejemplo 19-6 si el tiempo de igualación es: *a*) 8 minutos y *b*) 12 minutos. El caudal a través de la esclusa se incrementa linealmente desde 0 hasta 10,000 pies³/s para el

primer 20% del tiempo, y de ahí en adelante disminuye linealmente hasta 0. Estudie el efecto por el cambio en el tiempo de igualación.

19-15. Resuelva el ejemplo 19-7 si el caudal es 1,000 pies³/s.

19-16. Tres canales horizontales sin fricción de 4, 6 y 8 pies de ancho respectivamente se encuentran en una confluencia. El agua en los canales tiene una profundidad estacionaria inicial de 10 pies. Cuando una oleada que llega de 0.4 pies de altura se aproxima a la confluencia desde el canal más angosto, determine la condición del flujo después de que la oleada entra en la confluencia y calcule el coeficiente de reflexión en ella.

REFERENCIAS

1. J. C. Schönfeld, "Theoretical considerations on an experimental bore", *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association for Hydraulic Research, The Hague 1955*, Vol. 1, 1955, pp. A15-1 a A15-12.
2. T. B. Benjamin y M. J. Lighthill, "On cnoidal waves and bores", *Proceedings, Royal Society of London*, Vol. 224, Nº 1159, julio 22 de 1954, pp. 448-460.
3. A. M. Binnie y J. C. Orkney, "Experiments on flow of water from a reservoir through an open horizontal channel, II: The formation of hydraulic jump", *Proceedings, Royal Society of London*, Ser. A, Vol. 230, Nº 1181, junio 21 de 1955, pp. 237-246.
4. J. A. Sandover y O. C. Zienkiewicz, "Experiments on surge waves", *Water Power*, Vol. 9, Nº 11, London, noviembre, 1957, pp. 418-424.
5. Robert E. Horton, "Channel waves subject chiefly to momentum control", *U. S. Soil Conservation Service, SCS-TP-16*, mayo de 1938.
6. "The Johnstown disaster", *Engineering News*, Vol. 21, Nº 23, junio 8 de 1889, pp. 517-518.
7. A. L. A. Himmelwright, "The Johnstown flood", *Harper's Magazine*, Vol. 167, septiembre de 1933, pp. 443-455.
8. Richard O'Connor, *Johnstown: The Day the Dam Broke*, J. B. Lippincott Company, Philadelphia, 1957.
9. "The Heppner disaster", *Engineering News*, Vol. 50, Nº 3, julio 16 de 1903, pp. 53-54.
10. "Commission finds failure of St. Francis Dam due to defective foundation", *Engineering News-Record*, Vol. 100, Nº 14, abril 5 de 1928, pp. 553-555.
11. M. D. Chertousov, *Gidravlika, Spetsialnyĭ Kurs* (*Hydraulics, Special Course*), Gosenergoizdat, Moscow, 1957, pp. 437-453.
12. A. Schoklitsch, "Über Dambruchwellen" ("On waves produced by broken dams"), *Sitzungsberichte, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Akademie der Wissenschaften in Wien*, Vol. 126, Parte IIa, Vienna, 1917, pp. 1489-1514.
13. E. T. Haws, "Surges and waves in open channels", *Water Power*, Vol. 6, Nº 11, noviembre de 1954, pp. 419-422.
14. R. D. Johnson, "The correlation of momentum and energy changes in steady flow with varying velocity and the application of the former to problems of unsteady flow or surges in open channels", *Hydro-Electric Conference, 1922, Engineers and Engineering, The Engineers Club of Philadelphia*, julio de 1922, pp. 234-240.
15. George R. Rich, *Hydraulic Transients*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951, pp. 217-224.
16. Charles Jaeger, *Engineering Fluid Mechanics*, traducido del alemán por P. O. Wolf, Blackie & Son, Ltd., London y Glasgow, 1956, pp. 381-392.
17. G. Bata, "Utilisation des valeurs réduites dans le domaine des régimes transitoires des canaux ouverts et leur application dans le cas des galeries utilisées en reservoirs d'éclusées" ("Use of reduced values in the translatory regions of open channels and their application in the case of tunnels used as storage reservoirs"), *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association for Hydraulic Research, The Hague 1955*, 1955, pp. D8-1 a D8-10.

18. Carlo Drioli, "Esperienze sul moto perturbato nei canali industriali" ("Experiment on surge in industrial canals"), *L'Energia elettrica*, Vol. 14, Nº 4, parte I, Milano, abril de 1939, pp. 285-311; Nº 5, parte. II, mayo de 1937, pp. 382-402.
19. Martin Schmidt, "Zur Frage des Abflusses über Streichwehre" ("Discharge over side weir"), *Technische Universität Berlin-Charlottenburg, Institut für Wasserbau, Mitteilung 41*, 1954.
20. Duilio Citrini, "Sull'attenuazione di un'onda positiva ad opera di une sfioratore laterale" ("On the damping of a positive wave effected by a side weir"), *L'Energia elettrica*, Vol. 26, Nº 10, Milano, octubre de 1949, pp. 589-599; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 76*, 1949.
21. Duilio Citrini, "Sull'efficacia di uno sfioratore laterale nelle manovre di arresto completo" ("On the effectiveness of a side weir in the unsteady motion following full rejection of load"), *L'Energia elettrica*, Vol. 27, Nº 2, Milano, febrero de 1950, pp. 77-80; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 79*, 1950.
22. B. Gentilini, "L'azione di uno sfioratore laterale sull'onda positiva ascendente in un canale" ("The effect of a side weir on a positive ascending wave in a canal"), *L'Energia elettrica*, Vol. 27, Nº 1, Milano, pp. 1-10; enero de 1950; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 78*, 1950.
23. Savio Penati, "Azione di uno sfioratore a ventola sull'onda positiva provocata dall'arresto delle macchine nel canale adduttore di un impiante idroelettrico" ("On the action of a side weir, controlled by a tilting gate, upon the positive translation wave generated in the canal of a power plant by the sudden closing of the turbines"), *L'Energia elettrica*, Vol. 31, Nº 10, Milano, octubre de 1954, pp. 733-741; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 115*, 1954. On new model tests for the Tornavento Power Plant.
24. Giulio De Marchi, "Action of side weirs and tilting gates on translation waves in canals", *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Conference, Joint Meeting of International Association for Hydraulic Research and Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, agosto de 1953, pp. 537-545; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 104*, 1953.
25. Giulio De Marchi, "Azione di une sfioratore a ventola sull'onda positiva provocata dall'arresto delle macchine nel canale adduttore di un impianto idroelettrico" ("On the action of a side weir, controlled by a tilting gate, upon the positive translation wave generated in the canal of a power plant by the sudden closing of the turbines"), *L'Energia elettrica*, Vol. 30, Nº 12, Milano, diciembre de 1953, pp. 12-20; reimpreso como *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Milano, Memorie e studi Nº 110*, 1953. On model tests for the Tornavento power plant.
26. Josef Frank, *Nichtstationäre Vorgänge in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftwerken* (*Unsteady Flow in Headraces and Tailraces of Hydropower Plants*), Springer-Verlag, Berlin, junio de 1957.
27. Alexander Koch y Max Carstanjen, *Von der Bewegung des Wassers und dabei auftretenden Kräften* (*Movement of Water and Associated Forces*), Springer-Verlag, Berlin, 1926, pp. 132-150.
28. U. S. Army Corps of Engineers, "Hydraulic design: Surges in canals", Civil Works Construction, Engineering Manual, parte CXVI, capítulo 6, marzo de 1949, pp. 13.
29. Kasper Dantscher, "Wanderwellen in Schiffahrtskanälen" ("Traveling waves in navigation canals"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 35, Nº 7, Munich, julio 15 de 1940, pp. 145-147.
30. Kasper Dantscher, "Die Wanderwelle in Schiffahrtskanal" ("The traveling wave in a navigation canal"), *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 35, Nº 10, Munich, octubre 15 de 1940, pp. 226-229.
31. Josef Koženy, *Hydraulik* (*Hydraulics*), Springer-Verlag, Vienna, 1953, pp. 263-265.
32. Francis E. Swain, "Determination of flows in interconnected estuarine channels", *U.S. Bureau of Reclamation, Technical Memorandum 640*, febrero de 1951.
33. Francis E. Swain, "Determination of flows in interconnected estuarine channels produced by the combined effects of tidal fluctuations and gravity flows", *Transactions*, Vol. 32, Nº 5, *American Geophysical Union*, octubre de 1951, pp. 653-672.

34. D. J. Hebert y F. C. Lowe, "Progress report on model studies of the Sacramento-San Joaquin Delta, Central Valley Project, California", *U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-142*, abril 10 de 1944.
35. D. J. Hebert y J. E. Warnock, "Skeleton outline of a plan for developing the Delta-Mendota Irrigation Water Supply and Salt-Water Repulsion in the Sacramento-San Joaquin Delta Region, Central Valley Project", *U. S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-145*, julio 10 de 1944.
36. "Cherry Creek Dam y Reservoir: Report of model studies, spillway and stilling basin", *Hydraulic Laboratory Report Nº Hyd-146*, preparado por el U.S. Burcau of Reclamation para el U. S. Army Corps of Engineers, julio de 1944.
37. R. E. Glover, D. J. Hebert, y C. R. Daum, "Application of an hydraulic problem", en el simposio "Electrical analogies and electronic computers", *Transactions*, Vol. 118, American Society of Civil Engineers, 1953, pp. 1010-1016.
38. Harold A. Thomas, "The propagation of waves in steep prismatic conduits", *Proceedings of Hydraulic Conference, State University of Iowa, Studies in Engineering, Bulletin 20*, marzo de 1940, pp. 214-229.
39. Paul G. H. Mayer, "A study of roll waves and slug flows in inclined open channels", doctoral thesis, Cornell University, Ithaca, N.Y., septiembre de 1957.

CAPÍTULO 20

TRÁNSITO DE CRECIENTES

20-1. Tránsito de una creciente. Puede suponerse que la configuración de una onda de creciente que se desplaza a lo largo de un tramo de canal regular y corto, donde la resistencia es relativamente baja, permanecerá invariable. El movimiento de la creciente puede tratarse como un flujo uniformemente progresivo, como se estudió en el capítulo 18. Sin embargo, si el canal es irregular y la resistencia es alta, la configuración de la onda se modificará de manera significativa a medida que se mueve a lo largo del tramo. La determinación de esta modificación de la creciente se conoce como ***tránsito de crecientes***.

Como se describió en la sección 18-7, Thomas estableció dos métodos hidráulicos para la solución de las ecuaciones de flujo no permanente que pueden utilizarse para propósitos de tránsito de crecientes. Sin embargo, éstos son muy dispendiosos para aplicaciones reales. En las siguientes dos secciones se describirán métodos más prácticos basados en principios hidráulicos[1].

En ingeniería hidrológica el tránsito de crecientes es una técnica importante necesaria para la solución completa del problema de control de crecientes y para la operación satisfactoria de un servicio de predicción de crecientes. Para tales propósitos, se reconoce el tránsito de crecientes como un procedimiento requerido con el fin de determinar un hidrograma en un punto de una corriente utilizando el hidrograma conocido en un punto aguas arriba. Las máquinas electrónicas modernas* pueden transitar con facilidad una creciente directamente desde sus fuentes. De acuerdo con esto, el significado de tránsito de creciente se ha extendido para incluir

* *Nota del traductor.* En este capítulo se hace referencia a computadores digitales, modernos en la época en que se escribió (1959) pero bastante obsoletos hoy en día. Sin embargo, todo el desarrollo teórico aquí contenido es similar al utilizado en programas y computadores modernos.

[1] Para otros métodos hidráulicos de tránsitos de crecientes, *véanse* [1] a [3].

el tránsito del movimiento del agua desde la lluvia hasta la escorrentía. La técnica de tránsito se aplica tanto a tramos de canal como a embalses. En este último caso, se conoce como *tránsito a través de embalses*. Cuando se utiliza para determinar la creciente combinada en un punto aguas abajo debido a crecientes en varios tributarios aguas arriba y en la corriente principal, la técnica se conoce como *síntesis de crecientes*.

El *método hidráulico* para el tránsito de crecientes se distingue del *método hidrológico* por el hecho de que el primero se basa en la solución de las ecuaciones diferenciales básicas para el flujo no permanente en canales abiertos, en tanto que el segundo no hace uso directo de estas ecuaciones sino de aproximaciones en algún sentido a sus soluciones. En general el método hidrológico es más simple pero falla en dar resultados enteramente satisfactorios en problemas diferentes de aquéllos en los que se determina el progreso de una creciente aguas abajo en un río largo. Por ejemplo, cuando una creciente pasa a través de una confluencia, a menudo se produce un remanso. Cuando una presa regula la creciente, por lo general se involucran oleadas. Los efectos de remanso y de oleadas en estos problemas pueden evaluarse con exactitud sólo mediante las ecuaciones hidráulicas básicas empleadas en el método hidráulico, pero no mediante el método hidrológico.

20-2. Método de las características. Cualquier método hidráulico estricto para el tránsito de crecientes ha demostrado ser en extremo complicado y difícil. Sin embargo, se han desarrollado diferentes métodos simplificados para propósitos prácticos. Muchos de éstos pertenecen al *método general de las características*, que se basa en la solución de un conjunto de ecuaciones características de flujo no permanente. Contribuciones destacadas para el desarrollo de tales métodos las realizaron Massau [4, 5], Henry [6], Bergeron [7, 8], Khristianovich [9], Lévin [10], Craya [11], Arkhangelskiĭ [12], Holsters [13, 14], Stoker [15, 17], Putman [18], Lamoen [19], Dmitriev [20], Escoffier [21], Ransford [22], Lin [23], Uchida [24], Nougaro [25-28], Iwagaki y Sueishi [29-31], Isaacson, Stoker y Troesch [32, 33], y muchos otros. En esta sección se describe el método desarrollado por Lin.

Según Massau, pueden escribirse las siguientes ecuaciones para flujo no permanente:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = S_0 - S_f \qquad (20\text{-}1)$$

$$D\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (20\text{-}2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = dy \qquad (20\text{-}3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial t}dt = dV \qquad (20\text{-}4)$$

En las ecuaciones anteriores $\partial y/\partial x$ es la pendiente de la superficie del agua, $\partial y/\partial t$ es el cambio en la profundidad de flujo con respecto al tiempo, $\partial V/\partial x$ es el cambio de la velocidad con respecto a la distancia, $\partial V/\partial t$ es el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, S_0 es la pendiente del canal, S_f es la pendiente de fricción,

dy es el cambio total de la profundidad, y dV es el cambio total en la velocidad. Nótese que la (20-1) es una ecuación dinámica que representa la (18-13) suponiendo $\alpha = 1$, y que la (20-2) es la ecuación de continuidad idéntica a la (18-5). La ecuación (20-3) indica que el cambio total en la profundidad es igual a la suma de los cambios parciales en la profundidad debidos a la distancia y al tiempo, respectivamente. Del mismo modo, la ecuación (20-4) indica que el cambio total en la velocidad es igual a la suma de los cambios parciales en la velocidad debidos a la distancia y al tiempo, respectivamente.

Al resolver de manera simultánea las cuatro ecuaciones anteriores para $\partial y/\partial x$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-D(S_0 - S_f) + \frac{D}{g}\frac{dV}{dt} - \frac{V}{g}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{g}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}}{\frac{1}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{2V}{g}\frac{dx}{dt} + \frac{V^2}{g} - D} \qquad (20\text{-}5)$$

Puede suponerse que la onda de creciente está compuesta por un gran número de oleadas infinitesimales. La propagación de la onda de creciente puede considerarse como la de las oleadas, que se forman como resultado de perturbaciones creadas por la creciente y cada una tiene un perfil superficial discontinuo. En el punto de discontinuidad la superficie del agua se rompe y la pendiente $\partial y/\partial x$ tiene dos valores. Como las dos pendientes superficiales no tienen ninguna relación definida una con respecto a la otra, el valor de $\partial y/\partial x$ debe ser indeterminado; o matemáticamente, $\partial y/\partial x = 0/0$. Cuando el denominador de la ecuación (20-5) se hace igual a cero,

$$dx = (V \pm c)\,dt \qquad (20\text{-}6)$$

donde $c = \sqrt{gD}$. Para canales anchos, $c = \sqrt{gy}$. Cuando el numerador se hace igual a cero y se utiliza la ecuación (20-6),

$$d(V \pm 2c) = g(S_0 - S_f)\,dt \qquad (20\text{-}7)$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como *ecuaciones características*. El método para deducir estas ecuaciones lo determinó por primera vez Massau [4]. Más tarde, Massau [5] desarrolló un procedimiento de ensayo y error para aplicar estas ecuaciones a problemas de flujo no permanente. Debido a lo dispendioso del proceso, el método no fue muy popular hasta que investigadores posteriores, entre ellos Lin, simplificaron el procedimiento a través de aproximaciones gráficas.

Las ecuaciones características pueden escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} = V + c \qquad (20\text{-}8)$$

$$d(V + 2c) = g(S_0 - S_f)\,dt \qquad (20\text{-}9)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - c \qquad (20\text{-}10)$$

$$d(V - 2c) = g(S_0 - S_f)\,dt \qquad (20\text{-}11)$$

Nótese que las ecuaciones (20-8) y (20-10) son idénticas a la (18-54), y expresan la velocidad de propagación de onda. Estas ecuaciones pueden representarse gráficamente en un plano xt, como se muestra en la figura 20-1. Para un incremento finito de tiempo Δt el punto p representa la posición de la sección del canal en consideración en el tiempo $t + \Delta t$, y los puntos u y d representan, respectivamente, las posiciones de ciertas secciones aguas arriba y aguas abajo en el tiempo t. La velocidad de propagación de onda puede representarse por las pendientes de las líneas construidas en el plano xt. Cuando el flujo es subcrítico[2], como ocurre en la mayor parte de las corrientes, es decir, cuando $V < c$, la pendiente de la línea up, una cantidad positiva, representa $V + c$ en la ecuación (20-8), y la pendiente de la línea dp, una cantidad negativa, representa $V - c$ en la ecuación (20-10). De aquí en adelante estas líneas up y dp se conocerán como *características*. Es evidente que el punto u representa la posición de la sección aguas arriba para la cual una oleada infinitesimal, una vez desarrollada, arribará a la sección p después del intervalo de tiempo Δt. De igual modo, el punto d representa la posición de la sección aguas abajo, desde la cual una oleada una vez desarrollada arribará a la sección p después de Δt.

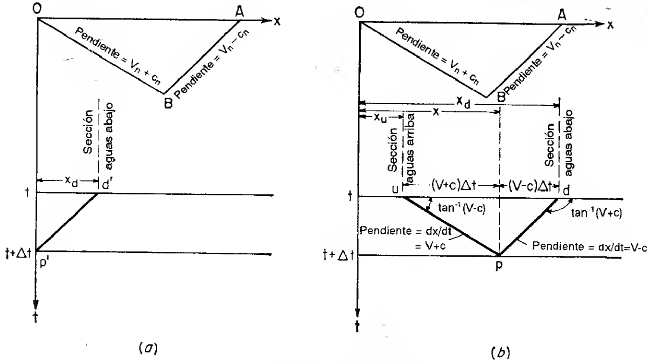


Figura 20-1. Representación gráfica de la propagación de onda en flujo subcrítico. (*a*) Condición de flujo a la entrada; (*b*) condición de flujo en el canal.

Las condiciones de flujo en las secciones de aguas arriba y aguas abajo se identificarán mediante los subíndices u y d, respectivamente. Al integrar la ecuación (20-9) desde t hasta $t + \Delta t$, cuyo intervalo es el tiempo requerido para que la onda viaje desde la sección de aguas arriba hasta la sección en consideración,

[2] En teoría, el método de las características es similarmente aplicable al flujo supercrítico. Sin embargo, la posibilidad de perturbaciones debidas a la formación de ondas estacionarias tendría que considerarse [23].

$$V + 2c = V_u + 2c_u + gS_0\,\Delta t - g\int_t^{t+\Delta t} S_f\,dt \qquad (20\text{-}12)$$

Para un valor pequeño de Δt

$$\int_t^{t+\Delta t} S_f\,dt = \frac{(S_{fu} + S_f)\,\Delta t}{2}$$

Luego la ecuación (20-12) puede escribirse como

$$V + 2c = G_u + K \qquad (20\text{-}13)$$

donde

$$G_u = V_u + 2c_u + K_u \qquad (20\text{-}14)$$

$$K_u = \frac{g(S_0 - S_{fu})\,\Delta t}{2} \qquad (20\text{-}15)$$

y

$$K = \frac{g(S_0 - S_f)\,\Delta t}{2} \qquad (20\text{-}16)$$

De igual modo puede obtenerse la siguiente ecuación integrando la ecuación (20-11) sobre el intervalo de tiempo requerido para que la onda viaje desde la sección aguas abajo hasta la sección en consideración,

$$V - 2c = G_d + K \qquad (20\text{-}17)$$

donde

$$G_d = V_d - 2c_d + K_d \qquad (20\text{-}18)$$

y

$$K_d = \frac{g(S_0 - S_{fd})\,\Delta t}{2} \qquad (20\text{-}19)$$

Al eliminar K de las ecuaciones (20-13) y (20-17) y resolver para c,

$$c = \frac{G_u - G_d}{4} \qquad (20\text{-}20)$$

Esta ecuación puede utilizarse para calcular c en el tiempo $t + \Delta t$ si se dan las condiciones de flujo aguas arriba y aguas abajo en el tiempo t.

Al eliminar c de las ecuaciones (20-13) y (20-17) y resolver para $V - K$,

$$V - K = \frac{G_u + G_d}{2} \qquad (20\text{-}21)$$

o de la ecuación (20-20),

$$V - K = G_d + 2c \qquad (20\text{-}22)$$

Mediante la ecuación de Manning, $S_f = n^2V^2/2.22R^{4/3}$. Al sustituir esta expresión para S_f en la ecuación (20-16) y resolver para V,

$$V = \sqrt{\frac{16.1S_0\,\Delta t - K}{7.25n^2\,\Delta t}}\,R^{2/3} \qquad (20\text{-}23)$$

Por medio de las ecuaciones (20-22) y (20-23) pueden determinarse los valores de V y K.

Sin embargo, la solución para c y V puede simplificarse mediante un procedimiento gráfico. Tomando el canal ancho como ejemplo, $R = y = c^2/g$. Luego la ecuación (20-23) se convierte en

$$V = \sqrt{\frac{16.1S_0\,\Delta t - K}{742n^2\,\Delta t}}\,c^{4/3} \tag{20-24}$$

Las unidades de esta ecuación están expresadas en pies y en segundos. Para unidades en millas y en horas, la ecuación se convierte en

$$V = \sqrt{\frac{39{,}500S_0\,\Delta t - K}{1{,}410{,}000n^2\,\Delta t}}\,c^{4/3} \tag{20-25}$$

Las ecuaciones (20-24) o (20-25) contienen tres variables c, V y K; S_0 y Δt son conocidos. Para estas ecuaciones pueden construirse dos gráficas auxiliares: 1) una gráfica de c contra V con K como parámetro, la cual se conoce como *gráfica de c versus V* para K (figura 20-2*e*), y 2) una gráfica de $V - K$ contra V con c como parámetro, la cual se conoce como *gráfica de V – K versus V* para c (figura 20-2*f*). El uso de estas dos gráficas simplificará el problema, el cual consiste en encontrar c y V en el tiempo $t + \Delta t$ si se conocen las condiciones de flujo c y V en las secciones de aguas arriba y aguas abajo en el tiempo t.

Para ilustrar la aplicación del procedimiento gráfico se supone que: 1) el canal es infinitamente largo y muy ancho, 2) el flujo inicial es uniforme y permanente, y 3) el intervalo de tiempo Δt es constante. Los datos requeridos para la solución incluyen la condición inicial de flujo, el hidrograma de flujo de entrada[3] con el nivel y expresado como una función del tiempo t, la rugosidad y la pendiente del canal y la longitud del canal que va a ser transitada. El procedimiento completo debe desarrollarse mediante pasos con intervalos de tiempo iguales, como sigue:

A. Cálculo preliminar

1. Calcule la velocidad y la profundidad iniciales V_n y y_n mediante la ecuación de Manning, y la celeridad inicial mediante $c_n = \sqrt{g\,y_n}$.
2. Utilizando la ecuación (20-24) o la (20-25) construya la gráfica de *c versus V* para K (figura 20-2*e*) y la gráfica de *V – K versus V* para c (figura 20-2*f*).
3. Construya las líneas de referencia OB y AB (figuras 20-1 y 20-2*a*). Las pendientes de estas líneas son iguales a $V_n + C_n$ y $V_n - C_n$, respectivamente. El punto O puede localizarse en cualquier lugar del eje x.
4. Construya el hidrograma de flujo de entrada con c graficado contra t (figura 20-2*g*). Como el hidrograma dado se encuentra en la forma $y = f(t)$, es necesario convertir y en c mediante la relación $c = \sqrt{g\,y}$.
5. Obtenga los valores de c para diferentes t utilizando el hidrograma construido en el paso anterior y grafíquelos en el plano cx en $x = 0$ (figura 20-2*b*). También grafique el valor de V_n en el plano Vx en $x = 0$ (figura 20-2*c*).

[3] Para otros tipos de hidrograma, por ejemplo, en la forma de caudal $q = f(t)$, se necesita una modificación en el procedimiento. Para un estudio detallado, *véase* [23].

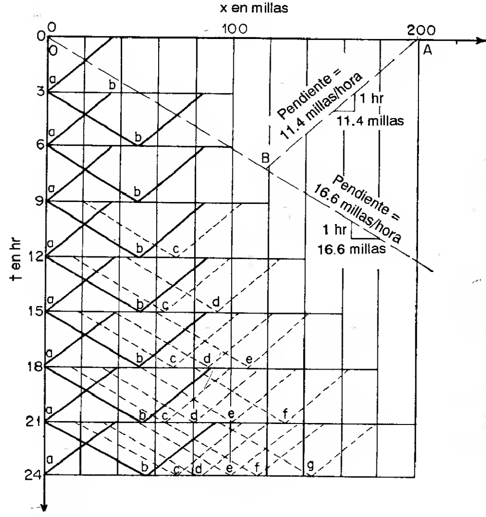


Figura 20-2*a*. Tránsito mediante el método de las características: el plano *xt*.

B. Cálculo de la condición de flujo en el flujo de entrada

1. Dibuje una característica de prueba $p'd'$ (figura 20-1a) con una pendiente en la dirección general de AB. Por medio del hidrograma del flujo de entrada (figura 20-2*g*) puede verse si el valor de c aumenta o disminuye en un momento determinado. En consecuencia, la pendiente de la característica de prueba debería ser más suave o empinada que la del paso anterior.
2. Se supone que los valores de c y V en el tiempo t se han determinado y graficado contra x, como se muestra en las figuras 20-2*b* y 20-2*c*. Según esto, en el punto donde la característica de prueba interseca la línea horizontal que pasa por el tiempo t (figura 20-1*a*), los valores de c_d y V_d son iguales a los de c y V en el tiempo t.
3. Por medio de las gráficas de *c versus V* para K (figura 20-2*e*), encuentre el K_d correspondiente a V_d y C_d y luego calcule G_d mediante la ecuación (20-18).
4. Calcule $V - K$ utilizando la ecuación (20-22) con el valor de c obtenido en el hidrograma de flujo de entrada (figura 20-2*g*).
5. Determine V a partir de la gráfica de *V – K versus V* para c (figura 20-2*f*).
6. Debido a que los valores de c y V se conocen, verifique la pendiente de la característica de prueba, que debe ser igual al promedio de las pendientes en sus extremos, o $[(V - c) + (V_d - c_d)]/2$. Si es necesario, repita el procedimiento con una nueva característica de prueba hasta que se obtenga una verificación satisfactoria.

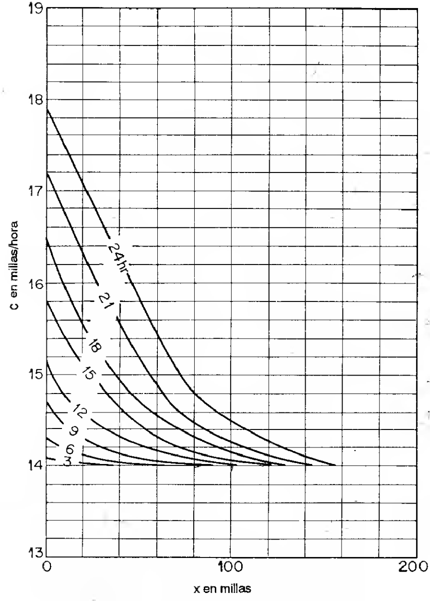


Figura 20-2*b*. Tránsito mediante el método de las características: el plano *cx*.

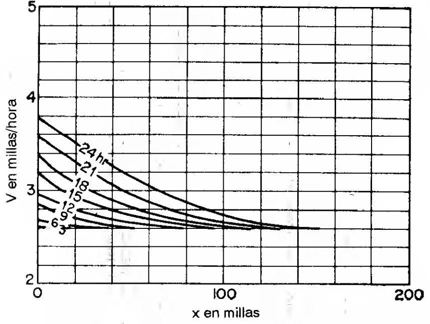


Figura 20-2*c*. Tránsito mediante el método de las características: el plano *Vx*.

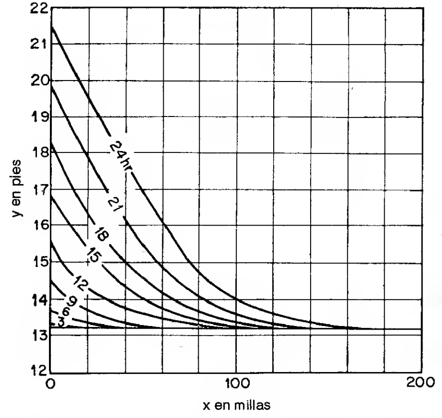


Figura 20-2*d*. Tránsito mediante el método de las características: el plano *yx*.

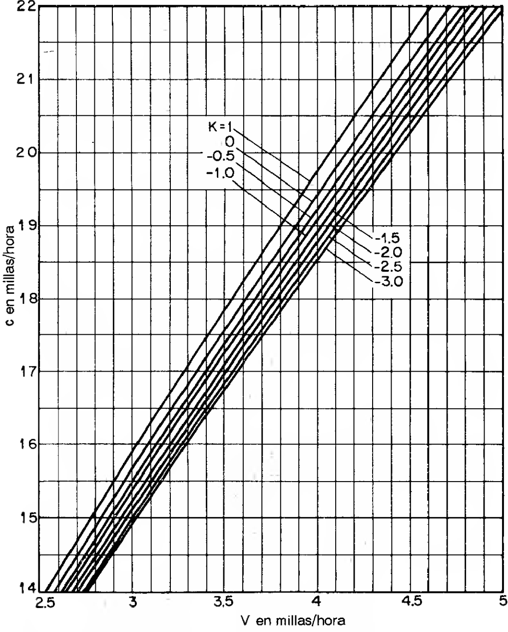


Figura 20-2*e*. Tránsito mediante el método de las características: la gráfica de *c versus V* para *K*.

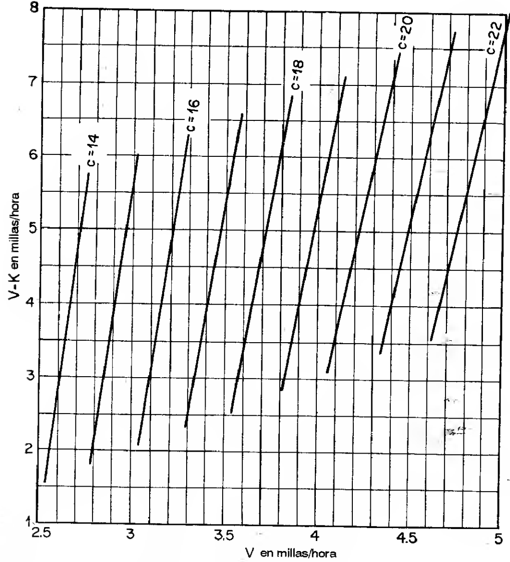


Figura 20-2*f*. Tránsito mediante el método de las características: la gráfica de $V-K$ *versus* V para c.

C. Cálculo de la condición de flujo en el canal

1. Construya dos características de prueba *up* y *pd* en el punto p y en las direcciones generales de OB y AB, respectivamente (figura 20-1*b*). Para iniciar el cálculo, el punto p puede localizarse de manera que el punto u se localice en $x = 0$ sobre la línea horizontal que pasa por el tiempo t.

2. Mediante los planos cx y Vx de los cálculos anteriores (figuras 20-2*b* y 20-2*c*) determine c_u y V_u en x_u y c_d y V_d en x_d (figura 20-1*b*).

3. Determine K_u y K_d a partir de las gráficas de c *versus* V para K (figura 20-2*e*).

4. Calcule G_u y G_d mediante las ecuaciones (20-14) y (20-18), respectivamente.

5. Calcule c utilizando la ecuación (20-20).

6. Calcule $V-K$ por medio de la ecuación (20-21).

7. Determine V a partir de la gráfica de $V-K$ *versus* V para c (figura 20-2*f*).

8. Con las condiciones de flujo determinadas en un número suficiente de puntos a lo largo del canal, construya las gráficas de V y c *versus* x en el tiempo $t + \Delta t$ sobre los planos cx y Vx (figuras 20-2*b* y 20-2*c*).

9. Continúe el procedimiento paso a paso hasta el tiempo y la longitud de canal deseados.

10. Mediante el plano cx puede construirse un hidrograma en cualquier sección del canal. Al construir una línea vertical a través del valor de x dado, la línea

intersecará las curvas sobre el plano cx, dando los valores de c en cualquier momento t. El valor de c puede convertirse a y mediante la relación $y = c^2/g$.

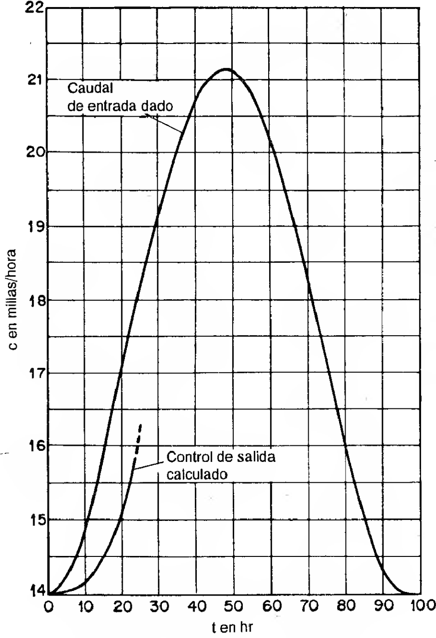


Figura 20-2*g*. Tránsito mediante el método de las características: los hidrogramas.

Ejemplo 20-1. Un canal infinitamente largo y ancho transporta un flujo uniforme inicial de 50 pies^3/s por pie de ancho[4]. Si un hidrograma representado mediante $y = 21.5 - 8.4 \cos(\pi t/48)$ pies se impone en el extremo de aguas arriba del canal, transite la creciente a lo largo de las primeras 50 millas durante un periodo de 24 horas. Se conoce $n = 0.03$ y $S_0 = 1/5{,}280$.

Solución. El cálculo sigue el procedimiento descrito anteriormente.

A. Cálculo preliminar

1. Mediante la ecuación de Manning, $y_n = 13.1$ pies. Luego, $V_n = 50/13.1 = 3.82$ pies/s = 2.60 millas/hora y $C_n = \sqrt{13.1g} = 20.6$ pies/s = 14.0 millas/hora.

2. Utilizando las unidades en millas y horas, $\Delta t = 3$ horas, $n = 0.03$ y $S_0 = 1/5{,}280$. La ecuación (20-25) da

$$V = \sqrt{\frac{22.4 - K}{3{,}810}}\, c^{4/3} \tag{20-26}$$

[4] Este ejemplo se adaptó de [23].

Mediante esta ecuación se calculan las gráficas auxiliares (figuras 20-2*e* y 20-2*f*), como se muestra en la tabla 20-1.

Tabla 20-1. Cálculo de las gráficas auxiliares en el ejemplo 20-1.

K	$\sqrt{\frac{22.4-K}{3,810}}$	$c = 14$, $c^{4/3} = 33.7$		$c = 16$, $c^{4/3} = 40.3$		$c = 18$, $c^{4/3} = 47.2$		$c = 20$, $c^{4/3} = 54.3$		$c = 22$, $c^{4/3} = 61.6$	
		V	$V-K$	V	$V-K$	V	$V-K$	V	$V-K$	V	$V-K$
1.0	0.0750	2.53	1.53	3.03	2.03	3.54	2.54	4.07	3.07	4.63	3.63
0.0	0.0766	2.58	2.58	3.09	3.09	3.62	3.62	4.16	4.16	4.73	4.73
−0.5	0.0776	2.62	3.12	3.13	3.63	3.66	4.16	4.22	4.72	4.78	5.28
−1.0	0.0784	2.64	3.64	3.16	4.16	3.70	4.70	4.25	5.25	4.83	5.83
−1.5	0.0792	2.67	4.17	3.20	4.70	3.74	5.24	4.30	5.80	4.88	6.38
−2.0	0.0800	2.70	4.70	3.23	5.23	3.78	5.78	4.34	6.34	4.93	6.93
−2.5	0.0809	2.73	5.23	3.26	5.76	3.82	6.32	4.39	6.89	4.99	7.49
−3.0	0.0816	2.75	5.75	3.29	6.29	3.85	6.85	4.43	7.43	5.03	8.03

3. Sobre el plano *xt* (figura 20-2*a*) construya las líneas de referencia *OB* y *AB*, cuyas pendientes son 2.60 + 14.0 = 16.6 millas/hora y 2.60 − 14.0 = 11.4 millas/hora, respectivamente.

4. Construya el hidrograma de flujo de entrada (figura 20-2*g*) utilizando la siguiente ecuación:

$$c = \sqrt{gy} = \sqrt{g[21.5 - 8.4 \cos(\pi t/48)]} \text{ pies/s}$$
$$= 3.87\sqrt{21.5 - 8.4 \cos(\pi t/48)} \text{ millas/hora} \qquad (20\text{-}27)$$

5. Mediante la ecuación (20-27) calcule los valores de c en el extremo de aguas arriba del canal (en $x = 0$) para $t = 0,3, ..., 24$ horas y grafíquelos en la figura 20-2*b*. También grafique el valor de $V = 2.60$ millas/hora para $x = 0$ y $t = 0$ en la figura 20-2*c*.

B. Cálculo de la condición de flujo en el flujo de entrada

El paso de cálculo desde $t = 12$ a $t = 18$ horas se tomará como ilustración, suponiendo que los valores de c y V a lo largo del canal en $t = 12$ horas se han determinado en un paso previo. El siguiente procedimiento describe el cálculo de c y V en el flujo de entrada en $t = 18$ horas.

1. En el punto 15*a* en la dirección general de *AB* (figura 20-2*a*) dibuje una característica de prueba cuya pendiente de alguna manera debería ser más tendida que la del paso anterior, es decir, más tendida que la pendiente de la característica en 12*a*, debido a que el hidrograma de flujo de entrada (figura 20-2*g*) indica que c aumenta durante el intervalo $t = 12$ a 15 horas. El extremo de aguas abajo de esta característica se localiza en $t = 12$ horas y $x_d = 36$ millas.

2. Con $x_d = 36$ millas y $t = 12$ horas, calcule $c_d = 14.38$ y $V_d = 2.72$ utilizando las figuras 20-2*b* y 20-2*c*. Estos valores se introducen en las columnas 9 y 8, respectivamente, de la tabla 20-2.

3. Con $c_d = 14.38$ y $V_d = 2.72$ encuentre $K_d = -0.64$ a partir de la figura 20-2*e* e introduzca este valor en la columna 10 de la tabla 20-2. Mediante la ecuación (20-18), $G_d = 2.72 - 2 \times 14.38 - 0.64 = -26.68$, como se muestra en la columna 12 de la tabla 20-2.

4. Del hidrograma de flujo de entrada (figura 20-2*g*), $c = 15.84$ para $t = 15$. A partir de la ecuación (20-22), $V - K = -26.68 + 2 \times 15.84 = 5.00$, como se muestra en la columna 13 de la tabla 20-2.

5. Con $V - K = 5.00$ y $c = 15.84$, encuentre $V = 3.19$ de la figura 20-2*f* e introduzca el valor en la columna 2 de la tabla 20-2.

6. La pendiente de la característica debería ser $(2.72 - 14.38 + 3.19 - 15.84)/2 = -12.16$, lo cual da $x_d = 12.16 \times 3 = 36.48$ millas. Este valor es cercano a $x_d = 36$ millas para la característica de prueba. Si estos valores no coinciden, debe dibujarse una nueva característica de prueba y repetirse el cálculo.

Tabla 20-2. Cálculos de pasos del tránsito de crecientes mediante el método de las características.

Punto	V	c	K	V_u	c_u	K_u	V_d	c_d	K_d	G_u	G_d	$V-K$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
3*a*	2.61	14.07	−0.11	.....	.....	.....	2.58	14.00	0	.....	−25.42	2.72
6*a*	2.69	14.31	−0.48	.....	.....	.....	2.59	14.02	0	.....	−25.45	3.17
6*b*	2.60	14.02	−0.01	2.61	14.07	−0.11	2.58	14.00	0	30.64	−24.42	2.61
9*a*	2.86	14.71	−0.69	.....	.....	.....	2.62	14.05	−0.39	.....	−25.87	3.55
9*b*	2.61	14.06	−0.10	2.69	14.31	−0.48	2.58	14.00	0	30.83	−25.42	2.71
12*a*	2.96	15.22	−1.08	.....	.....	.....	2.67	14.16	−0.75	.....	−26.40	4.04
12*b*	2.68	14.25	−0.40	2.86	14.7	−0.69	2.58	14.00	0	31.59	−25.42	3.08
15*a*	3.19	15.84	−1.81	.....	.....	.....	2.72	14.38	−0.64	.....	−26.68	5.00
15*b*	2.75	14.44	−0.69	2.96	15.22	−1.08	2.59	14.02	0	32.32	−25.45	3.44
18*a*	3.38	16.51	−1.91	.....	.....	.....	2.83	14.68	−1.20	.....	−27.73	5.29
18*b*	2.82	14.72	−0.83	3.19	15.85	−1.81	2.62	14.08	−0.24	33.08	−25.78	3.65
21*a*	3.59	17.21	−2.34	.....	.....	.....	2.93	15.02	−1.40	.....	−28.51	5.93
21*b*	2.98	15.23	−1.06	3.38	16.51	−1.91	2.68	14.22	−0.65	34.49	−26.41	4.04
24*a*	3.79	17.90	−2.49	.....	.....	.....	3.08	15.55	−1.50	.....	−29.52	6.28
24*b*	3.08	15.55	−1.49	3.59	17.21	−2.34	2.70	14.32	−0.60	35.67	−26.54	4.57

C. Cálculo de la condición de flujo en el canal

1. Dibuje dos características de prueba en 15*b* en las direcciones generales de *OB* y *AB*. Nótese que la característica en la dirección *OB* empieza en el punto 12*a*. Luego $x_u = 0$, $x = 52$ millas y $x_d = 86$ millas.

2. A partir de las figuras 20-2*b* y 20-2*c*, encuentre $c_u = 15.22$ y $V_u = 2.96$ en $x_u = 0$, y $c_d = 14.02$ y $V_d = 2.59$ en $x_d = 86$ millas. Introduzca estos valores en las columnas 5 a 8 de la tabla 20-2.

3. En la figura 20-2*e*, encuentre $K_u = -1.08$, como se muestra en la columna 7 de la tabla 20-2, para $c_u = 15.22$ y $V_u = 2.96$; y también $K_d = 0$, como se muestra en la columna 10, para $c_d = 14.02$ y $V_d = 2.59$.

4. Mediante la ecuación (20-14), $G_u = 2.96 + 2 \times 15.22 - 1.08 = 32.32$ y mediante la (20-18), $G_d = 2.59 - 2 \times 14.02 - 0 = -25.45$, como se muestra en las columnas 11 y 12 de la tabla 20-2, respectivamente.

5. A partir de la ecuación (20-20), $c = (32.32 + 25.45)/4 = 14.44$, como se muestra en la columna 3 de la tabla 20-2.

6. Mediante la ecuación (20-21), $V - K = (32.32 - 25.45)/2 = 3.44$, como se muestra en la columna 13 de la tabla 20-2.

7. En la figura 20-2*f* encuentre $V = 2.75$, como se muestra en la columna 2 de la tabla 20-2, para $c = 14.44$ y $V - K = 3.44$.

8. Utilice los valores de c y V para verificar las pendientes de las características de prueba. Luego, $x = (2.75 + 14.44) \times 3 = 51.57$ millas y $x_d = -(2.75 - 14.44) \times 3 + 51.57 = 86.64$ millas. Las pendientes de prueba son satisfactorias. En caso contrario, deberían dibujarse características nuevas y repetirse el cálculo.

9. Proceda con el cálculo paso a paso, como se muestra en la tabla 20-2.

10. Dibuje una línea vertical en $x = 50$ millas sobre el plano *cx* (figura 20-2*b*). La línea interseca las curvas, dando los valores de c en diferentes tiempos, que al graficarlos contra el tiempo se obtiene un hidrograma en $x = 50$ millas para un periodo de 24 horas, como se muestra en la figura 20-2*g*. Este hidrograma puede convertirse a $y = f(t)$ mediante la relación $y = c^2/g$.

Nótese que, una vez determinadas las condiciones de flujo en los puntos *a* y *b* para cada intervalo de tiempo, parte de las curvas pueden trazarse sobre los planos *cx* y *Vx* para las primeras 50 millas de manera aproximada y luego pueden revisarse o refinarse mediante la determinación adicional de más puntos, como *c* y *d* en el canal. El procedimiento gráfico ofrece una solución

práctica de las ecuaciones de Massau. Sin embargo, el cálculo involucrado es complicado y requiere práctica para aplicaciones rutinarias. Para soluciones exactas debe reducirse el intervalo de tiempo Δt, todas las gráficas deben prepararse con escalas grandes y el cálculo debe realizarse con suficientes cifras significativas. Para la tabla 20-2, el cálculo se realizó con una regla de cálculo debido a que el ejemplo se dio sólo con propósitos de ilustración. Los valores de las columnas 7 y 10 se estimaron burdamente utilizando las curvas, y no son muy exactos aun para las cifras decimales mostradas. Para un cálculo exacto de K, debieron utilizarse las ecuaciones (20-15) y (20-19).

En este ejemplo particular de un canal largo uniforme con un flujo inicialmente uniforme, debió suponerse que los valores de c y V en una sección particular del perfil de onda no cambian. En otras palabras, el flujo puede considerarse como uniformemente progresivo, después de determinar las condiciones en los puntos a y b. Esto puede explicarse en la figura 20-3 como sigue.

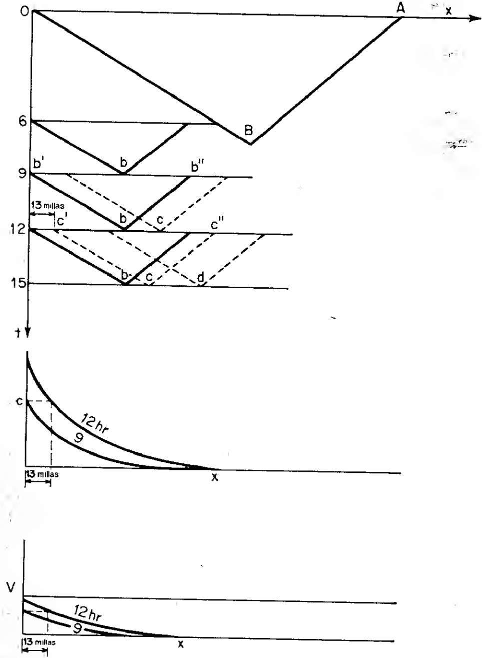


Figura 20-3. Procedimiento simplificado para el ejemplo 20-1.

En el plano cx dibuje una línea horizontal que pase por la curva $t = 9$ horas en $x = 0$. Esta línea interseca la curva $t = 12$ horas en $x = 13$ millas. De igual modo, se dibuja una línea horizontal en el plano V_x que pase por la curva $t = 9$ horas en $x = 0$. Esta línea interseca la curva $t = 12$ horas también en $x = 13$ millas. Por consiguiente, es evidente que los valores de c y V en los puntos ($t = 9$ horas y $x = 0$) y ($t = 12$ horas y $x = 13$ millas) son iguales. Esta evidencia puede simplificar

los pasos subsecuentes en el cálculo del tránsito. Las características punteadas cc' y cc'' en $15c$ pueden dibujarse paralelas a las bb' y bb'', respectivamente, en $12b$. El punto de aguas arriba c' de la característica cc' se localiza en $x = 13$ millas sobre la línea 12 horas. Luego los valores de c y V en $15c$ son iguales a los de $12b$. De la misma manera, los valores de c y V en los puntos $9b$, $12c$ y $15d$ son iguales y pueden calcularse en la misma forma. Como resultado, el cálculo de los valores de c y V sólo es necesario en el punto a en el flujo de entrada y en el punto b en el canal para cada intervalo de tiempo; en otros puntos del canal estos valores pueden determinarse mediante el procedimiento simplificado mostrado por las líneas punteadas en la figura 20-2*a*.

Stoker [16, 17], Isaacson y Stoker y Troesch [32, 33] desarrollaron métodos numéricos similares para la solución de ecuaciones diferenciales de flujo no permanente [ecuaciones (20-1) a (20-4)]. Estos métodos se aplicaron con resultados satisfactorios a tres problemas reales presentados por el U. S. Army Corps of Engineers [34]: 1) movimiento de la creciente de 1945 en el tramo de la milla 375 del río Ohio desde Wheeling, West Virginia, hasta Cincinnati, Ohio; 2) movimiento de la creciente de 1947 en la confluencia de los ríos Ohio y Mississippi en Cairo, Illinois; y 3) movimiento de las ondas de creciente de 1948 y 1950 en el embalse Kentucky, el cual es angosto y tiene 184 millas de longitud y está localizado en la parte baja del río Tennessee. El segundo problema es igual al descrito en la sección 11-10 y en la figura 11-15, excepto que en este problema el flujo se considera no permanente. Los cálculos de los perfiles de flujo se hicieron para los tiempos $t = 0$, 2.5, 4, 10 e ∞ horas, respectivamente, después de iniciada la creciente 50 millas aguas arriba sobre el río Ohio (*véase* figura 11-15). Los perfiles de flujo para $t = \infty$ son idénticos a aquéllos calculados para el flujo permanente.

La solución de problemas prácticos mediante el método numérico por lo general es muy tediosa. Para acelerar el trabajo de cálculo el U. S. Army Corps of Engineers ha utilizado un computador electrónico digital, como el Remington Rand UNIVAC I (Universal Automatic Computer I). Sin embargo, para trabajos pequeños, parte del cálculo puede desarrollarse a bajos costos y con gran eficiencia utilizando un computador portátil, como el Burroughs E101; el uso de máquinas más grandes se justifica sólo para problemas muy complejos.

20-3. Método de la analogía de difusión. Un método hidráulico aproximado para la solución del problema del tránsito de crecientes en canales naturales se ha desarrollado mediante la teoría de estadística clásica de difusión de flujo [35], según la cual puede escribirse una ecuación diferencial para la difusión de un flujo no permanente de partículas, como sigue:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = K \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \tag{20-28}$$

donde N es el número de partículas, t es el tiempo, x es la distancia y K es un coeficiente conocido como *difusividad*. Cuando las partículas fluyen a lo largo de la dirección del eje x, esta ecuación da la distribución de partículas en la dirección de flujo como una función del tiempo y la posición. Esta teoría se aplica comúnmente a problemas de transferencia de calor [36]; en ese caso la ecuación (20-28) representa la *ley general de Fourier de conducción de calor*, en la cual N representa la temperatura y K se conoce como *difusividad térmica* [37].

En corrientes naturales las perturbaciones del flujo causadas por irregularidades locales en el canal tienen una magnitud definida en cualquier tiempo y posición. Éstas se mezclan, se disipan y se difunden a medida que el flujo se mueve a lo largo del canal. Para aplicar al flujo de agua la teoría de difusión de flujo se supone que la difusión de las perturbaciones es análoga a la de las partículas. Si el efecto total de las perturbaciones de flujo se representa mediante la variación de la profundidad de flujo y, la ecuación (20-28) puede escribirse como

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (20\text{-}29)$$

En corrientes naturales las irregularidades locales ocasionan un almacenamiento anormal, y la ecuación anterior refleja la tasa de cambio en el almacenamiento del canal debido a tales irregularidades. Al incluir este ítem en la ecuación (18-1) para la continuidad de flujo en canales prismáticos, la ecuación de continuidad para el flujo en canales naturales puede escribirse como

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (20\text{-}30)$$

Además se supone que el canal es relativamente ancho y que en promedio el flujo es uniforme y permanente. Luego el caudal por unidad de ancho del canal puede representarse mediante la ecuación de Chézy[5],

$$q = C\sqrt{S_0}\, y^{3/2} \qquad (20\text{-}31)$$

Al sustituir esta ecuación para q en la ecuación (20-30) y simplificar,

$$\frac{\partial y}{\partial t} + C\sqrt{S_0}\,\frac{\partial y^{3/2}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (20\text{-}32)$$

Ésta es la *ecuación diferencial básica para el flujo de crecientes en corrientes naturales*. Nótese que el coeficiente de $\partial y^{3/2}/\partial x$ en esta ecuación depende de la resistencia y la pendiente del canal, y el coeficiente de $\partial^2 y/\partial x^2$, de las irregularidades del mismo.

Originalmente esta ecuación la desarrolló Hayami [38] a partir de una deducción matemática compleja. Un método de tránsito similar basado en la analogía de difusión lo presentó también Appleby [39]. Se estimó que el valor de la difusividad K en corrientes naturales variaba desde 10^6 hasta 10^7 cm²/s. En ríos grandes, como el Mississippi, en los Estados Unidos, y el Yang Tse, en la China, el valor de K debería ser del orden de 10^8 cm²/s.

Una solución de la ecuación (20-32) hecha por Hayami proporcionó la siguiente ecuación para la propagación de una onda de creciente:

$$\frac{y - y_n}{y_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{Kt}} \exp\left[\frac{V_w x}{2K} - X^2 - \left(\frac{V_w x}{4KX}\right)^2\right] dX \qquad (20\text{-}33)$$

[5] También puede utilizarse la ecuación de Manning. En este caso el segundo término a la izquierda de la ecuación (20-32) se escribiría como $(1.49\sqrt{S_0}/n)\partial y^{5/3}/\partial x$.

donde y es la profundidad en un punto localizado en la distancia x desde el extremo de aguas arriba del tramo en consideración, y_n es la profundidad normal de flujo en el mismo punto antes de que llegue la creciente, y_0 es la profundidad en el extremo de aguas arriba, t es el tiempo, K es la difusividad, $V_w = 1.5V$, V es la velocidad media y X es la variable.

Puede suponerse una onda ficticia con una profundidad constante que dure un intervalo de tiempo unitario Δt (figura 20-4). Esta onda se conoce como *creciente unitaria*, y su propagación puede determinarse mediante la ecuación (20-33). Como un ejemplo numérico, utilizando $V_w = 70$ cm/s, $K = 10^7$ cm²/s, $\Delta t = 5$ horas y $x = 2.2$, 14. 21 y 32 km, respectivamente, Hayami calculó la propagación de la creciente unitaria, como se muestra en la figura 20-4. Nótese que a medida que la onda se propaga hacia aguas abajo su forma gradualmente se vuelve asimétrica y plana.

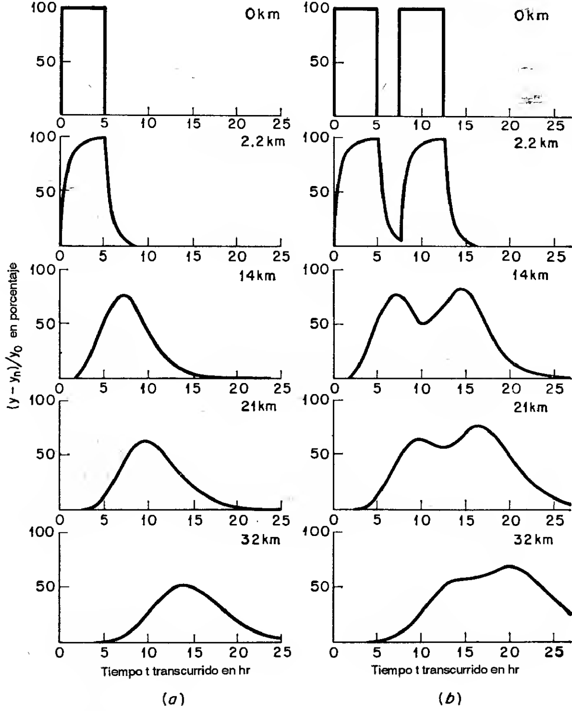


Figura 20-4. Propagación de: (*a*) una creciente unitaria solitaria, y (*b*) dos crecientes unitarias sucesivas (*según S. Hayami* [38]).

En el tránsito de una creciente real, el hidrograma de la creciente puede dividirse en cierto número de hidrogramas de creciente unitaria (figura 20-5), que se grafican con el tiempo contra el nivel. La propagación de cada creciente unitaria puede calcularse con la ecuación (20-33). Mediante el principio de superposición, la altura propagada de una creciente determinada es igual a la suma de las alturas propagadas de todas las crecientes unitarias. Este método se ha utilizado para calcular la propagación de una creciente unitaria producida artificialmente en el río Yedo, en el Japón donde los cálculos teóricos presentaban una buena coincidencia con las observaciones. Para simplificar y acelerar el procedimiento de tránsito mediante este método, se han desarrollado computadores electrónicos análogos con base en la ecuación (20-32) y se han aplicado a varios ríos en el Japón con resultados satisfactorios [40-44].

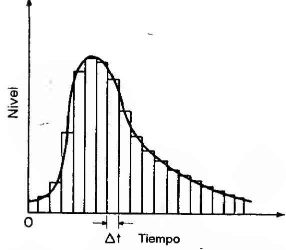


Figura 20-5. División de un hidrograma en hidrogramas de crecientes unitarias.

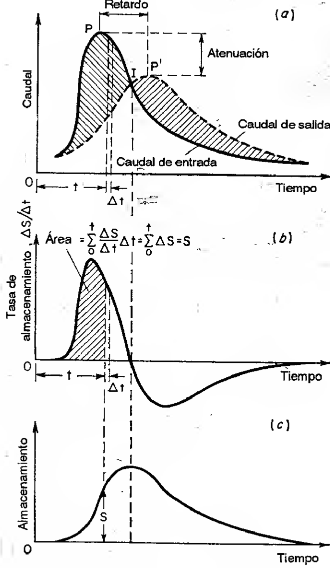


Figura 20-6. Relación entre el flujo de entrada, el flujo de salida y el almacenamiento en un tramo de canal debido al paso de una creciente.

20-4. Principio del tránsito hidrológico. Cuando una onda de creciente pasa un tramo de canal, los hidrogramas de flujo de entrada y de salida en los extremos de aguas arriba y aguas abajo del tramo, respectivamente, se muestran en la figura 20-6*a*. Suponiendo una pérdida o una ganancia de agua pequeña a lo largo del curso del flujo a lo largo del tramo, las áreas totales bajo los hidrogramas son iguales, debido a que el volumen del agua de la creciente no cambia. En corrientes naturales la resistencia del canal y la capacidad de almacenamiento en éste son altas; en consecuencia, la onda de creciente tendrá características que se modificarán de manera significativa. Como se muestra en la figura 20-6*a*, el pico de la creciente se atenúa y se demora. La diferencia entre las ordenadas de los hidrogramas de flujo de entrada y de salida, representada por las áreas sombreadas en la figura, es igual a la tasa de almacenamiento en el tramo; es decir,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = I - O \qquad (20\text{-}34)$$

donde $\Delta S/\Delta t$ es el cambio en el almacenamiento durante el periodo Δt, I es el flujo de entrada promedio durante Δt y O es el flujo de salida promedio durante Δt. El valor de $\Delta S/\Delta t$ es positivo cuando el almacenamiento aumenta, y negativo cuando disminuye. Esta ecuación constituye la base para un procedimiento hidrológico de tránsito en el cual Δt se conoce como *periodo de tránsito*.

La tasa de almacenamiento puede graficarse contra el tiempo, como se muestra en la figura 20-6*b*, en la cual puede verse que el almacenamiento aumenta antes del momento para el cual el flujo de entrada es igual al de salida y decrece a partir de ese momento. El área acumulada por debajo de la curva de almacenamiento-tasa (área sombreada en la figura) representa el volumen de almacenamiento en un tiempo t después del inicio de la creciente. Al graficar este volumen con respecto al tiempo puede obtenerse una curva de almacenamiento-volumen, como se muestra en la figura 20-6*c*. Esta curva tiene un pico que representa el máximo volumen de almacenamiento, el cual ocurre cuando el flujo de entrada es igual al de salida.

Si el almacenamiento se grafica contra el caudal de salida, la curva resultante por lo general tomará la forma de un lazo, como el que se ilustra en la figura 20-7, según la cual el almacenamiento para un caudal determinado en la parte ascendente (o decreciente) de la creciente será mayor que (o menor que) el almacenamiento correspondiente a la condición de flujo permanente para el cual la relación almacenamiento-caudal de salida se representa mediante la curva punteada, que está casi en la posición media de las dos ramas del lazo.

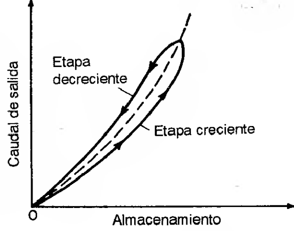


Figura 20-7. La relación almacenamiento-caudal de salida.

El almacenamiento en un tramo de canal para flujo no permanente depende sobre todo de los caudales de flujo de entrada y de salida y de las características geométricas e hidráulicas del canal y sus estructuras de control. Puede suponerse que las secciones extremas de aguas arriba y aguas abajo del tramo tienen el mismo caudal medio y las mismas relaciones de almacenamiento con respecto a la profundidad de flujo y. Luego, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$I = ay^n \qquad (20\text{-}35)$$

$$O = ay^n \qquad (20\text{-}36)$$

y

$$S_i = by^m \qquad (20\text{-}37)$$

$$S_o = by^m \qquad (20\text{-}38)$$

donde a y n expresan las características profundidad-caudal de las secciones, b y m, las características profundidad media-almacenamiento en el tramo, y S_i y S_o son los almacenamientos con referencia a las profundidades en las secciones extremas de

aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Al eliminar y de las ecuaciones (20-35), (20-37), (20-36) y (20-38),

$$S_i = b\left(\frac{I}{a}\right)^{m/n} \qquad (20\text{-}39)$$

y

$$S_o = b\left(\frac{O}{a}\right)^{m/n} \qquad (20\text{-}40)$$

Sea X un factor adimensional que define los pesos relativos dados al flujo de entrada y al de salida en la determinación del volumen de almacenamiento dentro del tramo. Entonces, el almacenamiento en cualquier instante de tiempo puede expresarse como

$$S = XS_i + (1 - X)S_o \qquad (20\text{-}41)$$

Cuando los niveles en un tramo están determinados por el control en su extremo de aguas abajo, por ejemplo en el vertedero de un embalse con piscina nivelada, el almacenamiento es una función única del caudal de salida; por consiguiente, $X = 0$. Si el almacenamiento debido al efecto de remanso en el extremo de aguas arriba de un embalse es importante, X será mayor que cero. En canales uniformes se da igual peso a los flujos de entrada y de salida, y $X = 0.5$.

Al sustituir las ecuaciones (20-39) y (20-40) para S_i y S_o, en la ecuación (20-41), respectivamente, y simplificar,

$$S = K[XI^x + (1 - X)O^x] \qquad (20\text{-}42)$$

donde $K = b/a^{m/n}$ y $x = m/n$. En canales rectangulares prismáticos el caudal varía con la potencia cinco tercios de la profundidad con base en la ecuación de Manning, y el almacenamiento varía con la primera potencia. Como $n = 5/3$ y $m = 1$, el exponente es $x = 0.6$. En canales naturales m puede ser conside-rablemente mayor que la unidad y por consiguiente x es mayor que 0.6. Muchos procedimientos de tránsito hidrológico se han desarrollado con base en la ecuación (20-42). Para propósitos prácticos y de simplicidad, a menudo se supone que x es la unidad.

La aproximación hidrológica al problema del tránsito de una creciente se basa en la relación almacenamiento-caudal descrita antes. Se supone que los efectos dinámicos del flujo son insignificantes y que el almacenamiento es una función monovaluada del caudal. Esta suposición implica que el flujo cambia muy lentamente con respecto al tiempo. Por consiguiente, los efectos debidos a pendientes superficiales anormales, que modifican el caudal y cambian el almacenamiento en el canal, son insignificantes.

Este procedimiento es aproximadamente correcto para corrientes ordinarias con pendientes pequeñas. Cuando se grafica el almacenamiento contra el caudal, el lazo resultante a menudo es angosto y puede ajustarse una curva promedio para representar el almacenamiento como una función monovaluada del caudal. Si el lazo es ancho, puede reproducirse mediante una relación de línea única utilizando un ajuste como el empleado en el método de Muskingum [45], en el cual el ajuste es posible si varían los valores de K y X en la ecuación (20-42).

En corrientes que tengan pendientes empinadas, los efectos dinámicos del flujo son pronunciados y no pueden ignorarse. En consecuencia, el método hidrológico para el tránsito de crecientes para tales corrientes puede no ser satisfactorio.

20-5. Métodos del tránsito hidrológico. Se han desarrollado muchos métodos hidrológicos para el tránsito de crecientes, acerca de los cuales existen muchas descripciones [45-50] en la literatura de ingeniería hidrológica. Por consiguiente, en esta sección sólo se mencionarán los métodos importantes por sus nombres y se darán referencias para estudios posteriores. Sin embargo, un método hidrológico simple se describirá en la siguiente sección.

En general, los métodos hidrológicos para el tránsito de crecientes pueden clasificarse en dos grupos: los analíticos y los instrumentales.

Existen muchos métodos analíticos para el tránsito. Para el tránsito en embalses se utiliza mucho [52-54] la bien conocida curva de masa de Rippl [51]. También se han desarrollado otros métodos gráficos como el de Sorensen [55, 56]. Para el tránsito en ríos, la relación almacenamiento-caudal se simplifica en los métodos desarrollados por Meyer [57], Puls [47, 58, 59], Wilson [60], Cheng [61], Johnstone y Cross [54], Knappen, Stratton y Davis [56] y Chow [62]. Procedimientos semigráficos incluyen los métodos de Goodrich [63], Rutter, Graves y Snyder [64], Wisler y Brater [65] y Steinberg [66]. Otros métodos simplificados utilizan un nomograma, como el sugerido por Linsley [67], una regla de cálculo directo como la sugerida por Posey [68, 69], y computadores circulares como los sugeridos por Shepley y Walton [70]. Tatum [48, 71] desarrolló un método simplificado de promedios sucesivos. Otro método de uso generalizado y satisfactorio es *el método de Muskingum* que fue desarrollado por McCarthy [46, 72], en el cual se utiliza mucho la ecuación (20-42) suponiendo $x = 1$; es decir,

$$S = K[XI + (1 - X)O] \qquad (20\text{-}43)$$

donde K y X deben determinarse a partir de las características del canal en estudio.

En el pronóstico de crecientes o en el control y la operación de proyectos multipropósito en ríos, una preocupación importante es el nivel de la creciente y, por consiguiente, se necesita un procedimiento para el tránsito de niveles. Para este propósito, Lane [73] propuso un método que involucra el uso de cuadros de líneas múltiples. Más adelante Kohler [74] desarrolló un procedimiento mejorado, el cual requiere un cuadro para determinar la relación normal entre los niveles en el río principal y cuadros auxiliares, uno para cada tributario. Estos cuadros pueden utilizarse para determinar las correcciones que deben aplicarse a niveles normales preestablecidos. El U. S. Mississippi River Commission [75] ha utilizado el método de Puls para el tránsito de niveles. Ray y Mondschein [76] sugirieron otro método para la predicción exacta de tránsito de niveles en ríos muy planos.

En conexión con el diseño de jarillones y diques para el control de crecientes, la técnica de tránsito debe extenderse para resolver el problema conocido como

cálculo de la línea de flujo, que consiste en estimar la máxima elevación de la superficie del agua en todos los puntos a lo largo de un canal con jarillones o diques durante el paso de la creciente de diseño. Una vez que esta elevación se ha determinado, se da la altura de los jarillones añadiendo un borde libre apropiado. Para tales propósitos, W. M. Mulholland [46] desarrolló un método de cálculo simple.

Para acelerar las operaciones de tránsito se necesita el tránsito instrumental; con este fin se han desarrollado dos tipos de máquinas de tránsito: la mecánica y la electrónica.

Las máquinas de tránsito mecánicas a menudo se diseñan para el tránsito en embalses. El U. S. Army Corps of Engineers ha construido dos tipos: una máquina integradora diseñada por Tarpley [77] y un transitador de crecientes del tipo rodillo desarrollado por Harkness [78; 45, pp. 674-676].

Las máquinas de tránsito electrónicas son computadores electrónicos análogos y digitales. El principio de la analogía electrónica es utilizar la analogía existente entre el flujo de corriente en un circuito eléctrico y el flujo de agua en un sistema de canales o ríos. En otras palabras, un circuito eléctrico puede construirse de manera que su ecuación sea análoga a la de tránsito.

El U. S. Weather Bureau [79-81, 48] ha desarrollado un computador electrónico análogo, el cual se muestra en la figura 20-8. Esta máquina produce automáticamente el hidrograma de flujo de salida, en tanto que el operador traza el hidrograma de flujo de entrada utilizando un señalador de aguja. Las resistencias en el circuito eléctrico pueden ajustarse para simular las condiciones de cada tramo del río, como se determinó a partir de crecientes anteriores. El modelo ilustrado en la figura tiene dos posiciones de flujo de entrada que permiten el procesamiento de dos fuentes de flujo de entrada que afectan el flujo de salida final aguas abajo. Si es necesario, pueden añadirse más posiciones. En otras palabras, la máquina también desarrolla la síntesis de crecientes. El uso de este tipo de máquina tiene una ventaja muy importante sobre los métodos analíticos, que es solucionar la ecuación de tránsito en una forma diferencial en lugar de una forma de diferencias finitas, que a menudo es inevitable en los métodos analíticos. Además, todo el hidrograma de entrada puede ser transitado más rápidamente que mediante el cálculo analítico.

De igual modo, el U. S. Army Corps of Engineers utiliza un GEDA (Analizador Electrónico Diferencial Goodyear, figura 20-9) en estudios preliminares de proyectos para el control de crecientes y su tránsito en embalses.

20-6. Un método hidrológico simple para tránsito de crecientes. El método aquí descrito es aproximado pero simple y apropiado para propósitos prácticos. Igual que la mayor parte de los métodos hidrológicos de tránsito, éste se basa en las siguientes suposiciones:

1. El canal se divide en cierto número de tramos relativamente cortos y prácticamente con características físicas constantes. Luego la creciente se transita de manera sucesiva desde un tramo hasta el otro. En general, el tramo práctico más corto es la sección entre las dos estaciones de aforo más cercanas.

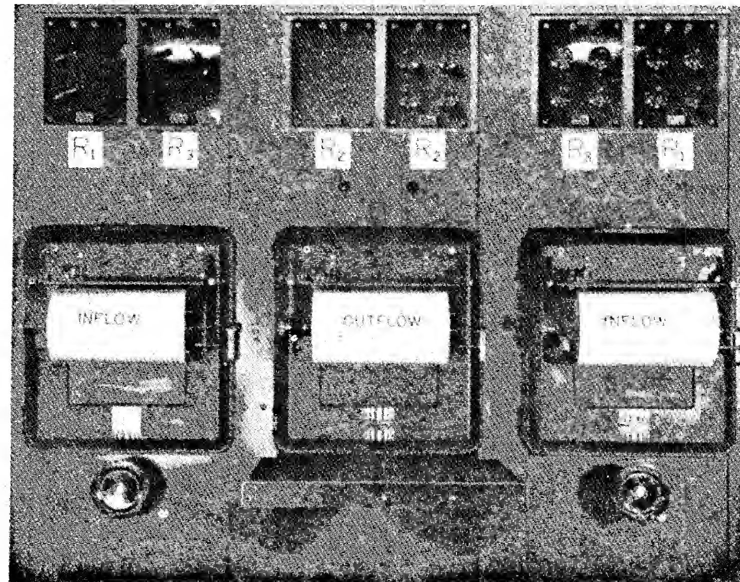


Figura 20-8. Analogía electrónica para el tránsito de crecientes (*cortesía de M. A. Kohler, U. S. Weather Bureau*).

2. Los datos de caudal se determinan a intervalos iguales de tiempo o periodos de tránsito, durante los cuales el incremento o decremento en el flujo de entrada o de salida se supone que varía linealmente. Aunque es preferible un periodo de tránsito corto, éste aumentará el trabajo de cálculo.

3. Los flujos de entrada y de salida se toman como una medida de almacenamiento en el tramo. Esta suposición es cierta si la creciente se transita a través de un embalse de piscina nivelada donde la variación en almacenamiento entre los niveles ascendente y descendente de la onda de creciente no es significativa. En el caso de una corriente la longitud del tramo para el tránsito no debe ser muy larga o estas variaciones serán desproporcionadas. En teoría, la longitud del tramo no debe exceder el producto del periodo de tránsito por la velocidad promedio del flujo en el tramo (¿por qué?), a pesar de que en muchos casos son permisibles tramos mucho más largos [54, pp. 173-175].

4. El flujo en el tramo, aportes locales de flujos de tributarios no aforados, aguas subterráneas, lluvia o cualquier otra forma de precipitación y disminuciones locales debidos a evaporación o infiltración no se consideran si las cantidades son pequeñas. Si éstas son grandes, se añaden o se deducen del flujo de entrada, según sea el caso.

Figura 20-9. Computador para el cálculo de crecientes GEDA (*cortesía de E.E. Abbott, U. S. Army Corps of Engineers*).

Para el tránsito de una creciente desde el primer periodo de tránsito hasta el segundo, se tiene

I_1 y O_1 = flujo de entrada y flujo de salida instantáneos, respectivamente, al final del primer periodo de tránsito o al comienzo del segundo.
S_1 = almacenamiento en el tramo al comienzo del segundo periodo de tránsito.
S_2 = almacenamiento en el tramo al final del primer periodo de tránsito o al comienzo del segundo.
Δt = Periodo de tránsito.

Luego

$$I = \frac{(I_1 + I_2)}{2} = \text{flujo de entrada promedio durante } \Delta t$$

$$O = \frac{(O_1 + O_2)}{2} = \text{flujo de salida promedio durante } \Delta t$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \text{cambio en el almacenamiento durante } \Delta t$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (20-34) y simplificar,

$$2\frac{S_1}{\Delta t} - O_1 + I_1 + I_2 = 2\frac{S_2}{\Delta t} + O_2 \qquad (20\text{-}44)$$

Si I_1, I_2, O_1 y O_2 se expresan en pies³/s, S_1 y S_2 en acre-pies y Δt en días, considerando que un pie³/s = 2 acre-pies/día (apd) aproximadamente, entonces la ecuación (20-44) se convierte en

$$\frac{S_1}{\Delta t} - O_1 + I_1 + I_2 = \frac{S_2}{\Delta t} + O_2 \qquad (20\text{-}45)$$

Cuando $\Delta t = 1$ día, como en la mayor parte de los casos, la ecuación anterior se convierte en

$$S_1 - O_1 + I_1 + I_2 = S_2 + O_2 \qquad (20\text{-}46)$$

Esta ecuación constituye la base de este método. Si Δt no es igual a un día, entonces los valores de $S_1/\Delta t$ y $S_2/\Delta t$ deben utilizarse en lugar de S_1 y S_2, respectivamente, para el cálculo y la construcción de las curvas en el procedimiento que se describe a continuación:

A. Construcción de las curvas características. Estas curvas se construyen sobre un plano de *S versus* $O + S$ (figura 20-10). La abscisa representa el almacenamiento en acres-pie, y la ordenada representa la suma del flujo de salida en pie³/s y el almacenamiento en acre-pies. Las curvas pueden construirse utilizando dos de los siguientes 3 ítems: información del flujo de entrada, información del flujo de salida y datos de almacenamiento de una creciente histórica del tramo en consideración. El tercer ítem puede calcularse mediante los otros dos ítems y la ecuación (20-34).

Figura 20-10. Curvas características para el tránsito de crecientes.

Figura 20-11. Construcción de una curva *S* promedio utilizando una curva *S* con lazo amplio.

1. Dibuje la *línea* de 45°, empezando en el origen con una pendiente de 45°.
2. Grafique S contra $O + S$, y obtenga la *curva S*.

Como se describió antes (sección 20-4), la gráfica de almacenamiento contra caudal de salida formará un lazo, al igual que la gráfica de S *versus* $O + S$. Si el lazo de la curva S no es ancho puede dibujarse una curva promedio fijada a ojo para representar una relación lineal entre S y $O + S$. Si el lazo es ancho, la curva S promedio puede construirse como se muestra en la figura 20-11. En esta figura se grafica una curva de S contra $I + S$, también en la forma de un lazo, del lado izquierdo del eje de las ordenadas, y la curva S en la forma de lazo se grafica en el lado derecho del eje. A ambos lados del eje de las ordenadas se construyen líneas verticales en abscisas iguales correspondientes a cierto almacenamiento S'. Las líneas intersecan los lazos en los puntos A, B, A' y B'. Los puntos A y A' se encuentran sobre los brazos del nivel ascendente en los lazos y B y B' en los brazos de nivel descendente. Dibuje líneas rectas AA' y BB', las cuales se intersecan en C. Dibuje una línea horizontal desde C hacia la derecha hasta encontrar el corte vertical AB en el punto C' que es el punto requerido sobre la curva S promedio correspondiente al almacenamiento S' determinado. Puede demostrarse que la ordenada de C' representa la suma de S' y de cierto caudal Q, cuyo valor es el promedio para los niveles ascendentes y descendentes de la creciente.

3. Construya la *curva imagen* (curva I en la figura 20-10) cuya abscisa es igual a $S_1 - O_1$. Ésta es una imagen de la línea 45° reflejada horizontalmente en el lado izquierdo de la curva. La curva puede construirse con facilidad haciendo el corte horizontal entre ésta y la curva S, igual a la intersección horizontal entre la curva S y la línea de 45°.

B. Determinación del flujo de salida. Ésta se basa en las curvas características (figura 20-10) y en el hidrograma del flujo de entrada que va a transitarse. El periodo de tránsito es igual a un día.

1. El flujo de salida inicial al principio del primer periodo de tránsito debe conocerse o suponerse. Nótese que el error que implica suponer el valor no es lo suficientemente grande para producir un efecto significativo en el resultado.
2. Localice una intersección horizontal AB igual al flujo de salida inicial entre la línea de 45° y la curva S.
3. Extienda AB hacia la izquierda hasta encontrar la curva I en C.
4. Extienda AB hacia la derecha hasta el punto D, haciendo $CD = I_1 + I_2$.
5. Dibuje la línea vertical DE desde D hacia arriba hasta encontrar la línea de 45° en E.
6. Dibuje la línea horizontal EF desde E hacia la izquierda hasta encontrar la curva S en F.
7. Mida la longitud de EF, la cual es igual al flujo de salida al final de periodo de tránsito, u O_2.
8. Continúe el ciclo de los pasos anteriores empezando desde el punto F, que corresponde al punto A en el ciclo anterior. Valores sucesivos del flujo de salida pueden obtenerse al igual que el hidrograma correspondiente.

El procedimiento anterior para determinar el flujo de salida puede probarse como sigue: extienda horizontalmente CD y EF hacia la izquierda hasta encon-

trar el eje de las ordenadas en H y G, respectivamente. Luego, a partir de la figura 20-10,

$$HD = HA - CA + CD = S_1 - O_1 + I_1 + I_2$$
$$GE = GF + FE = S_2 + FE$$

y

$$HD = GE$$

Por consiguiente,

$$S_1 - O_1 + I_1 + I_2 = S_2 + FE \qquad (20\text{-}47)$$

Al comparar esta ecuación con la (20-46), es evidente que FE es igual a O_2.

Ejemplo 20-2. En las columnas 1, 2 y 5 de la tabla 20-3 se dan los datos de caudal de entrada y de salida para una creciente histórica en un tramo de un canal. Determine el hidrograma de caudal de salida de una creciente cuyos datos de caudal de entrada se dan en las columnas 1 y 2 de la tabla 20-4.

Tabla 20-3. Cálculo de las curvas características.
(todas las cantidades en miles)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	Caudal de entrada			Caudal de salida		Almacenamiento		
Fecha	Dado, pies³/s	Ajus., pies³/s	Prom., apd	Dado., pies³/s	Prom., apd	Cambio, apd	Acum., acre-pie	
		I_1 I_2	$I_1 + I_2$	O_1 O_2	$O_1 + O_2$	$S_2 - S_1$	S_1 S_2	$O_1 + S_1$ $O_2 + S_2$
Marzo 23	23.6	22.8	.....	18.5	.....	......	27.5	46.0
24	59.5	57.4	80.2	29.5	48.0	32.2	59.7	89.2
25	164.1	158.5	215.9	94.5	124.0	91.9	151.6	246.1
26	279.2	269.6	428.1	211.2	305.7	122.4	274.0	485.2
27	277.7	268.2	537.8	270.8	482.0	55.8	329.8	600.6
28	195.9	189.2	457.4	229.3	500.1	−42.7	287.1	516.4
29	133.9	129.4	318.6	168.5	397.8	−79.2	207.9	376.4
30	96.1	92.8	222.2	119.7	288.2	−66.0	141.9	261.6
31	74.5	71.9	164.7	96.8	216.5	−51.8	90.1	186.9
Abril 1	58.9	56.8	128.7	64.5	161.3	−32.6	57.5	122.0
2	46.8	45.1	101.9	50.2	114.7	−12.8	44.7	94.9
3	38.8	37.3	82.4	40.0	90.2	−7.8	36.9	76.9
4	34.0	32.8	70.1	34.0	74.0	−3.9	33.0	67.0
5	30.7	29.6	62.4	30.4	64.4	−2.0	31.0	61.4
6	27.6	26.6	56.2	28.0	58.4	−2.2	28.8	56.8
7	25.0	24.1	50.7	26.2	54.2	−3.5	25.3	51.5
Total...	1,566.3	1,512.1	.....	1,512.1				

Tabla 20-4. Cálculo del hidrograma de caudal de salida. (todas las cantidades en miles)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	Caudal de entrada		Caudal de salida	
Fecha (día)	Dado, pies³/s	Prom., apd	Dado, pies³/s	Ajus., pies³/s
	I_1 I_2	$I_1 + I_2$	O_1 O_2	O_1 O_2
1	20.0	.....	20.3	20.3
2	113.2	133.2	65.0	64.8
3	180.0	293.2	129.0	128.8
4	71.0	251.0	126.0	125.8
5	40.5	111.5	70.0	69.8
6	32.0	72.5	40.0	39.8
7	25.0	57.0	29.0	28.8
8	22.5	47.5	24.0	23.8
9	20.0	42.5	21.0	20.8
10	19.0	39.0	19.5	19.3
11	17.5	36.5	18.9	18.7
Total....	560.7	.....	562.7	560.7

Solución. En la tabla 20-3 se muestra el cálculo de curvas características. En la columna 2 los datos de flujo de entrada están compuestos por tres partes: el flujo de entrada diario en el extremo de aguas arriba del tramo, medido o transitado desde un tramo de aguas arriba; el flujo de entrada diario desde tributarios medidos o transitados que entren al tramo; y el flujo local contribuido por tributarios no aforados y superficies de terreno que drenan directamente a la corriente. El flujo de entrada local puede evaluarse a partir de la distribución de lluvia de la tormenta sobre el área que drena directamente al tramo. Como el flujo de salida total de una creciente es tal vez igual al flujo de entrada total, las sumas de los valores en las columnas 2 y 5 deben ser idénticas. Sin embargo, como es usual, las sumas aquí dadas no son iguales la una con respecto a la otra. Suponiendo que los valores del flujo de salida son más cercanos a los valores reales que a los del flujo de entrada, éstos se ajustan multiplicando los valores de la columna 5 por la relación 1,512.1/1,566.3 = 0.9654, y se relacionan en la columna 3. Los flujos de entrada y de salida promedios en apd son iguales a $I_1 + I_2$ y $O_1 + O_2$, respectivamente, donde I_1, I_2, O_1 y O_2 están en pies³/s. Los valores de $I_1 + I_2$ y $O_1 + O_2$ se dan en las columnas 4 y 6, respectivamente, y su diferencia es igual al cambio en el almacenamiento relacionada en la columna 7, debido a que $(I_1 + I_2) - (O_1 + O_2) = S_2 - S_1 = \Delta S$. Un valor positivo en la columna 7 indica que el almacenamiento aumenta, y uno negativo, que disminuye. La columna 8 da el almacenamiento acumulado calculado por medio de los valores de la columna 7, y su primer valor es decir, 27.5, representa el almacenamiento en el tramo el 23 de marzo inmediatamente antes de que empezara la creciente, el cual debe darse o estimarse. La suma de los valores en las columnas 5 y 8, u $O_1 + S_1$, se coloca en la columna 9. A partir de los valores de las columnas 8 y 9 se construyen las curvas características, como se muestra en la figura 20-12.

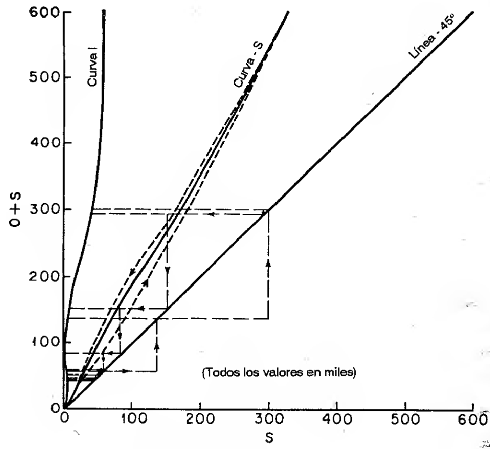


Figura 20-12. Curvas características para el ejemplo 20-2.

El cálculo del flujo de salida a partir del flujo de entrada para una creciente determinada se muestra en la tabla 20-4. En las columnas 1 y 2 se encuentran los datos de flujo de entrada. La columna 3 da el flujo de entrada promedio en apd, o $I_1 + I_2$. En la columna 4, el flujo de salida inicial se da como 20.3. Otros valores de éste se obtienen mediante las curvas características, según el procedimiento descrito antes. Estos valores, excepto para el flujo de salida inicial, se ajustan y se colocan en la columna 5 de manera que el flujo de entrada total coincida con el de salida total. Los hidrogramas de flujo de entrada y de salida para la creciente dada se construyen como se muestra en la figura 20-13 utilizando los valores de las columnas 1, 2 y 3.

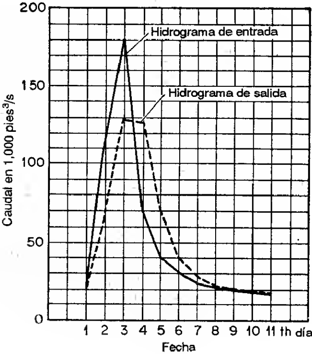


Figura 20-13. Hidrogramas de caudal de entrada y de salida para el ejemplo 20-2.

PROBLEMAS

20-1. Extienda el tránsito de la creciente del ejemplo 20-1 hasta un periodo de: *a*) 36 horas, y *b*) 120 horas.

20-2. Transite la siguiente onda solitaria hipotética a lo largo del tramo de canal descrito en el ejemplo 20-1:

Tiempo desde el inicio de la creciente, hr	*Celeridad, pies/s*
0	14.0
3	15.0
6	15.5
9	15.0
12	14.0

Las condiciones de flujo antes y después de la onda de creciente son uniformes, con una celeridad de 14.0 pies/s.

20-3. Verifique el cálculo de creciente unitaria que se muestra en la figura 20-4.

20-4. En un embalse de piscina nivelada en el que no se controla el caudal, el flujo de salida pico debe ocurrir cuando el hidrograma de flujo de salida interseca el hidrograma de flujo de entrada; es decir, en la figura 20-6 *P'* debe estar en I. ¿Por qué?

20-5. En el desarrollo de un proyecto para el control de crecientes en la cuenca de un río, se investiga la máxima creciente de registro. Los caudales para esta creciente en una estación *A* aguas arriba y en una estación *B* aguas abajo se registraron como se muestra en la siguiente tabla:

Fecha	Caudal de entrada en la estación A desde			Caudal de salida en la estación B		Caudales retenidos en la estación A, debido a embalses propuestos, pies³/s
	Principal, pies³/s	Tributarios, pies³/s	Local, pies³/s	Caudal, pies³/s	Altura de mira, pies	
Julio 29	13,600	1,900	3,000	20,800	14.4	0
30	20,100	46,300	63,800	33,000	19.6	60,000
31	106,000	50,100	72,100	80,800	35.1	149,000
Agosto 1	92,800	15,900	21,100	110,000	43.0	96,400
2	49,600	6,200	8,900	112,000	43.5	46,100
3	22,700	2,900	6,200	112,000	43.4	17,900
4	11,000	2,200	4,100	102,000	41.1	2,000
5	8,050	2,100	3,100	68,200	31.5	2,100
6	13,800	3,200	5,200	26,100	16.8	3,200
7	19,000	5,300	8,100	20,800	14.4	4,800
8	14,500	3,200	3,800	21,700	14.8	2,200

El flujo de entrada total en la estación *A* es igual a la suma de los caudales para la corriente principal, tributarios y áreas locales adyacentes al tramo. El almacenamiento en el tramo entre las estaciones *A* y *B* al inicio de la creciente se estimó en 50,000 acres-pies.

Para propósitos de control de crecientes, se propone un sistema de embalses en los tributarios, arriba de la estación *A*. El efecto de los embalses es retener los caudales desde el flujo en la estación *A*, como se muestra en la última columna de la tabla. Establezca el cambio en el nivel en la estación *B* para la creciente investigada como resultado del plan propuesto, suponiendo que el caudal es una función monovaluada del nivel.

REFERENCIAS

1. N. J. Dahl, "On non-permanent flow in open canals", *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association for Hydraulic Research, The Hague 1955*, Vol. 4, 1955, pp. D19-1 a D19-16.
2. Takeo Kinosita, "Hydrodynamical study on the flood flow", en "Floods", Vol. III de *Symposia Darcy*, Publicación Nº 42, *International Association of Scientific Hydrology*, 1956, pp. 56-63.
3. D. N. Dietz, "A new method for calculating the conduct of translation waves in prismatic canals", *Physica*, Vol. 8, Nº 2, febrero de 1941, pp. 177-195.
4. Junius Massau, Appendice au "Mémoire sur l'intégration graphique" (Appendix to "Memoir on graphical integration"), *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Gand*, Vol. 12, Ghent, Belgium, 1889, pp. 185-444.
5. Junius Massau, "Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles" ("Graphical integration of partial differential equations with special applications to unsteady flow in open channels"), *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Gand*, Vol. 23, Ghent, Belgium, 1900, pp. 95-214.
6. Marc Henry, "Propagation des intumescences dans un canal rectangulaire" ("Propagation of translatory waves in a rectangular channel"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 4, Nº 19, Paris, 1938, pp. 17-24; Nº 20, pp. 65-71.
7. Louis Bergeron, "Méthode graphique générale de calcul des propagations d'ondes planes" ("General graphical method of computation of the propagations of plane waves"), *Mémoires, Société des Ingénieurs Civils de la France*, julio-agosto de 1937, pp. 407-497.
8. Louis Bergeron, "Méthode graphique pour le calcul des ondes de translation" ("Graphical method for the computation of translatory waves"), *Société Française des Mécaniciens, Bulletin Nº 7*, Paris, 1953.
9. S. A. Khristianovich, "Neustanovivsheiesia dvizhenie v kanalakh i rekakh" ("Unsteady motion in channels and rivers"), en *Nekotoryie Voprosy Mekhaniki Sploshnoĭ Sredy* (*Several Questions on the Mechanics of Continuous Media*), Academy of Sciences, U.S.S.R., 1938, pp. 13-154.
10. Léon Lévin, "Méthode graphique de calcul du mouvement non permanent dans les canaux à écoulement libre" ("Graphic method of computation of unsteady flow in open channels"), *Le Génie civil*, Vol. 119, Nº 11-12, marzo 12-14 de 1942, pp. 109-113.
11. A. Craya, "Calcul graphique des régimes variables dans les canaux" ("Graphical computation of variable regimes of flow in channels"), *La Houille blanche*, Grenoble, 1er. año, Nº 1, noviembre de 1945, pp. 19-38, y Nº 2, marzo de 1946, pp. 117-130.
12. V. A. Arkhangelskiĭ, *Raschety Neustanovivshegosia Dvizheniia v Otkrytykh Vodotokakh* (*Calculation of Unsteady Flow in Open Channels*), Academy of Sciences, U.S.S.R., 1947.
13. H. Holsters, "Le Calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des 'lignes d'influence' " ("The computation of unsteady flow in rivers by the so-called 'influence-lines' method"), *Revue générale de l'hydraulique*, Vol. 13, Nº 37, Paris, 1947, pp. 36-39, Nº 38, pp. 93-94, Nº 39, pp. 121-130, Nº 40, pp. 202-206, y Nº 41, pp. 237-245.
14. H. Holsters, "Le Calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des 'lignes d'influence' " ("Calculation of nonpermanent flow in rivers by the method known as 'influence lines' "), *La Houille blanche*, 8º año, Nº 4, Grenoble, agosto-septiembre de 1953, pp. 495-509.

15. J. J. Stoker, "The formation of breakers and bores", *New York University, Communications on Applied Mathematics*, Vol. 1, Nº 1, enero de 1948, pp. 1-87.
16. J. J. Stoker, "Numerical solution of flood prediction and river regulation problems, I: Derivation of basic theory and formulation of numerical methods of attack", *New York University, Institute of Mathematical Sciences, Report Nº IMM-200*, 1953.
17. J. J. Stoker, "Water waves", Vol. IV de *Pure and Applied Mathematics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
18. Henri J. Putman, "Unsteady flow in open channels", *Transactions*, Vol. 29, Nº 2, *American Geophysical Union*, abril de 1948, pp. 227-232. Análisis por Pin-Nam Lin, Vol. 30, Nº 2, abril de 1949, pp. 302-306.
19. J. Lamoen, "Tides and current velocities in a sea-level canal", *Engineering*, Vol. 168, Nº 4357, julio 29 de 1949, pp. 97-99.
20. G. J. Dmitriev, "Vychislenie kharakteristik ustanovivshegosia plavno izmeniaiushchegosia dvizheniia v prizmaticheskikh ruslakh" ("Computation of characteristics of a steady gradually varying movement in prismatic channels"), *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, Vol. 68, Nº 5, Akademiia Nauk S.S.S.R, Leningrad, 1949, pp. 825-827.
21. Francis F. Escoffier, "A graphical method for investigating the stability of flow in open channels or in closed conduits flowing partly full", *Transactions*, Vol. 31, Nº 4, *American Geophysical Union*, agosto de 1950, pp. 583-586.
22. G. D. Ransford, "Contribution to first order theory of translation waves", *La Houille blanche*, año 6, Nº 6, Grenoble, septiembre-octubre de 1951, pp. 761-763.
23. Pin-Nam Lin, "Numerical analysis of continuous unsteady flow in open channels", *Transactions*, Vol. 33, Nº 2, *American Geophysical Union*, abril de 1952, pp. 227-234. Análisis por J. C. Schönfeld y Pin-Nam Lin, Vol. 34, Nº 5, octubre de 1953, pp. 792-795.
24. Shigeo Uchida, "On the analysis of flood wave in a reservoir by the method of characteristics", *Proceedings of the 2d. Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1952, pp. 271-276.
25. J. Nougaro, "Recherches expérimentales sur les intumescences dans les canaux découverts" ("Experimental researches on translatory waves in open channels") *Société Française des Mécaniciens, Bulletin Nº 9*, Paris, 1953, pp. 23-35.
26. J. Nougaro, "Theoretical and experimental studies of the propagation of the translation waves in open channels", *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Joint Meeting of International Association for Hydraulic Research and Hydraulics Division of American Society of Civil Engineers*, agosto de 1953, pp. 555-559.
27. Jean Nougaro, "Étude théorique et expérimentale de la propagation des intumescences dans les canaux découverts" ("Theoretical and experimental study of the propagation of translation waves in open channels"), *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, France*, Nº 284, 1953.
28. J. Nougaro, "Méthode graphique pour le calcul de la propagation des intumescences dans les canaux découverts" ("Graphical method for the computation of the propagation of translatory waves in open channels"), *Proceedings of the 6th. General Meeting, International Association for Hydraulic Research, The Hague 1955*, Vol. 4, 1955, pp. D5-1 a D5-15.
29. Yuichi Iwagaki y Tomitaro Sueishi, "On the unsteady flow in open channels with uniform lateral inflow" (en japonés), *Proceedings*, Vol. 29, Nº 11, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, noviembre de 1954.
30. Yuichi Iwagaki, "Fundamental studies on the runoff analysis by characteristics", *Kyoto University, Disaster Prevention Research Institute, Bulletin Nº 10*, Kyoto, Japan, diciembre de 1955.
31. Tomitaro Sueishi, "On the run-off analysis by the method of characteristics" (en japonés), *Transactions*, Nº 29, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, diciembre de 1955, pp. 74-87.
32. E. J. Isaacson, J. J. Stoker, y B. A. Troesch, "Numerical solution of flood prediction and river regulation problems, Report 2: Numerical solution of flood problems in simplified models of the Ohio River and the junction of the Ohio and Mississippi Rivers", *New York University, Institute of Mathematical Sciences, Report Nº IMM-205*, 1954.

33. E. J. Isaacson, J. J. Stoker, y B. A. Troesch, "Numerical solution of flood prediction and river regulation problems, Report 3: Results of the numerical prediction of the 1945 and 1948 floods in the Ohio River, of the 1947 flood through the junction of the Ohio and Mississippi Rivers, and of the floods of 1950 and 1948 through Kentucky Reservoir", *New York University, Institute of Mathematical Sciences, Report Nº IMM-NYU-235*, 1956.
34. Edward A. Lawler y Frank V. Druml, "Hydraulic problem solution on electronic computers", artículo 1515, *Proceedings, Journal*, Vol. 84, Nº WW1, *American Society of Civil Engineers, Waterways and Harbors Division*, enero de 1958, pp. 1-38.
35. Georg Joos, *Theoretical Physics*, 2a. ed., Hafner Publishing Company, New York, 1950, pp. 590-594.
36. Shih-I Pai, "Viscous Flow Theory", Vol. II, *Turbulent Flow*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1957, pp. 179-183 y 186-187.
37. Alfred Schack, *Industrial Heat Transfer*, traducido del alemán por Hans Goldschmidt y Everett P. Partridge, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933, p. 29.
38. Shoitiro Hayami, "On the propagation of flood waves", *Kyoto University, Disaster Prevention Research Institute, Bulletin 1*, Kyoto, Japan, diciembre de 1951.
39. F. V. Appleby, "Runoff dynamics: A heat conduction analogue of storage flow in channel networks", *Assemblée Générale de Rome, 1954, International Association of Scientific Hydrology, Publicación Nº 38*, Vol. 3, 1954, pp. 338-348.
40. Tojiro Ishihara, Shoitiro Hayami y Shigenori Hayami, "On the electronic analog computer for flood routing", *Proceedings of the Japan Academy*, Vol. 30, Nº 9, Tokyo, 1954, pp. 891-895.
41. Tojiro Ishihara y Yasuo Ishihara, "On the electronic analog computer for flood routing" (en japonés), *Transactions*, Nº 24, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, abril de 1955, pp. 44-57.
42. Tojiro Ishihara y Yasuo Ishihara, "Electronic analog computer for flood flows in the Yodo River" (en japonés), *Proceedings*, Vol. 41, Nº 8, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, agosto de 1956, pp. 21-24.
43. Tojiro Ishihara, "Application of electronic analog computer for flood routing to actual rivers" (en japonés), *Transactions*, Nº 43, *Japan Society of Civil Engineers*, Tokyo, febrero de 1957, pp. 43-47.
44. Tojiro Ishihara, Shoitiro Hayami y Shigenori Hayami, "Electronic analog computer for flood flows", *Proceedings of the Regional Technical Conference on Water Resources Development in Asia and the Far East, United Nations Economic Commission for Asia and the Far East, Flood Control Series Nº 9*, Bangkok, 1956, pp. 170-174.
45. B. R. Gilcrest, "Flood routing", capítulo X de *Engineering Hydraulics*, editado por Hunter Rouse, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, pp. 635-710.
46. "Flood routing", capítulo V de *Flood Control*, The Engineer School, Fort Belvoir, Virginia, 1940, pp. 127-177.
47. "Flood routing", capítulo 6.10 de la parte 6, "Flood Hydrology", Vol. IV, "Water Studies", *U. S. Bureau of Reclamation Manual*, diciembre 30 de 1947.
48. Ray K. Linsley, Jr., Max A. Kohler, Joseph L. H. Paulhus, "Stream routing", *Applied Hydrology*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949, capítulo 19, pp. 485-541.
49. Ven Te Chow, "Hydrologic studies of floods in the United States", en "Floods", Vol. III de *Symposia Darcy, Publicación Nº 42, International Association of Scientific Hydrology*, 1956, pp. 134-170.
50. "Flood routing", Art. 3.17 de Sec. 4, "Hydrology", *U. S. Soil Conservation Service, Engineering Handbook, Suplemento A*, 1957, pp. 1-28.
51. W. Rippl, "The capacity of storage-reservoir for water-supply", *Minutes of Proceedings*, Vol. 71, *Institution of Civil Engineers*, London, 1883, pp. 270-278.
52. Armin Schoklitsch, *Hydraulic Structures*, Vol. 1, traducido del alemán por Samuel Shulits, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1937, pp. 65-67.
53. H. K. Barrows, *Water Power Engineering*, 3ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1943, pp. 199-201.

54. Don Johnstone y William P. Cross, *Elements of Applied Hydrology*, The Ronald Press Company, New York, 1949, pp. 163-167.
55. Kenneth E. Sorensen, "Graphical solution of hydraulic problems", *Transactions*, Vol. 118, American Society of Civil Engineers, 1953, pp. 61-77.
56. Calvin Victor Davis (editor en jefe), *Handbook of Applied Hydraulics*, 2ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952. Sec. 1, "River regulation by reservoirs", por Theodore T. Knappen, James H. Stratton, y Calvin V. Davis, pp. 1-21; y Apéndice B, "Graphical aids to hydraulic computations", por Kenneth E. Sorensen, pp. 1229-1248.
57. Otto H. Meyer, "Simplified flood routing", *Civil Engineering*, Vol. 11, Nº 5, mayo de 1941, pp. 306-307.
58. Louis G. Puls, "Flood regulation of the Tennessee River", *House Document*, Nº 185, parte 2, apéndice B, 70th. Congress 1st. Session, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1928.
59. Stanley S. Butler, *Engineering Hydrology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1957, pp. 208-212.
60. Walter T. Wilson, "A graphical flood-routing method", *Transactions*, Vol. 22, parte III, *American Geophysical Union*, 1941, pp. 893-897.
61. H. M. Cheng, "A graphical solution for flood routing problems", *Civil Engineering*, Vol. 16, Nº 3, marzo de 1946, pp. 126-128.
62. Ven Te Chow, "A practical procedure of flood routing", *Civil Engineering and Public Works Review*, Vol. 46, Nº 542, London, agosto de 1951, pp. 586-588, reimpreso como *University of Illinois, Civil Engineering Studies, Hydraulic Engineering Series Nº 1*, Urbana, Ill., noviembre 1 de 1951.
63. R. D. Goodrich, "Rapid calculation of reservoir discharge", *Civil Engineering*, Vol. 1, Nº 5, febrero de 1931, pp. 417-418.
64. E. J. Rutter, Q. B. Graves y F. F. Snyder, "Flood routing", *Transactions*, Vol. 104, *American Society of Civil Engineers*, 1939, pp. 275-294.
65. C. O. Wisler y E. F. Brater, "A direct method of flood routing", *Transactions*, Vol. 107, *American Society of Civil Engineers*, 1942, pp. 1519-1529.
66. I. H. Steinberg, "A method of flood routing", *Civil Engineering*, Vol. 8, Nº 7, julio de 1938, pp. 476-477.
67. R. K. Linsley, "Use of nomographs in solving streamflow routing problems", *Civil Engineering*, Vol. 14, Nº 5, mayo de 1944, pp. 209-210.
68. C. J. Posey, "Slide rule for routing floods through storage reservoirs or lakes", *Engineering News-Record*, Vol. 114, abril 25 de 1935, pp. 580-581.
69. Sherman M. Woodward y Chesley J. Posey, *Hydraulics of Steady Flow in Open Channels*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1941, pp. 133-145.
70. J. M. Shepley y C. B. Walton, "Solving reservoir problems with circular point-by-point computer", *Civil Engineering*, Vol. 12, Nº 3, marzo de 1942, pp. 154-155.
71. F. E. Tatum, "A simplified method of routing flood flows through natural valley storage", memorando no publicado, U.S. Engineer's Office, Rock Island, Ill., mayo 29 de 1940.
72. G. T. McCarthy, "The unit hydrograph and flood routing", unpublished manuscript, presented at a conference of the North Atlantic Division, U.S. Army, Corps of Engineers, junio 24 de 1938.
73. E. W. Lane, "Predicting stages for the Lower Mississippi", *Civil Engineering*, Vol. 7, Nº 2, febrero de 1937, pp. 122-125.
74. Max A. Kohler, "A forecasting technique for routing and combining flow in terms of stage", *Transactions*, Vol. 25, parte VI, *American Geophysical Union*, 1944, pp. 1030-1035.
75. Ralph E. King, "Stage predictions for flood control operations", *Transactions*, Vol. 117, *American Society of Civil Engineers*, 1952, pp. 690-698.
76. William E. Ray y Herman F. Mondschein, "A method of forecasting stages on flat rivers", *Transactions*, Vol. 38, Nº 5, *American Geophysical Union*, octubre de 1957, pp. 698-707.

77. J. F. Tarpley, Jr., "A new integrating machine", *Military Engineer*, Vol. 32, Nº 181, 1939, pp. 39-43.
78. Frank B. Harkness, "Harkness flood router: Specifications of construction and operation", *Patent File* Nº 2,550,692, U.S. Patent Office, Washington, D.C., mayo 1º de 1951.
79. R. K. Linsley, L. W. Foskett, y M. A. Kohler, "Electronic device speeds flood forecasting", *Engineering News-Record*, Vol. 141, Nº 26, diciembre 23 de 1948, pp. 64-66.
80. R. K. Linsley, L. W. Foskett y M. A. Kohler, "Use of electronical analogy in flood wave analysis", *Comptes rendus et rapports de l'Assemblée Générale d'Oslo*, 19-28 août 1948, Vol. I, Publicación Nº 29, International Association of Scientific Hydrology, 1948, pp. 221-227.
81. M. A. Kohler, "Application of electronic flow routing analog", *Transactions*, Vol. 118, *American Society of Civil Engineers*, 1953, pp. 1028-1045.

APÉNDICES

Apéndice A. Elementos geométricos de secciones de canales circulares

d_0 = diámetro R = radio hidráulico
y = profundidad de flujo T = ancho superficial
A = área mojada D = profundidad hidráulica
P = perímetro mojado $Z = A\sqrt{D}$ = factor de sección para el cálculo de flujo crítico

$\frac{y}{d_0}$	$\frac{A}{d_0^2}$	$\frac{P}{d_0}$	$\frac{R}{d_0}$	$\frac{T}{d_0}$	$\frac{D}{d_0}$	$\frac{Z}{d_0^{2.5}}$	$\frac{AR^{2/3}}{d_0^{8/3}}$
0.01	0.0013	0.2003	0.0066	0.1990	0.0066	0.0001	0.0000
0.02	0.0037	0.2838	0.0132	0.2800	0.0134	0.0004	0.0002
0.03	0.0069	0.3482	0.0197	0.3412	0.0202	0.0010	0.0005
0.04	0.0105	0.4027	0.0262	0.3919	0.0268	0.0017	0.0009
0.05	0.0147	0.4510	0.0326	0.4359	0.0336	0.0027	0.0015
0.06	0.0192	0.4949	0.0389	0.4750	0.0406	0.0039	0.0022
0.07	0.0242	0.5355	0.0451	0.5103	0.0474	0.0053	0.0031
0.08	0.0294	0.5735	0.0513	0.5426	0.0542	0.0069	0.0040
0.09	0.0350	0.6094	0.0574	0.5724	0.0612	0.0087	0.0052
0.10	0.0409	0.6435	0.0635	0.6000	0.0682	0.0107	0.0065
0.11	0.0470	0.6761	0.0695	0.6258	0.0752	0.0129	0.0079
0.12	0.0534	0.7075	0.0754	0.6499	0.0822	0.0153	0.0095
0.13	0.0600	0.7377	0.0813	0.6726	0.0892	0.0179	0.0113
0.14	0.0668	0.7670	0.0871	0.6940	0.0964	0.0217	0.0131
0.15	0.0739	0.7954	0.0929	0.7141	0.1034	0.0238	0.0152
0.16	0.0811	0.8230	0.0986	0.7332	0.1106	0.0270	0.0173
0.17	0.0885	0.8500	0.1042	0.7513	0.1178	0.0304	0.0196
0.18	0.0961	0.8763	0.1097	0.7684	0.1252	0.0339	0.0220
0.19	0.1039	0.9020	0.1152	0.7846	0.1324	0.0378	0.0247
0.20	0.1118	0.9273	0.1206	0.8000	0.1398	0.0418	0.0273
0.21	0.1199	0.9521	0.1259	0.8146	0.1472	0.0460	0.0301
0.22	0.1281	0.9764	0.1312	0.8285	0.1546	0.0503	0.0333
0.23	0.1365	1.0003	0.1364	0.8417	0.1622	0.0549	0.0359
0.24	0.1449	1.0239	0.1416	0.8542	0.1696	0.0597	0.0394
0.25	0.1535	1.0472	0.1466	0.8660	0.1774	0.0646	0.0427
0.26	0.1623	1.0701	0.1516	0.8773	0.1850	0.0697	0.0464
0.27	0.1711	1.0928	0.1566	0.8879	0.1926	0.0751	0.0497
0.28	0.1800	1.1152	0.1614	0.8980	0.2004	0.0805	0.0536
0.29	0.1890	1.1373	0.1662	0.9075	0.2084	0.0862	0.0571
0.30	0.1982	1.1593	0.1709	0.9165	0.2162	0.0921	0.0610

Apéndice A. Elementos geométricos de secciones de canales circulares (*continuación*)

$\frac{y}{d_0}$	$\frac{A}{d_0^2}$	$\frac{P}{d_0}$	$\frac{R}{d_0}$	$\frac{T}{d_0}$	$\frac{D}{d_0}$	$\frac{Z}{d_0^{2.5}}$	$\frac{AR^{2/3}}{d_0^{8/3}}$
0.31	0.2074	1.1810	0.1755	0.9250	0.2242	0.0981	0.0650
0.32	0.2167	1.2025	0.1801	0.9330	0.2322	0.1044	0.0690
0.33	0.2260	1.2239	0.1848	0.9404	0.2404	0.1107	0.0736
0.34	0.2355	1.2451	0.1891	0.9474	0.2486	0.1172	0.0776
0.35	0.2450	1.2661	0.1935	0.9539	0.2568	0.1241	0.0820
0.36	0.2546	1.2870	0.1978	0.9600	0.2652	0.1310	0.0864
0.37	0.2642	1.3078	0.2020	0.9656	0.2736	0.1381	0.0909
0.38	0.2739	1.3284	0.2061	0.9708	0.2822	0.1453	0.0955
0.39	0.2836	1.3490	0.2102	0.9755	0.2908	0.1528	0.1020
0.40	0.2934	1.3694	0.2142	0.9798	0.2994	0.1603	0.1050
0.41	0.3032	1.3898	0.2181	0.9837	0.3082	0.1682	0.1100
0.42	0.3132	1.4101	0.2220	0.9871	0.3172	0.1761	0.1147
0.43	0.3229	1.4303	0.2257	0.9902	0.3262	0.1844	0.1196
0.44	0.3328	1.4505	0.2294	0.9928	0.3352	0.1927	0.1245
0.45	0.3428	1.4706	0.2331	0.9950	0.3446	0.2011	0.1298
0.46	0.3527	1.4907	0.2366	0.9968	0.3538	0.2098	0.1348
0.47	0.3627	1.5108	0.2400	0.9982	0.3634	0.2186	0.1401
0.48	0.3727	1.5308	0.2434	0.9992	0.3730	0.2275	0.1452
0.49	0.3827	1.5508	0.2467	0.9998	0.3828	0.2366	0.1505
0.50	0.3927	1.5708	0.2500	1.0000	0.3928	0.2459	0.1558
0.51	0.4027	1.5908	0.2531	0.9998	0.4028	0.2553	0.1610
0.52	0.4127	1.6108	0.2561	0.9992	0.4130	0.2650	0.1664
0.53	0.4227	1.6308	0.2591	0.9982	0.4234	0.2748	0.1715
0.54	0.4327	1.6509	0.2620	0.9968	0.4340	0.2848	0.1772
0.55	0.4426	1.6710	0.2649	0.9950	0.4448	0.2949	0.1825
0.56	0.4526	1.6911	0.2676	0.9928	0.4558	0.3051	0.1878
0.57	0.4625	1.7113	0.2703	0.9902	0.4670	0.3158	0.1933
0.58	0.4723	1.7315	0.2728	0.9871	0.4786	0.3263	0.1987
0.59	0.4822	1.7518	0.2753	0.9837	0.4902	0.3373	0.2041
0.60	0.4920	1.7722	0.2776	0.9798	0.5022	0.3484	0.2092
0.61	0.5018	1.7926	0.2797	0.9755	0.5144	0.3560	0.2146
0.62	0.5115	1.8132	0.2818	0.9708	0.5270	0.3710	0.2199
0.63	0.5212	1.8338	0.2839	0.9656	0.5398	0.3830	0.2252
0.64	0.5308	1.8546	0.2860	0.9600	0.5530	0.3945	0.2302
0.65	0.5404	1.8755	0.2881	0.9539	0.5666	0.4066	0.2358

Apéndice A. Elementos geométricos de secciones de canales circulares (*continuación*)

$\frac{y}{d_0}$	$\frac{A}{d_0^2}$	$\frac{P}{d_0}$	$\frac{R}{d_0}$	$\frac{T}{d_0}$	$\frac{D}{d_0}$	$\frac{Z}{d_0^{2.5}}$	$\frac{AR^{2/3}}{d_0^{8/3}}$
0.66	0.5499	1.8965	0.2899	0.9474	0.5804	0.4188	0.2407
0.67	0.5594	1.9177	0.2917	0.9404	0.5948	0.4309	0.2460
0.68	0.5687	1.9391	0.2935	0.9330	0.6096	0.4437	0.2510
0.69	0.5780	1.9606	0.2950	0.9250	0.6250	0.4566	0.2560
0.70	0.5872	1.9823	0.2962	0.9165	0.6408	0.4694	0.2608
0.71	0.5964	2.0042	0.2973	0.9075	0.6572	0.4831	0.2653
0.72	0.6054	2.0264	0.2984	0.8980	0.6742	0.4964	0.2702
0.73	0.6143	2.0488	0.2995	0.8879	0.6918	0.5100	0.2751
0.74	0.6231	2.0714	0.3006	0.8773	0.7104	0.5248	0.2794
0.75	0.6318	2.0944	0.3017	0.8660	0.7296	0.5392	0.2840
0.76	0.6404	2.1176	0.3025	0.8542	0.7498	0.5540	0.2888
0.77	0.6489	2.1412	0.3032	0.8417	0.7710	0.5695	0.2930
0.78	0.6573	2.1652	0.3037	0.8285	0.7934	0.5850	0.2969
0.79	0.6655	2.1895	0.3040	0.8146	0.8170	0.6011	0.3008
0.80	0.6736	2.2143	0.3042	0.8000	0.8420	0.6177	0.3045
0.81	0.6815	2.2395	0.3044	0.7846	0.8686	0.6347	0.3082
0.82	0.6893	2.2653	0.3043	0.7684	0.8970	0.6524	0.3118
0.83	0.6969	2.2916	0.3041	0.7513	0.9276	0.6707	0.3151
0.84	0.7043	2.3186	0.3038	0.7332	0.9606	0.6897	0.3182
0.85	0.7115	2.3462	0.3033	0.7141	0.9964	0.7098	0.3212
0.86	0.7186	2.3746	0.3026	0.6940	1.0354	0.7307	0.3240
0.87	0.7254	2.4038	0.3017	0.6726	1.0784	0.7528	0.3264
0.88	0.7320	2.4341	0.3008	0.6499	1.1264	0.7754	0.3286
0.89	0.7380	2.4655	0.2996	0.6258	1.1800	0.8016	0.3307
0.90	0.7445	2.4981	0.2980	0.6000	1.2408	0.8285	0.3324
0.91	0.7504	2.5322	0.2963	0.5724	1.3110	0.8586	0.3336
0.92	0.7560	2.5681	0.2944	0.5426	1.3932	0.8917	0.3345
0.93	0.7612	2.6061	0.2922	0.5103	1.4918	0.9292	0.3350
0.94	0.7662	2.6467	0.2896	0.4750	1.6130	0.9725	0.3353
0.95	0.7707	2.6906	0.2864	0.4359	1.7682	1.0242	0.3349
0.96	0.7749	2.7389	0.2830	0.3919	1.9770	1.0888	0.3340
0.97	0.7785	2.7934	0.2787	0.3412	2.2820	1.1752	0.3322
0.98	0.7816	2.8578	0.2735	0.2800	2.7916	1.3050	0.3291
0.99	0.7841	2.9412	0.2665	0.1990	3.9400	1.5554	0.3248
1.00	0.7854	3.1416	0.2500	0.0000	∞	∞	0.3117

Apéndice B. Elementos geométricos de secciones de canales trapezoidales, triangulares y parabólicas
(el uso de los cuadros* no requiere explicación)

* Reproducidos con el permiso del U. S. Agricultural Research Service, gracias a la cortesía de Mr. W. O. Ree, del *Handbook of Channel Design for Soil and Water Conservation*, preparado por el Stillwater Outdoor Hydraulic Laboratory, U. S. Soil Conservation Service, SCS-TP-61, marzo de 1947, y revisado en junio de 1954.

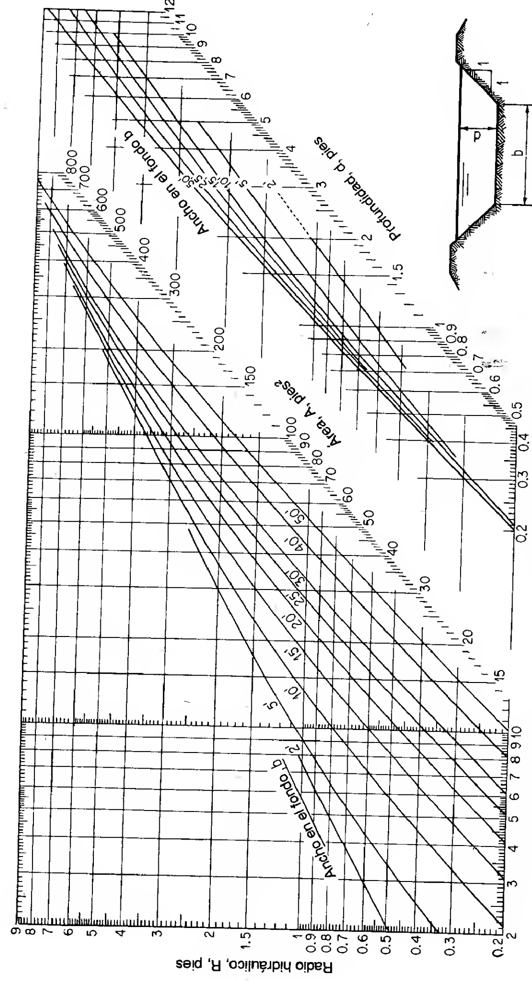


Figura B-1. Elementos geométricos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 1:1.

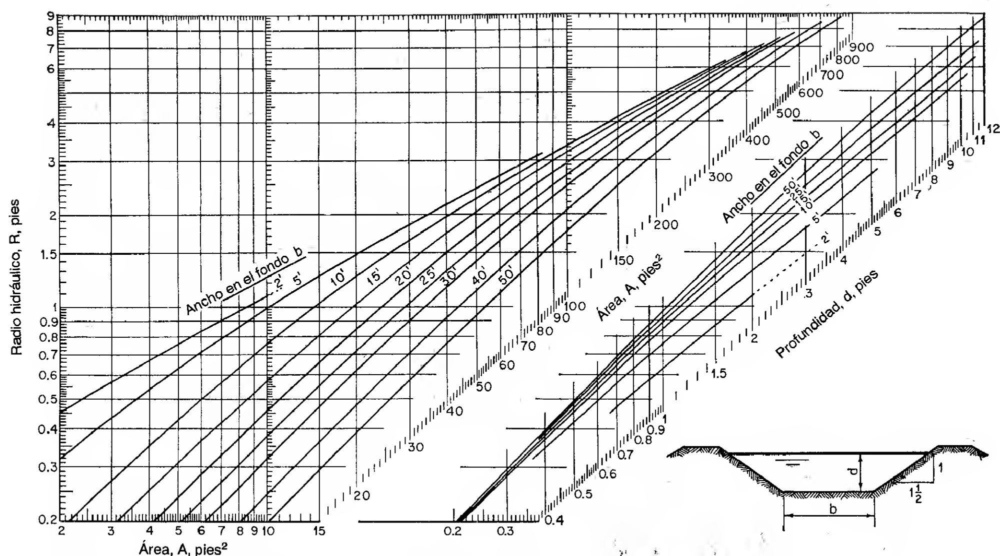


Figura B-2. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 1.5:1.

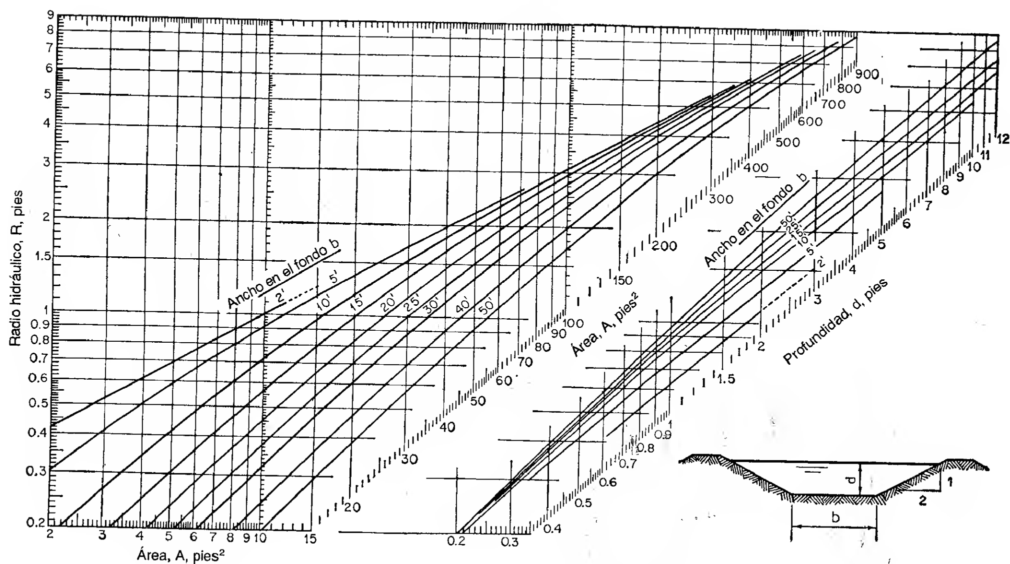


Figura B-3. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 2:1

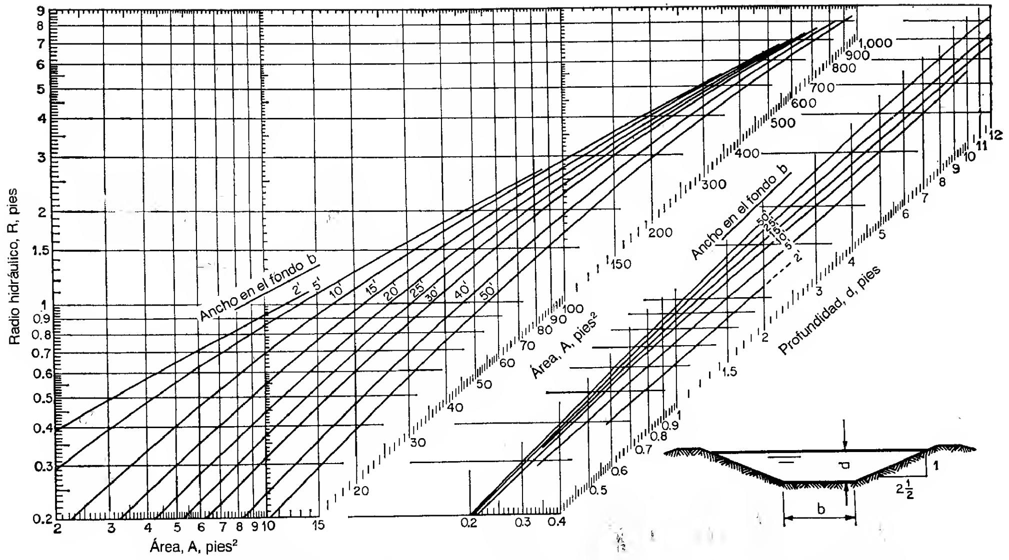


Figura B-4. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 2.5:1.

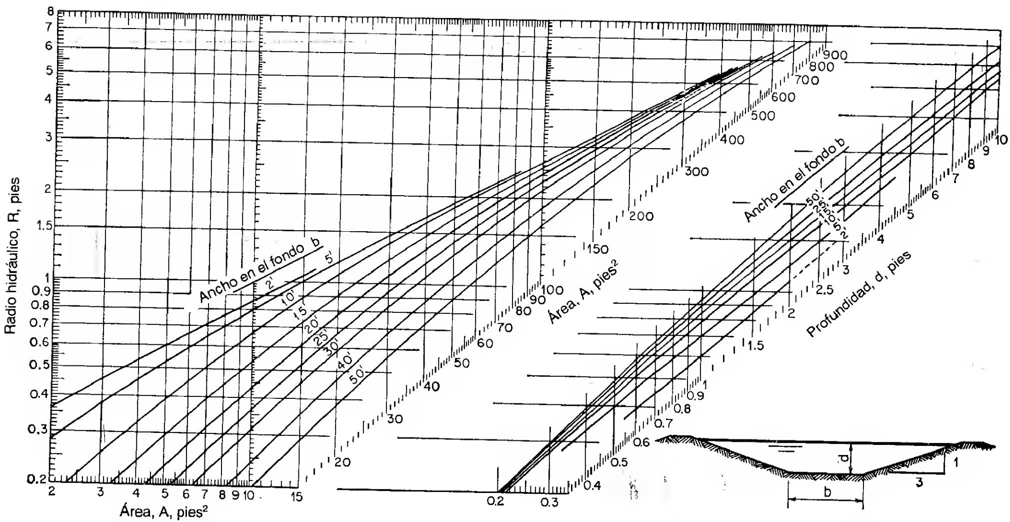


Figura B-5. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 3:1.

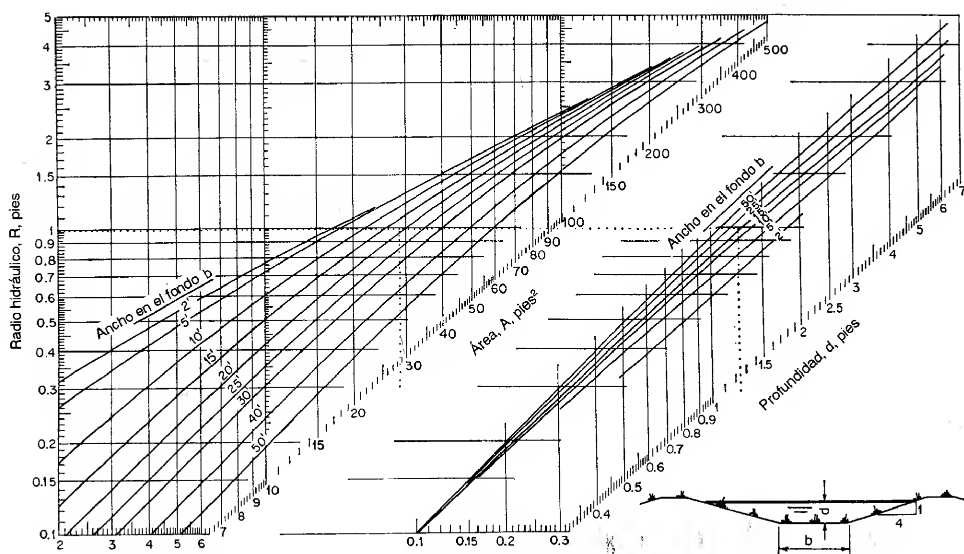


Figura B-6. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 4:1.

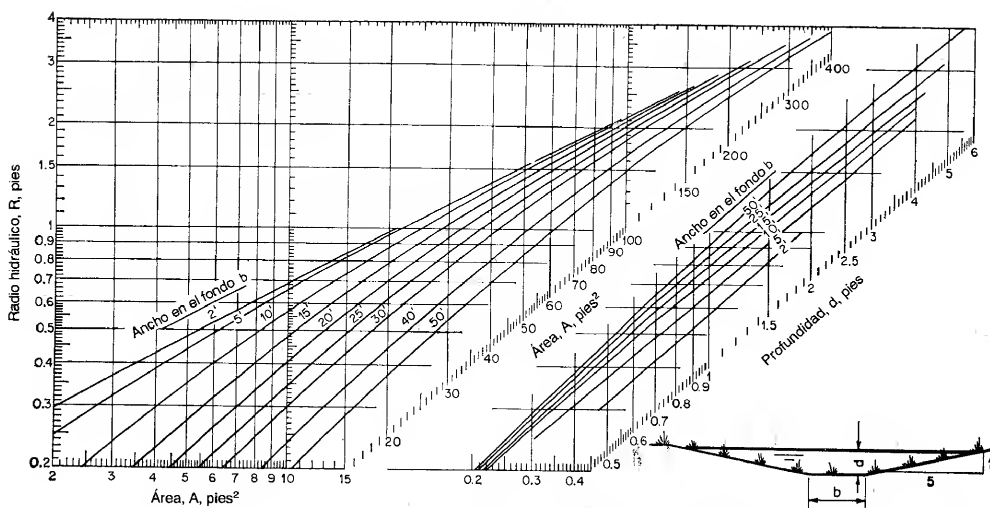


Figura B-7. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 5:1.

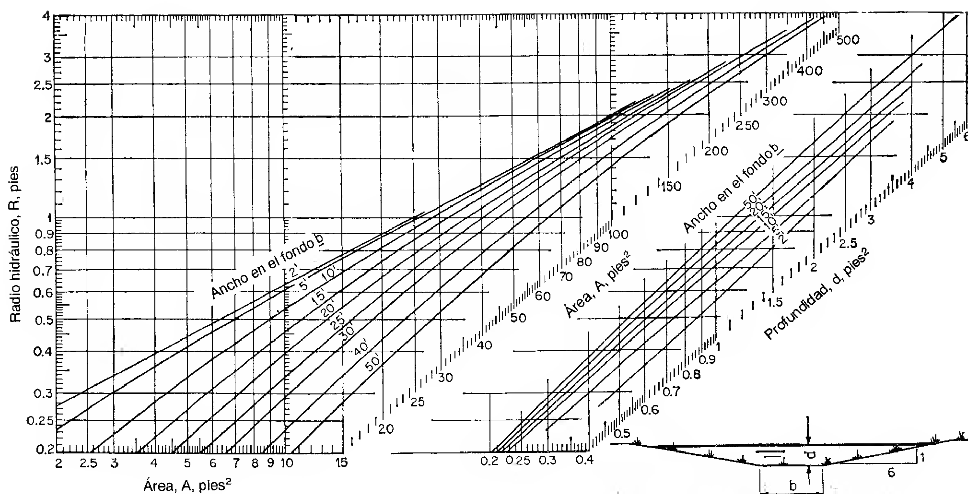


Figura B-8. Elementos hidráulicos de secciones de canales trapezoidales con pendientes laterales de 6:1

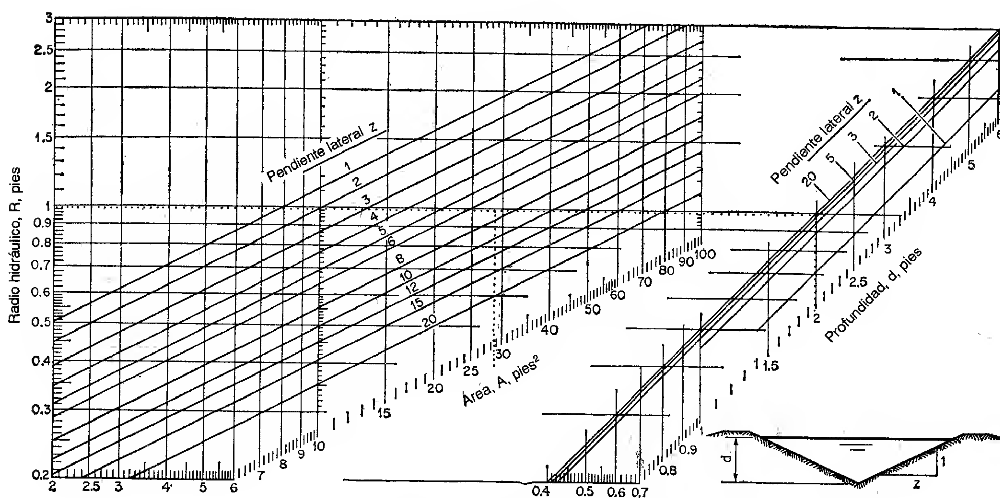


Figura B-9. Elementos hidráulicos de canales triangulares.

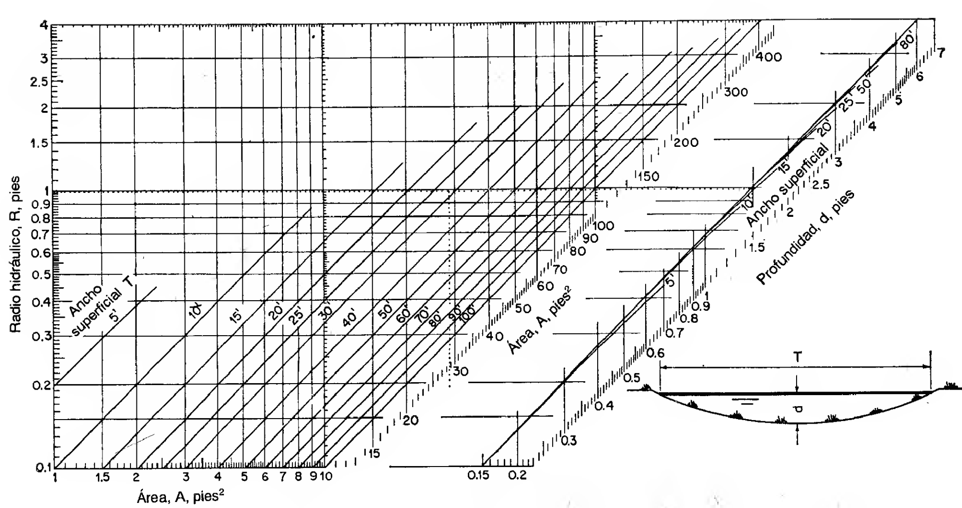
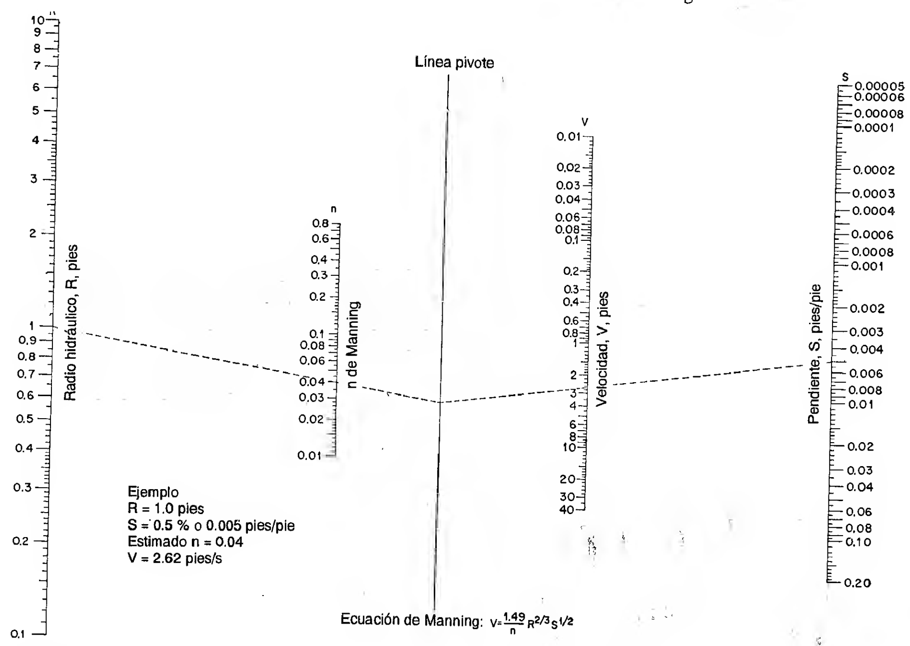


Figura B-10. Elementos hidráulicos de canales parabólicos.

Apéndice C. Solución nomográfica de la ecuación de Manning*



* Reproducida con el permiso del U. S. Agricultural Research Service, gracias a la cortesía de Mr. W. O. Ree, del *Handbook of Channel Design for Soil and Water Conservation*, preparado por el Stillwater Outdoor Hydraulic Laboratory, U. S. Soil Conservation Service, SCS-TP-61, marzo de 1947, y revisado en junio de 1954.

Apéndice D. Tablas de las funciones de flujo variado*

$$F(u,N) = \int_0^u \frac{du}{1 - u^N} \quad \text{y} \quad F(u,N)_{-s_0} = \int_0^u \frac{du}{1 + u^N}$$

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.141	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.161	0.161	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.202	0.201	0.201	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.223	0.222	0.221	0.221	0.221	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.243	0.242	0.242	0.241	0.241	0.241	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.264	0.263	0.262	0.262	0.261	0.261	0.261	0.260	0.260	0.260
0.28	0.286	0.284	0.283	0.282	0.282	0.281	0.281	0.281	0.280	0.280
0.30	0.307	0.305	0.304	0.303	0.302	0.302	0.301	0.301	0.301	0.300
0.32	0.329	0.326	0.325	0.324	0.323	0.322	0.322	0.321	0.321	0.321
0.34	0.350	0.348	0.346	0.344	0.343	0.343	0.342	0.342	0.341	0.341
0.36	0.373	0.370	0.367	0.366	0.364	0.363	0.363	0.362	0.362	0.361
0.38	0.395	0.392	0.389	0.387	0.385	0.384	0.383	0.383	0.382	0.382
0.40	0.418	0.414	0.411	0.408	0.407	0.405	0.404	0.403	0.403	0.402
0.42	0.441	0.437	0.433	0.430	0.428	0.426	0.425	0.424	0.423	0.423
0.44	0.465	0.460	0.456	0.452	0.450	0.448	0.446	0.445	0.444	0.443
0.46	0.489	0.483	0.478	0.475	0.472	0.470	0.468	0.466	0.465	0.464
0.48	0.514	0.507	0.502	0.497	0.494	0.492	0.489	0.488	0.486	0.485
0.50	0.539	0.531	0.525	0.521	0.517	0.514	0.511	0.509	0.508	0.506
0.52	0.565	0.556	0.550	0.544	0.540	0.536	0.534	0.531	0.529	0.528
0.54	0.592	0.582	0.574	0.568	0.563	0.559	0.556	0.554	0.551	0.550
0.56	0.619	0.608	0.600	0.593	0.587	0.583	0.579	0.576	0.574	0.572
0.58	0.647	0.635	0.626	0.618	0.612	0.607	0.603	0.599	0.596	0.594
0.60	0.676	0.663	0.653	0.644	0.637	0.631	0.627	0.623	0.620	0.617
0.61	0.691	0.677	0.666	0.657	0.650	0.644	0.639	0.635	0.631	0.628
0.62	0.707	0.692	0.680	0.671	0.663	0.657	0.651	0.647	0.643	0.640
0.63	0.722	0.707	0.694	0.684	0.676	0.669	0.664	0.659	0.655	0.652
0.64	0.738	0.722	0.709	0.698	0.690	0.683	0.677	0.672	0.667	0.664
0.65	0.754	0.737	0.724	0.712	0.703	0.696	0.689	0.684	0.680	0.676
0.66	0.771	0.753	0.739	0.727	0.717	0.709	0.703	0.697	0.692	0.688
0.67	0.787	0.769	0.754	0.742	0.731	0.723	0.716	0.710	0.705	0.701
0.68	0.805	0.785	0.769	0.757	0.746	0.737	0.729	0.723	0.718	0.713
0.69	0.822	0.802	0.785	0.772	0.761	0.751	0.743	0.737	0.731	0.726

* La tabla de la función de flujo variado para pendientes positivas $F(u,N)$ se reprodujo de Ven Te Chow, "Integrating the equation of gradually varied flow", *Proceedings*, Vol. 81, artículo Nº 838, *American Society of Civil Engineers*, noviembre de 1955, pp. 1-32. La tabla de la función de flujo variado para pendientes negativas $F(u,N)_{-s_0}$ se reprodujo del análisis final del autor sobre este artículo en *Proceedings*, Vol. 83, *Journal of Hydraulics Division*, No. HY1, artículo No. 1,117, febrero de 1957, pp. 9-22.

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.70	0.841	0.819	0.802	0.787	0.776	0.766	0.757	0.750	0.744	0.739
0.71	0.859	0.837	0.819	0.804	0.791	0.781	0.772	0.764	0.758	0.752
0.72	0.878	0.855	0.836	0.820	0.807	0.796	0.786	0.779	0.772	0.766
0.73	0.898	0.874	0.853	0.837	0.823	0.811	0.802	0.793	0.786	0.780
0.74	0.918	0.893	0.871	0.854	0.840	0.827	0.817	0.808	0.800	0.794
0.75	0.939	0.912	0.890	0.872	0.857	0.844	0.833	0.823	0.815	0.808
0.76	0.961	0.933	0.909	0.890	0.874	0.861	0.849	0.839	0.830	0.823
0.77	0.984	0.954	0.929	0.909	0.892	0.878	0.866	0.855	0.846	0.838
0.78	1.007	0.976	0.950	0.929	0.911	0.896	0.883	0.872	0.862	0.854
0.79	1.031	0.998	0.971	0.949	0.930	0.914	0.901	0.889	0.879	0.870
0.80	1.056	1.022	0.994	0.970	0.950	0.934	0.919	0.907	0.896	0.887
0.81	1.083	1.047	1.017	0.992	0.971	0.954	0.938	0.925	0.914	0.904
0.82	1.110	1.072	1.041	1.015	0.993	0.974	0.958	0.945	0.932	0.922
0.83	1.139	1.099	1.067	1.039	1.016	0.996	0.979	0.965	0.952	0.940
0.84	1.170	1.128	1.093	1.064	1.040	1.019	1.001	0.985	0.972	0.960
0.85	1.202	1.158	1.122	1.091	1.065	1.043	1.024	1.007	0.993	0.980
0.86	1.236	1.190	1.151	1.119	1.092	1.068	1.048	1.031	1.015	1.002
0.87	1.273	1.224	1.183	1.149	1.120	1.095	1.074	1.055	1.039	1.025
0.88	1.312	1.260	1.217	1.181	1.151	1.124	1.101	1.081	1.064	1.049
0.89	1.355	1.300	1.254	1.216	1.183	1.155	1.131	1.110	1.091	1.075
0.90	1.401	1.343	1.294	1.253	1.218	1.189	1.163	1.140	1.120	1.103
0.91	1.452	1.390	1.338	1.294	1.257	1.225	1.197	1.173	1.152	1.133
0.92	1.508	1.442	1.386	1.340	1.300	1.266	1.236	1.210	1.187	1.166
0.93	1.572	1.500	1.441	1.391	1.348	1.311	1.279	1.251	1.226	1.204
0.94	1.645	1.568	1.503	1.449	1.403	1.363	1.328	1.297	1.270	1.246
0.950	1.730	1.647	1.577	1.518	1.467	1.423	1.385	1.352	1.322	1.296
0.960	1.834	1.743	1.666	1.601	1.545	1.497	1.454	1.417	1.385	1.355
0.970	1.968	1.865	1.780	1.707	1.644	1.590	1.543	1.501	1.464	1.431
0.975	2.052	1.943	1.851	1.773	1.707	1.649	1.598	1.553	1.514	1.479
0.980	2.155	2.040	1.936	1.855	1.783	1.720	1.666	1.617	1.575	1.536
0.985	2.294	2.165	2.056	1.959	1.880	1.812	1.752	1.699	1.652	1.610
0.990	2.477	2.333	2.212	2.106	2.017	1.940	1.873	1.814	1.761	1.714
0.995	2.792	2.621	2.478	2.355	2.250	2.159	2.079	2.008	1.945	1.889
0.999	3.523	3.292	3.097	2.931	2.788	2.663	2.554	2.457	2.370	2.293
1.000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	3.317	2.931	2.640	2.399	2.184	2.008	1.856	1.725	1.610	1.508
1.005	2.587	2.272	2.021	1.818	1.649	1.506	1.384	1.279	1.188	1.107
1.010	2.273	1.984	1.756	1.572	1.419	1.291	1.182	1.089	1.007	0.936
1.015	2.090	1.817	1.602	1.428	1.286	1.166	1.065	0.978	0.902	0.836
1.020	1.961	1.698	1.493	1.327	1.191	1.078	0.982	0.900	0.828	0.766
1.03	1.779	1.532	1.340	1.186	1.060	0.955	0.866	0.790	0.725	0.668
1.04	1.651	1.415	1.232	1.086	0.967	0.868	0.785	0.714	0.653	0.600
1.05	1.552	1.325	1.149	1.010	0.896	0.802	0.723	0.656	0.598	0.548
1.06	1.472	1.252	1.082	0.947	0.838	0.748	0.672	0.608	0.553	0.506
1.07	1.405	1.191	1.026	0.895	0.790	0.703	0.630	0.569	0.516	0.471
1.08	1.346	1.138	0.977	0.851	0.749	0.665	0.595	0.535	0.485	0.441
1.09	1.296	1.091	0.935	0.812	0.713	0.631	0.563	0.506	0.457	0.415
1.10	1.250	1.050	0.897	0.777	0.681	0.601	0.536	0.480	0.433	0.392
1.11	1.210	1.013	0.864	0.746	0.652	0.575	0.511	0.457	0.411	0.372
1.12	1.173	0.980	0.833	0.718	0.626	0.551	0.488	0.436	0.392	0.354

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
1.13	1.139	0.949	0.805	0.693	0.602	0.529	0.468	0.417	0.374	0.337
1.14	1.108	0.921	0.780	0.669	0.581	0.509	0.450	0.400	0.358	0.322
1.15	1.079	0.895	0.756	0.647	0.561	0.490	0.432	0.384	0.343	0.308
1.16	1.052	0.871	0.734	0.627	0.542	0.473	0.417	0.369	0.329	0.295
1.17	1.027	0.848	0.713	0.608	0.525	0.458	0.402	0.355	0.316	0.283
1.18	1.003	0.827	0.694	0.591	0.509	0.443	0.388	0.343	0.305	0.272
1.19	0.981	0.807	0.676	0.574	0.494	0.429	0.375	0.331	0.294	0.262
1.20	0.960	0.788	0.659	0.559	0.480	0.416	0.363	0.320	0.283	0.252
1.22	0.922	0.754	0.628	0.531	0.454	0.392	0.341	0.299	0.264	0.235
1.24	0.887	0.723	0.600	0.505	0.431	0.371	0.322	0.281	0.248	0.219
1.26	0.856	0.694	0.574	0.482	0.410	0.351	0.304	0.265	0.233	0.205
1.28	0.827	0.669	0.551	0.461	0.391	0.334	0.288	0.250	0.219	0.193
1.30	0.800	0.645	0.530	0.442	0.373	0.318	0.274	0.237	0.207	0.181
1.32	0.776	0.623	0.510	0.424	0.357	0.304	0.260	0.225	0.196	0.171
1.34	0.753	0.603	0.492	0.408	0.342	0.290	0.248	0.214	0.185	0.162
1.36	0.731	0.584	0.475	0.393	0.329	0.278	0.237	0.204	0.176	0.153
1.38	0.711	0.566	0.459	0.378	0.316	0.266	0.226	0.194	0.167	0.145
1.40	0.692	0.549	0.444	0.365	0.304	0.256	0.217	0.185	0.159	0.138
1.42	0.675	0.534	0.431	0.353	0.293	0.246	0.208	0.177	0.152	0.131
1.44	0.658	0.519	0.418	0.341	0.282	0.236	0.199	0.169	0.145	0.125
1.46	0.642	0.505	0.405	0.330	0.273	0.227	0.191	0.162	0.139	0.119
1.48	0.627	0.492	0.394	0.320	0.263	0.219	0.184	0.156	0.133	0.113
1.50	0.613	0.479	0.383	0.310	0.255	0.211	0.177	0.149	0.127	0.108
1.55	0.580	0.451	0.358	0.288	0.235	0.194	0.161	0.135	0.114	0.097
1.60	0.551	0.425	0.335	0.269	0.218	0.179	0.148	0.123	0.103	0.087
1.65	0.525	0.403	0.316	0.251	0.203	0.165	0.136	0.113	0.094	0.079
1.70	0.501	0.382	0.298	0.236	0.189	0.153	0.125	0.103	0.086	0.072
1.75	0.480	0.364	0.282	0.222	0.177	0.143	0.116	0.095	0.079	0.065
1.80	0.460	0.347	0.267	0.209	0.166	0.133	0.108	0.088	0.072	0.060
1.85	0.442	0.332	0.254	0.198	0.156	0.125	0.100	0.082	0.067	0.055
1.90	0.425	0.317	0.242	0.188	0.147	0.117	0.094	0.076	0.062	0.050
1.95	0.409	0.304	0.231	0.178	0.139	0.110	0.088	0.070	0.057	0.046
2.00	0.395	0.292	0.221	0.169	0.132	0.104	0.082	0.066	0.053	0.043
2.10	0.369	0.273	0.202	0.154	0.119	0.092	0.073	0.058	0.046	0.037
2.20	0.346	0.251	0.186	0.141	0.107	0.083	0.065	0.051	0.040	0.032
2.3	0.326	0.235	0.173	0.129	0.098	0.075	0.058	0.045	0.035	0.028
2.4	0.308	0.220	0.160	0.119	0.089	0.068	0.052	0.040	0.031	0.024
2.5	0.292	0.207	0.150	0.110	0.082	0.062	0.047	0.036	0.028	0.022
2.6	0.277	0.195	0.140	0.102	0.076	0.057	0.043	0.033	0.025	0.019
2.7	0.264	0.184	0.131	0.095	0.070	0.052	0.039	0.029	0.022	0.017
2.8	0.252	0.175	0.124	0.089	0.065	0.048	0.036	0.027	0.020	0.015
2.9	0.241	0.166	0.117	0.083	0.060	0.044	0.033	0.024	0.018	0.014
3.0	0.230	0.158	0.110	0.078	0.056	0.041	0.030	0.022	0.017	0.012
3.5	0.190	0.126	0.085	0.059	0.041	0.029	0.021	0.015	0.011	0.008
4.0	0.161	0.104	0.069	0.046	0.031	0.022	0.015	0.010	0.007	0.005
4.5	0.139	0.088	0.057	0.037	0.025	0.017	0.011	0.008	0.005	0.004
5.0	0.122	0.076	0.048	0.031	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.003
6.0	0.098	0.058	0.036	0.022	0.014	0.009	0.006	0.004	0.002	0.002
7.0	0.081	0.047	0.028	0.017	0.010	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001
8.0	0.069	0.040	0.022	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
9.0	0.060	0.033	0.019	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000
10.0	0.053	0.028	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
20.0	0.023	0.011	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.321	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.341	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.361	0.361	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.381	0.381	0.381	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.402	0.401	0.401	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.422	0.421	0.421	0.421	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.443	0.442	0.441	0.441	0.441	0.441	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.463	0.462	0.462	0.461	0.461	0.461	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.484	0.483	0.482	0.481	0.481	0.481	0.480	0.480	0.480	0.480
0.50	0.505	0.504	0.503	0.502	0.501	0.501	0.501	0.500	0.500	0.500
0.52	0.527	0.525	0.523	0.522	0.522	0.521	0.521	0.521	0.520	0.520
0.54	0.548	0.546	0.544	0.543	0.542	0.542	0.541	0.541	0.541	0.541
0.56	0.570	0.567	0.565	0.564	0.563	0.562	0.562	0.561	0.561	0.561
0.58	0.592	0.589	0.587	0.585	0.584	0.583	0.582	0.582	0.581	0.581
0.60	0.614	0.611	0.608	0.606	0.605	0.604	0.603	0.602	0.602	0.601
0.61	0.626	0.622	0.619	0.617	0.615	0.614	0.613	0.612	0.621	0.611
0.62	0.637	0.633	0.630	0.628	0.626	0.625	0.624	0.623	0.622	0.622
0.63	0.649	0.644	0.641	0.638	0.636	0.635	0.634	0.633	0.632	0.632
0.64	0.661	0.656	0.652	0.649	0.647	0.646	0.645	0.644	0.643	0.642
0.65	0.673	0.667	0.663	0.660	0.658	0.656	0.655	0.654	0.653	0.653
0.66	0.685	0.679	0.675	0.672	0.669	0.667	0.666	0.665	0.664	0.663
0.67	0.697	0.691	0.686	0.683	0.680	0.678	0.676	0.675	0.674	0.673
0.68	0.709	0.703	0.698	0.694	0.691	0.689	0.687	0.686	0.685	0.684
0.69	0.722	0.715	0.710	0.706	0.703	0.700	0.698	0.696	0.695	0.694
0.70	0.735	0.727	0.722	0.717	0.714	0.711	0.709	0.708	0.706	0.705
0.71	0.748	0.740	0.734	0.729	0.725	0.723	0.720	0.719	0.717	0.716
0.72	0.761	0.752	0.746	0.741	0.737	0.734	0.732	0.730	0.728	0.727
0.73	0.774	0.765	0.759	0.753	0.749	0.746	0.743	0.741	0.739	0.737
0.74	0.788	0.779	0.771	0.766	0.761	0.757	0.754	0.752	0.750	0.748
0.75	0.802	0.792	0.784	0.778	0.773	0.769	0.766	0.763	0.761	0.760
0.76	0.817	0.806	0.798	0.791	0.786	0.781	0.778	0.775	0.773	0.771
0.77	0.831	0.820	0.811	0.804	0.798	0.794	0.790	0.787	0.784	0.782
0.78	0.847	0.834	0.825	0.817	0.811	0.806	0.802	0.799	0.796	0.794
0.79	0.862	0.849	0.839	0.831	0.824	0.819	0.815	0.811	0.808	0.805

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.80	0.878	0.865	0.854	0.845	0.838	0.832	0.828	0.824	0.820	0.818
0.81	0.895	0.881	0.869	0.860	0.852	0.846	0.841	0.837	0.833	0.830
0.82	0.912	0.897	0.885	0.875	0.867	0.860	0.854	0.850	0.846	0.842
0.83	0.931	0.914	0.901	0.890	0.881	0.874	0.868	0.863	0.859	0.855
0.84	0.949	0.932	0.918	0.906	0.897	0.889	0.883	0.877	0.873	0.869
0.85	0.969	0.950	0.935	0.923	0.913	0.904	0.897	0.892	0.887	0.882
0.86	0.990	0.970	0.954	0.940	0.930	0.921	0.913	0.907	0.901	0.896
0.87	1.012	0.990	0.973	0.959	0.947	0.937	0.929	0.922	0.916	0.911
0.88	1.035	1.012	0.994	0.978	0.966	0.955	0.946	0.939	0.932	0.927
0.89	1.060	1.035	1.015	0.999	0.986	0.974	0.964	0.956	0.949	0.943
0.90	1.087	1.060	1.039	1.021	1.007	0.994	0.984	0.975	0.967	0.960
0.91	1.116	1.088	1.064	1.045	1.029	1.016	1.004	0.995	0.986	0.979
0.92	1.148	1.117	1.092	1.072	1.054	1.040	1.027	1.016	1.007	0.999
0.93	1.184	1.151	1.123	1.101	1.081	1.066	1.052	1.040	1.030	1.021
0.94	1.225	1.188	1.158	1.134	1.113	1.095	1.080	1.067	1.055	1.045
0.950	1.272	1.232	1.199	1.172	1.149	1.129	1.112	1.097	1.085	1.073
0.960	1.329	1.285	1.248	1.217	1.191	1.169	1.150	1.134	1.119	1.107
0.970	1.402	1.351	1.310	1.275	1.245	1.220	1.198	1.179	1.163	1.148
0.975	1.447	1.393	1.348	1.311	1.279	1.252	1.228	1.208	1.190	1.174
0.980	1.502	1.443	1.395	1.354	1.319	1.290	1.264	1.242	1.222	1.205
0.985	1.573	1.508	1.454	1.409	1.371	1.338	1.310	1.285	1.263	1.244
0.990	1.671	1.598	1.537	1.487	1.443	1.406	1.373	1.345	1.320	1.298
0.995	1.838	1.751	1.678	1.617	1.565	1.520	1.481	1.446	1.416	1.389
0.999	2.223	2.102	2.002	1.917	1.845	1.780	1.725	1.678	1.635	1.596
1.000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	1.417	1.264	1.138	1.033	0.951	0.870	0.803	0.746	0.697	0.651
1.005	1.036	0.915	0.817	0.736	0.669	0.611	0.562	0.519	0.481	0.448
1.010	0.873	0.766	0.681	0.610	0.551	0.501	0.459	0.422	0.390	0.361
1.015	0.778	0.680	0.602	0.537	0.483	0.438	0.399	0.366	0.337	0.311
1.02	0.711	0.620	0.546	0.486	0.436	0.394	0.358	0.327	0.300	0.277
1.03	0.618	0.535	0.469	0.415	0.370	0.332	0.300	0.273	0.250	0.229
1.04	0.554	0.477	0.415	0.365	0.324	0.290	0.261	0.236	0.215	0.196
1.05	0.504	0.432	0.374	0.328	0.290	0.258	0.231	0.208	0.189	0.172
1.06	0.464	0.396	0.342	0.298	0.262	0.232	0.207	0.186	0.168	0.152
1.07	0.431	0.366	0.315	0.273	0.239	0.211	0.188	0.168	0.151	0.136
1.08	0.403	0.341	0.292	0.252	0.220	0.194	0.172	0.153	0.137	0.123
1.09	0.379	0.319	0.272	0.234	0.204	0.179	0.158	0.140	0.125	0.112
1.10	0.357	0.299	0.254	0.218	0.189	0.165	0.145	0.129	0.114	0.102
1.11	0.338	0.282	0.239	0.204	0.176	0.154	0.135	0.119	0.105	0.094
1.12	0.321	0.267	0.225	0.192	0.165	0.143	0.125	0.110	0.097	0.086
1.13	0.305	0.253	0.212	0.181	0.155	0.134	0.117	0.102	0.090	0.080
1.14	0.291	0.240	0.201	0.170	0.146	0.126	0.109	0.095	0.084	0.074
1.15	0.278	0.229	0.191	0.161	0.137	0.118	0.102	0.089	0.078	0.068
1.16	0.266	0.218	0.181	0.153	0.130	0.111	0.096	0.083	0.072	0.064
1.17	0.254	0.208	0.173	0.145	0.123	0.105	0.090	0.078	0.068	0.059
1.18	0.244	0.199	0.165	0.138	0.116	0.099	0.085	0.073	0.063	0.055
1.19	0.235	0.191	0.157	0.131	0.110	0.093	0.080	0.069	0.059	0.052
1.20	0.226	0.183	0.150	0.125	0.105	0.089	0.076	0.065	0.056	0.048
1.22	0.209	0.168	0.138	0.114	0.095	0.080	0.067	0.057	0.049	0.042
1.24	0.195	0.156	0.127	0.104	0.086	0.072	0.061	0.051	0.044	0.037

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
1.26	0.182	0.145	0.117	0.095	0.079	0.065	0.055	0.046	0.039	0.033
1.28	0.170	0.135	0.108	0.088	0.072	0.059	0.049	0.041	0.035	0.030
1.30	0.160	0.126	0.100	0.081	0.066	0.054	0.045	0.037	0.031	0.026
1.32	0.150	0.118	0.093	0.075	0.061	0.050	0.041	0.034	0.028	0.024
1.34	0.142	0.110	0.087	0.069	0.056	0.045	0.037	0.031	0.025	0.021
1.36	0.134	0.103	0.081	0.064	0.052	0.042	0.034	0.028	0.023	0.019
1.38	0.127	0.097	0.076	0.060	0.048	0.038	0.031	0.025	0.021	0.017
1.40	0.120	0.092	0.071	0.056	0.044	0.035	0.029	0.023	0.019	0.015
1.42	0.114	0.087	0.067	0.052	0.041	0.033	0.026	0.021	0.017	0.014
1.44	0.108	0.082	0.063	0.049	0.038	0.030	0.024	0.019	0.016	0.013
1.46	0.103	0.077	0.059	0.046	0.036	0.028	0.022	0.018	0.014	0.011
1.48	0.098	0.073	0.056	0.043	0.033	0.026	0.021	0.016	0.013	0.010
1.50	0.093	0.069	0.053	0.040	0.031	0.024	0.019	0.015	0.012	0.010
1.55	0.083	0.061	0.046	0.035	0.026	0.020	0.016	0.012	0.010	0.008
1.60	0.074	0.054	0.040	0.030	0.023	0.017	0.013	0.010	0.008	0.006
1.65	0.067	0.048	0.035	0.026	0.019	0.014	0.011	0.008	0.006	0.005
1.70	0.060	0.043	0.031	0.023	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004
1.75	0.054	0.038	0.027	0.020	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004	0.003
1.80	0.049	0.035	0.024	0.017	0.013	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003
1.85	0.045	0.031	0.022	0.015	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002
1.90	0.041	0.028	0.020	0.014	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002
1.95	0.038	0.026	0.018	0.012	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002
2.00	0.035	0.023	0.016	0.011	0.008	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
2.10	0.030	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
2.20	0.025	0.016	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
2.3	0.022	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
2.4	0.019	0.012	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000
2.5	0.017	0.010	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
2.6	0.015	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
2.7	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.8	0.012	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.9	0.010	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.0	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480
0.50	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.52	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520
0.54	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
0.56	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560
0.58	0.581	0.581	0.580	0.580	0.580
0.60	0.601	0.601	0.601	0.600	0.600
0.61	0.611	0.611	0.611	0.611	0.610
0.62	0.621	0.621	0.621	0.621	0.621
0.63	0.632	0.631	0.631	0.631	0.631
0.64	0.642	0.641	0.641	0.641	0.641
0.65	0.652	0.652	0.651	0.651	0.651
0.66	0.662	0.662	0.662	0.661	0.661
0.67	0.673	0.672	0.672	0.672	0.671
0.68	0.683	0.683	0.682	0.682	0.681
0.69	0.694	0.693	0.692	0.692	0.692
0.70	0.704	0.704	0.703	0.702	0.702
0.71	0.715	0.714	0.713	0.713	0.712
0.72	0.726	0.725	0.724	0.723	0.723
0.73	0.736	0.735	0.734	0.734	0.733
0.74	0.747	0.746	0.745	0.744	0.744
0.75	0.758	0.757	0.756	0.755	0.754
0.76	0.769	0.768	0.767	0.766	0.765
0.77	0.780	0.779	0.778	0.777	0.776
0.78	0.792	0.790	0.789	0.788	0.787
0.79	0.804	0.802	0.800	0.799	0.798

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
0.80	0.815	0.813	0.811	0.810	0.809
0.81	0.827	0.825	0.823	0.822	0.820
0.82	0.839	0.837	0.835	0.833	0.831
0.83	0.852	0.849	0.847	0.845	0.844
0.84	0.865	0.862	0.860	0.858	0.856
0.85	0.878	0.875	0.873	0.870	0.868
0.86	0.892	0.889	0.886	0.883	0.881
0.87	0.907	0.903	0.900	0.897	0.894
0.88	0.921	0.918	0.914	0.911	0.908
0.89	0.937	0.933	0.929	0.925	0.922
0.90	0.954	0.949	0.944	0.940	0.937
0.91	0.972	0.967	0.961	0.957	0.953
0.92	0.991	0.986	0.980	0.975	0.970
0.93	1.012	1.006	0.999	0.994	0.989
0.94	1.036	1.029	1.022	1.016	1.010
0.950	1.062	1.055	1.047	1.040	1.033
0.960	1.097	1.085	1.074	1.063	1.053
0.970	1.136	1.124	1.112	1.100	1.087
0.975	1.157	1.147	1.134	1.122	1.108
0.980	1.187	1.175	1.160	1.150	1.132
0.985	1.224	1.210	1.196	1.183	1.165
0.990	1.275	1.260	1.243	1.228	1.208
0.995	1.363	1.342	1.320	1.302	1.280
0.999	1.560	1.530	1.500	1.476	1.447
1.000	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	0.614	0.577	0.546	0.519	0.494
1.005	0.420	0.391	0.368	0.350	0.331
1.010	0.337	0.313	0.294	0.278	0.262
1.015	0.289	0.269	0.255	0.237	0.223
1.020	0.257	0.237	0.221	0.209	0.196
1.03	0.212	0.195	0.181	0.170	0.159
1.04	0.173	0.165	0.152	0.143	0.134
1.05	0.158	0.143	0.132	0.124	0.115
1.06	0.140	0.127	0.116	0.106	0.098
1.07	0.123	0.112	0.102	0.094	0.086
1.08	0.111	0.101	0.092	0.084	0.077
1.09	0.101	0.091	0.082	0.075	0.069
1.10	0.092	0.083	0.074	0.067	0.062
1.11	0.084	0.075	0.067	0.060	0.055
1.12	0.077	0.069	0.062	0.055	0.050
1.13	0.071	0.063	0.056	0.050	0.045
1.14	0.065	0.058	0.052	0.046	0.041
1.15	0.061	0.054	0.048	0.043	0.038
1.16	0.056	0.050	0.045	0.040	0.035
1.17	0.052	0.046	0.041	0.036	0.032
1.18	0.048	0.042	0.037	0.033	0.029
1.19	0.045	0.039	0.034	0.030	0.027
1.20	0.043	0.037	0.032	0.028	0.025
1.22	0.037	0.032	0.028	0.024	0.021
1.24	0.032	0.028	0.024	0.021	0.018

Tabla D-1. La función de flujo variado para pendientes positivas, $F(u,N)$ (*continuación*)

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
1.26	0.028	0.024	0.021	0.018	0.016
1.28	0.025	0.021	0.018	0.016	0.014
1.30	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012
1.32	0.020	0.017	0.014	0.012	0.010
1.34	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009
1.36	0.016	0.013	0.011	0.009	0.008
1.38	0.014	0.012	0.010	0.008	0.007
1.40	0.013	0.011	0.009	0.007	0.006
1.42	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005
1.44	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005
1.46	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004
1.48	0.009	0.007	0.005	0.004	0.004
1.50	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
1.55	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003
1.60	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002
1.65	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001
1.70	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
1.75	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
1.80	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
1.85	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
1.90	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
1.95	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
2.00	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.10	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2.20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-s_0}$

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.099	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.119	0.119	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.139	0.139	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.158	0.159	0.159	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.178	0.179	0.179	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.197	0.198	0.199	0.199	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.216	0.217	0.218	0.219	0.219	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.234	0.236	0.237	0.238	0.239	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.253	0.255	0.256	0.257	0.258	0.259	0.259	0.260	0.260	0.260
0.28	0.272	0.274	0.275	0.276	0.277	0.278	0.278	0.279	0.280	0.280
0.30	0.291	0.293	0.294	0.295	0.296	0.297	0.298	0.298	0.299	0.299
0.32	0.308	0.311	0.313	0.314	0.316	0.317	0.318	0.318	0.319	0.319
0.34	0.326	0.329	0.331	0.333	0.335	0.337	0.338	0.338	0.339	0.339
0.36	0.344	0.347	0.350	0.352	0.354	0.356	0.357	0.357	0.358	0.358
0.38	0.362	0.355	0.368	0.371	0.373	0.374	0.375	0.376	0.377	0.377
0.40	0.380	0.384	0.387	0.390	0.392	0.393	0.394	0.395	0.396	0.396
0.42	0.397	0.401	0.405	0.407	0.409	0.411	0.412	0.413	0.414	0.416
0.44	0.414	0.419	0.423	0.426	0.429	0.430	0.432	0.433	0.434	0.435
0.46	0.431	0.437	0.440	0.444	0.447	0.449	0.451	0.452	0.453	0.454
0.48	0.447	0.453	0.458	0.461	0.464	0.467	0.469	0.471	0.472	0.473
0.50	0.463	0.470	0.475	0.479	0.482	0.485	0.487	0.489	0.491	0.492
0.52	0.479	0.485	0.491	0.494	0.499	0.502	0.505	0.507	0.509	0.511
0.54	0.494	0.501	0.507	0.512	0.516	0.520	0.522	0.525	0.527	0.529
0.56	0.509	0.517	0.523	0.528	0.533	0.537	0.540	0.543	0.545	0.547
0.58	0.524	0.533	0.539	0.545	0.550	0.554	0.558	0.561	0.563	0.567
0.60	0.540	0.548	0.555	0.561	0.566	0.571	0.575	0.578	0.581	0.583
0.61	0.547	0.556	0.563	0.569	0.575	0.579	0.583	0.587	0.589	0.592
0.62	0.554	0.563	0.571	0.578	0.583	0.578	0.591	0.595	0.598	0.600
0.63	0.562	0.571	0.579	0.585	0.590	0.595	0.599	0.603	0.607	0.609
0.64	0.569	0.579	0.586	0.592	0.598	0.602	0.607	0.611	0.615	0.618
0.65	0.576	0.585	0.592	0.599	0.606	0.610	0.615	0.619	0.623	0.626
0.66	0.583	0.593	0.600	0.607	0.613	0.618	0.622	0.626	0.630	0.634
0.67	0.590	0.599	0.607	0.614	0.621	0.626	0.631	0.635	0.639	0.643
0.68	0.597	0.607	0.615	0.622	0.628	0.634	0.639	0.643	0.647	0.651
0.69	0.603	0.613	0.621	0.629	0.635	0.641	0.646	0.651	0.655	0.659
0.70	0.610	0.620	0.629	0.637	0.644	0.649	0.654	0.659	0.663	0.667
0.71	0.617	0.627	0.636	0.644	0.651	0.657	0.661	0.666	0.671	0.674
0.72	0.624	0.634	0.643	0.651	0.658	0.664	0.669	0.674	0.679	0.682
0.73	0.630	0.641	0.650	0.659	0.665	0.672	0.677	0.682	0.687	0.691
0.74	0.637	0.648	0.657	0.665	0.672	0.679	0.684	0.689	0.694	0.698
0.75	0.643	0.655	0.664	0.671	0.679	0.686	0.691	0.696	0.701	0.705
0.76	0.649	0.661	0.670	0.679	0.687	0.693	0.699	0.704	0.709	0.713
0.77	0.656	0.667	0.677	0.685	0.693	0.700	0.705	0.711	0.715	0.719
0.78	0.662	0.673	0.683	0.692	0.700	0.707	0.713	0.718	0.723	0.727
0.79	0.668	0.680	0.689	0.698	0.705	0.713	0.719	0.724	0.729	0.733

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-S_0}$ (*continuación*)

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.80	0.674	0.685	0.695	0.703	0.712	0.720	0.726	0.732	0.737	0.741
0.81	0.680	0.691	0.701	0.710	0.719	0.727	0.733	0.739	0.744	0.749
0.82	0.686	0.698	0.707	0.717	0.725	0.733	0.740	0.745	0.751	0.755
0.83	0.692	0.703	0.713	0.722	0.731	0.740	0.746	0.752	0.757	0.762
0.84	0.698	0.709	0.719	0.729	0.737	0.746	0.752	0.758	0.764	0.769
0.85	0.704	0.715	0.725	0.735	0.744	0.752	0.759	0.765	0.770	0.775
0.86	0.710	0.721	0.731	0.741	0.750	0.758	0.765	0.771	0.777	0.782
0.87	0.715	0.727	0.738	0.747	0.756	0.764	0.771	0.777	0.783	0.788
0.88	0.721	0.733	0.743	0.753	0.762	0.770	0.777	0.783	0.789	0.794
0.89	0.727	0.739	0.749	0.758	0.767	0.776	0.783	0.789	0.795	0.800
0.90	0.732	0.744	0.754	0.764	0.773	0.781	0.789	0.795	0.801	0.807
0.91	0.738	0.750	0.760	0.770	0.779	0.787	0.795	0.801	0.807	0.812
0.92	0.743	0.754	0.766	0.776	0.785	0.793	0.800	0.807	0.813	0.818
0.93	0.749	0.761	0.772	0.782	0.791	0.799	0.807	0.812	0.818	0.823
0.94	0.754	0.767	0.777	0.787	0.795	0.804	0.813	0.818	0.824	0.829
0.950	0.759	0.772	0.783	0.793	0.801	0.809	0.819	0.823	0.829	0.835
0.960	0.764	0.777	0.788	0.798	0.807	0.815	0.824	0.829	0.835	0.841
0.970	0.770	0.782	0.793	0.803	0.812	0.820	0.826	0.834	0.840	0.846
0.975	0.772	0.785	0.796	0.805	0.814	0.822	0.828	0.836	0.843	0.848
0.980	0.775	0.787	0.798	0.808	0.818	0.825	0.830	0.839	0.845	0.851
0.985	0.777	0.790	0.801	0.811	0.820	0.827	0.833	0.841	0.847	0.853
0.990	0.780	0.793	0.804	0.814	0.822	0.830	0.837	0.844	0.850	0.856
0.995	0.782	0.795	0.806	0.816	0.824	0.832	0.840	0.847	0.753	0.859
1.000	0.785	0.797	0.808	0.818	0.826	0.834	0.842	0.849	0.856	0.862
1.005	0.788	0.799	0.810	0.820	0.829	0.837	0.845	0.852	0.858	0.864
1.010	0.790	0.801	0.812	0.822	0.831	0.840	0.847	0.855	0.861	0.867
1.015	0.793	0.804	0.815	0.824	0.833	0.843	0.850	0.858	0.864	0.870
1.020	0.795	0.807	0.818	0.828	0.837	0.845	0.853	0.860	0.866	0.872
1.03	0.800	0.811	0.822	0.832	0.841	0.850	0.857	0.864	0.871	0.877
1.04	0.805	0.816	0.829	0.837	0.846	0.855	0.862	0.870	0.877	0.883
1.05	0.810	0.821	0.831	0.841	0.851	0.859	0.867	0.874	0.881	0.887
1.06	0.815	0.826	0.837	0.846	0.855	0.864	0.871	0.879	0.885	0.891
1.07	0.819	0.831	0.841	0.851	0.860	0.869	0.876	0.883	0.889	0.896
1.08	0.824	0.836	0.846	0.856	0.865	0.873	0.880	0.887	0.893	0.900
1.09	0.828	0.840	0.851	0.860	0.870	0.877	0.885	0.892	0.898	0.904
1.10	0.833	0.845	0.855	0.865	0.874	0.881	0.890	0.897	0.903	0.908
1.11	0.837	0.849	0.860	0.870	0.878	0.886	0.894	0.900	0.907	0.912
1.12	0.842	0.854	0.864	0.873	0.882	0.891	0.897	0.904	0.910	0.916
1.13	0.846	0.858	0.868	0.878	0.886	0.895	0.902	0.908	0.914	0.919
1.14	0.851	0.861	0.872	0.881	0.890	0.899	0.905	0.912	0.918	0.923
1.15	0.855	0.866	0.876	0.886	0.895	0.903	0.910	0.916	0.922	0.928
1.16	0.859	0.870	0.880	0.890	0.899	0.907	0.914	0.920	0.926	0.931
1.17	0.864	0.874	0.884	0.893	0.902	0.911	0.917	0.923	0.930	0.934
1.18	0.868	0.878	0.888	0.897	0.906	0.915	0.921	0.927	0.933	0.939
1.19	0.872	0.882	0.892	0.901	0.910	0.918	0.925	0.931	0.937	0.942
1.20	0.876	0.886	0.896	0.904	0.913	0.921	0.928	0.934	0.940	0.945
1.22	0.880	0.891	0.900	0.909	0.917	0.929	0.932	0.938	0.944	0.949
1.24	0.888	0.898	0.908	0.917	0.925	0.935	0.940	0.945	0.950	0.955
1.26	0.900	0.910	0.919	0.927	0.935	0.942	0.948	0.954	0.960	0.964
1.28	0.908	0.917	0.926	0.934	0.945	0.948	0.954	0.960	0.965	0.970

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-S_0}$ (*continuación*)

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
1.30	0.915	0.925	0.933	0.941	0.948	0.955	0.961	0.966	0.981	0.975
1.32	0.922	0.931	0.940	0.948	0.955	0.961	0.967	0.972	0.976	0.980
1.34	0.930	0.939	0.948	0.955	0.962	0.967	0.973	0.978	0.982	0.986
1.36	0.937	0.946	0.954	0.961	0.968	0.973	0.979	0.983	0.987	0.991
1.38	0.944	0.952	0.960	0.967	0.974	0.979	0.985	0.989	0.993	0.996
1.40	0.951	0.959	0.966	0.973	0.979	0.984	0.989	0.993	0.997	1.000
1.42	0.957	0.965	0.972	0.979	0.984	0.989	0.995	0.998	1.001	1.004
1.44	0.964	0.972	0.979	0.984	0.990	0.995	1.000	1.003	1.006	1.009
1.46	0.970	0.977	0.983	0.989	0.995	1.000	1.004	1.007	1.010	1.012
1.48	0.977	0.983	0.989	0.994	0.999	1.005	1.008	1.011	1.014	1.016
1.50	0.983	0.990	0.996	1.001	1.005	1.009	1.012	1.015	1.017	1.019
1.55	0.997	1.002	1.007	1.012	1.016	1.020	1.022	1.024	1.026	1.028
1.60	1.012	1.017	1.020	1.024	1.027	1.030	1.032	1.034	1.035	1.035
1.65	1.026	1.029	1.032	1.035	1.037	1.039	1.041	1.041	1.042	1.042
1.70	1.039	1.042	1.044	1.045	1.047	1.048	1.049	1.049	1.049	1.048
1.75	1.052	1.053	1.054	1.055	1.056	1.057	1.056	1.056	1.055	1.053
1.80	1.064	1.064	1.064	1.064	1.065	1.065	1.064	1.062	1.060	1.058
1.85	1.075	1.074	1.074	1.073	1.072	1.071	1.069	1.067	1.066	1.063
1.90	1.086	1.085	1.084	1.082	1.081	1.079	1.077	1.074	1.071	1.066
1.95	1.097	1.095	1.092	1.090	1.087	1.085	1.081	1.079	1.075	1.071
2.00	1.107	1.103	1.100	1.096	1.093	1.090	1.085	1.082	1.078	1.075
2.10	1.126	1.120	1.115	1.110	1.104	1.100	1.094	1.089	1.085	1.080
2.20	1.144	1.136	1.129	1.122	1.115	1.109	1.102	1.096	1.090	1.085
2.3	1.161	1.150	1.141	1.133	1.124	1.117	1.110	1.103	1.097	1.090
2.4	1.176	1.163	1.152	1.142	1.133	1.124	1.116	1.109	1.101	1.094
2.5	1.190	1.175	1.162	1.150	1.140	1.131	1.121	1.113	1.105	1.098
2.6	1.204	1.187	1.172	1.159	1.147	1.137	1.126	1.117	1.106	1.000
2.7	1.216	1.196	1.180	1.166	1.153	1.142	1.130	1.120	1.110	1.102
2.8	1.228	1.208	1.189	1.173	1.158	1.146	1.132	1.122	1.112	1.103
2.9	1.239	1.216	1.196	1.178	1.162	1.150	1.137	1.125	1.115	1.106
3.0	1.249	1.224	1.203	1.184	1.168	1.154	1.140	1.128	1.117	1.107
3.5	1.292	1.260	1.232	1.206	1.185	1.167	1.151	1.138	1.125	1.113
4.0	1.326	1.286	1.251	1.223	1.198	1.176	1.158	1.142	1.129	1.117
4.5	1.352	1.308	1.270	1.235	1.205	1.183	1.162	1.146	1.131	1.119
5.0	1.374	1.325	1.283	1.245	1.212	1.188	1.166	1.149	1.134	1.121
6.0	1.406	1.342	1.292	1.252	1.221	1.195	1.171	1.152	1.136	1.122
7.0	1.430	1.360	1.303	1.260	1.225	1.199	1.174	1.153	1.136	1.122
8.0	1.447	1.373	1.313	1.266	1.229	1.201	1.175	1.154	1.137	1.122
9.0	1.461	1.384	1.319	1.269	1.231	1.203	1.176	1.156	1.137	1.122
10.0	1.471	1.394	1.324	1.272	1.233	1.203	1.176	1.156	1.137	1.122

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-s_0}$ (*continuación*)

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.339	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.359	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.378	0.379	0.380	0.380	0.380
0.40	0.397	0.398	0.398	0.400	0.400
0.42	0.417	0.418	0.418	0.419	0.420
0.44	0.436	0.437	0.437	0.439	0.440
0.46	0.455	0.456	0.457	0.458	0.459
0.48	0.474	0.475	0.476	0.478	0.479
0.50	0.493	0.494	0.495	0.497	0.498
0.52	0.512	0.513	0.515	0.517	0.518
0.54	0.531	0.532	0.533	0.536	0.537
0.56	0.549	0.550	0.552	0.555	0.558
0.58	0.567	0.569	0.570	0.574	0.576
0.60	0.585	0.587	0.589	0.593	0.595
0.61	0.594	0.596	0.598	0.602	0.604
0.62	0.603	0.605	0.607	0.611	0.613
0.63	0.612	0.615	0.616	0.620	0.622
0.64	0.620	0.623	0.625	0.629	0.631
0.65	0.629	0.632	0.634	0.638	0.640
0.66	0.637	0.640	0.643	0.647	0.650
0.67	0.646	0.649	0.652	0.656	0.659
0.68	0.654	0.657	0.660	0.665	0.668
0.69	0.662	0.665	0.668	0.674	0.677
0.70	0.670	0.673	0.677	0.682	0.686
0.71	0.678	0.681	0.685	0.690	0.694
0.72	0.686	0.689	0.694	0.699	0.703
0.73	0.694	0.698	0.702	0.707	0.712
0.74	0.702	0.705	0.710	0.716	0.720
0.75	0.709	0.712	0.717	0.724	0.728
0.76	0.717	0.720	0.725	0.731	0.736
0.77	0.724	0.727	0.733	0.739	0.744
0.78	0.731	0.735	0.740	0.747	0.752
0.79	0.738	0.742	0.748	0.754	0.760

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-s_0}$ (*continuación*)

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.80	0.746	0.750	0.755	0.762	0.768
0.81	0.753	0.757	0.762	0.770	0.776
0.82	0.760	0.764	0.769	0.777	0.783
0.83	0.766	0.771	0.776	0.784	0.790
0.84	0.773	0.778	0.783	0.791	0.798
0.85	0.780	0.784	0.790	0.798	0.805
0.86	0.786	0.791	0.797	0.804	0.812
0.87	0.793	0.797	0.803	0.811	0.819
0.88	0.799	0.803	0.810	0.818	0.826
0.89	0.805	0.810	0.816	0.825	0.832
0.90	0.811	0.816	0.822	0.831	0.839
0.91	0.817	0.821	0.828	0.837	0.845
0.92	0.823	0.828	0.834	0.844	0.851
0.93	0.829	0.833	0.840	0.850	0.857
0.94	0.835	0.840	0.846	0.856	0.864
0.950	0.840	0.845	0.852	0.861	0.869
0.960	0.846	0.861	0.857	0.867	0.875
0.970	0.851	0.866	0.863	0.972	0.881
0.975	0.854	0.859	0.866	0.875	0.883
0.980	0.857	0.861	0.868	0.878	0.886
0.985	0.859	0.863	0.870	0.880	0.889
0.990	0.861	0.867	0.873	0.883	0.891
0.995	0.864	0.869	0.876	0.885	0.894
1.000	0.867	0.873	0.879	0.887	0.897
1.005	0.870	0.874	0.881	0.890	0.899
1.010	0.873	0.878	0.884	0.893	0.902
1.015	0.875	0.880	0.886	0.896	0.904
1.020	0.877	0.883	0.889	0.898	0.907
1.03	0.882	0.887	0.893	0.902	0.911
1.04	0.888	0.893	0.898	0.907	0.916
1.05	0.892	0.897	0.903	0.911	0.920
1.06	0.896	0.901	0.907	0.915	0.924
1.07	0.901	0.906	0.911	0.919	0.928
1.08	0.905	0.910	0.916	0.923	0.932
1.09	0.909	0.914	0.920	0.927	0.936
1.10	0.913	0.918	0.923	0.931	0.940
1.11	0.917	0.921	0.927	0.935	0.944
1.12	0.921	0.926	0.931	0.939	0.948
1.13	0.925	0.929	0.935	0.943	0.951
1.14	0.928	0.933	0.938	0.947	0.954
1.15	0.932	0.936	0.942	0.950	0.957
1.16	0.936	0.941	0.945	0.953	0.960
1.17	0.939	0.944	0.948	0.957	0.963
1.18	0.943	0.947	0.951	0.960	0.965
1.19	0.947	0.950	0.954	0.963	0.968
1.20	0.950	0.953	0.958	0.966	0.970
1.22	0.956	0.957	0.964	0.972	0.976
1.24	0.962	0.962	0.970	0.977	0.981
1.26	0.968	0.971	0.975	0.982	0.986
1.28	0.974	0.977	0.981	0.987	0.990

Tabla D-2. La función de flujo variado para pendientes negativas, $F(u,N)_{-S_0}$ (*continuación*)

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
1.30	0.979	0.978	0.985	0.991	0.994
1.32	0.985	0.986	0.990	0.995	0.997
1.34	0.990	0.992	0.995	0.999	1.001
1.36	0.994	0.996	0.999	1.002	1.005
1.38	0.998	1.000	1.003	1.006	1.008
1.40	1.001	1.004	1.006	1.009	1.011
1.42	1.005	1.008	1.010	1.012	1.014
1.44	1.009	1.013	1.014	1.016	1.016
1.46	1.014	1.016	1.017	1.018	1.018
1.48	1.016	1.019	1.020	1.020	1.020
1.50	1.020	1.021	1.022	1.022	1.022
1.55	1.029	1.029	1.029	1.028	1.028
1.60	1.035	1.035	1.034	1.032	1.030
1.65	1.041	1.040	1.039	1.036	1.034
1.70	1.047	1.046	1.043	1.039	1.037
1.75	1.052	1.051	1.047	1.042	1.039
1.80	1.057	1.055	1.051	1.045	1.041
1.85	1.061	1.059	1.054	1.047	1.043
1.90	1.065	1.060	1.057	1.049	1.045
1.95	1.068	1.064	1.059	1.051	1.046
2.00	1.071	1.068	1.062	1.053	1.047
2.10	1.076	1.071	1.065	1.056	1.049
2.20	1.080	1.073	1.068	1.058	1.050
2.3	1.084	1.079	1.071	1.060	1.051
2.4	1.087	1.081	1.073	1.061	1.052
2.5	1.090	1.083	1.075	1.062	1.053
2.6	1.092	1.085	1.076	1.063	1.054
2.7	1.094	1.087	1.077	1.063	1.054
2.8	1.096	1.088	1.078	1.064	1.054
2.9	1.098	1.089	1.079	1.065	1.055
3.0	1.099	1.090	1.080	1.065	1.055
3.5	1.103	1.093	1.082	1.066	1.055
4.0	1.106	1.097	1.084	1.067	1.056
4.5	1.108	1.098	1.085	1.067	1.056
5.0	1.110	1.099	1.085	1.068	1.056
6.0	1.111	1.100	1.085	1.068	1.056
7.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
8.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
9.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
10.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056

Apéndice E. Tablas de las funciones de flujo variado para secciones circulares*

* Preparado y ofrecido para su publicación gracias a la cortesía de Mr. C. J. Keifer y Mr. H. H. Cl
del Department of Public Works, City of Chicago. Las líneas en forma de escalera dentro de la tal
muestran la localización de la profundidad normal. Éstas no deben cruzarse mediante interpolació

Tabla E-1. Función X de flujo variado.

y/d_0 \ Q/Q_0	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.035	1.07	1.08	1.09	1.10	1.15	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1.161	8.0250	3.9642	2.8582	1.3454	0.9166	0.5668	0.4075	0.3150	0.2543
0.99	0.0118	0.0124	0.0131	0.0140	0.0152	0.0167	0.0188	0.0216	0.0256	0.0322	0.0440	0.0721	0	0	1.029	7.9478	3.8899	2.7897	1.3058	0.8894	0.5505	0.3959	0.3063	0.2472
0.98	0.0235	0.0246	0.0260	0.0278	0.0299	0.0330	0.0368	0.0420	0.0495	0.0613	0.0817	0.1276	0.1085	0.359	0.760	7.7504	3.7602	2.6859	1.2558	0.8567	0.5315	0.3830	0.2966	0.2397
0.97	0.0352	0.0368	0.0389	0.0416	0.0447	0.0489	0.0545	0.0620	0.0726	0.0891	0.1173	0.1776	0.1976	0.551	0	7.4791	3.5752	2.5499	1.1979	0.8207	0.5117	0.3695	0.2866	0.2318
0.96	0.0468	0.0490	0.0517	0.0551	0.0592	0.0648	0.0720	0.0817	0.0954	0.1164	0.1517	0.2255	0.2777	0.706	0	6.9735	3.3231	2.3801	1.1347	0.7822	0.4906	0.3555	0.2763	0.2238
0.95	0.0584	0.0611	0.0645	0.0686	0.0739	0.0806	0.0894	0.1012	0.1178	0.1431	0.1854	0.2716	0.3539	0.847	1.907	6.2042	3.0078	2.1832	1.0670	0.7424	0.4695	0.3412	0.2658	0.2156
0.94	0.0700	0.0732	0.0772	0.0822	0.0883	0.0964	0.1067	0.1207	0.1403	0.1699	0.2188	0.3173	0.4277	0.979	2.872	5.0418	2.6434	1.9675	0.9977	0.7016	0.4476	0.3260	0.2552	0.2074
0.93	0.0816	0.0854	0.0900	0.0957	0.1029	0.1121	0.1241	0.1402	0.1626	0.1964	0.2521	0.3625	0.5017	1.112	3.836	3.8403	2.2743	1.7504	0.9277	0.6608	0.4261	0.3125	0.2447	0.1991
0.92	0.0932	0.0975	0.1027	0.1093	0.1173	0.1279	0.1415	0.1597	0.1851	0.2232	0.2857	0.4086	0.5763	1.249	5.052	2.8740	1.9319	1.5427	0.8593	0.6203	0.4043	0.2982	0.2341	0.1909
0.91	0.1048	0.1096	0.1155	0.1228	0.1320	0.1437	0.1589	0.1793	0.2076	0.2501	0.3196	0.4549	0.6536	1.393	7.538	2.2140	1.6384	1.3547	0.7928	0.5809	0.3833	0.2840	0.2237	0.1827
0.90	0.1165	0.1218	0.1283	0.1365	0.1465	0.1596	0.1764	0.1990	0.2305	0.2775	0.3541	0.5031	0.7345	1.550	2.7491	1.7591	1.3963	1.1894	0.7303	0.5427	0.3623	0.2701	0.2134	0.1748
0.89	0.1281	0.1340	0.1412	0.1501	0.1613	0.1755	0.1941	0.2189	0.2535	0.3051	0.3893	0.5524	0.8214	1.735	1.9053	1.4460	1.1996	1.0472	0.6711	0.5062	0.3424	0.2564	0.2033	0.1668
0.88	0.1398	0.1462	0.1540	0.1639	0.1759	0.1916	0.2119	0.2390	0.2769	0.3334	0.4257	0.6046	0.9160	1.984	1.4754	1.2083	1.0391	0.9251	0.6167	0.4714	0.3226	0.2432	0.1934	0.1591
0.87	0.1515	0.1584	0.1670	0.1776	0.1909	0.2078	0.2299	0.2594	0.3007	0.3623	0.4632	0.6590	1.0224	2.330	1.2029	1.0347	0.9067	0.8209	0.5656	0.4386	0.3040	0.2302	0.1838	0.1515
0.86	0.1632	0.1707	0.1799	0.1915	0.2057	0.2242	0.2481	0.2801	0.3250	0.3921	0.5023	0.7180	1.1459	2.964	1.0082	0.8906	0.7981	0.7312	0.5189	0.4076	0.2856	0.2178	0.1744	0.1441
0.85	0.1750	0.1831	0.1930	0.2054	0.2209	0.2407	0.2665	0.3012	0.3498	0.4228	0.5433	0.7813	1.2979	1.9102	0.8635	0.7822	0.7066	0.6542	0.4764	0.3786	0.2686	0.2057	0.1654	0.1369
0.84	0.1868	0.1954	0.2061	0.2194	0.2360	0.2574	0.2852	0.3226	0.3754	0.4549	0.5868	0.8520	1.5020	1.2565	0.7486	0.6856	0.6289	0.5875	0.4373	0.3515	0.2518	0.1942	0.1566	0.1299
0.83	0.1986	0.2079	0.2193	0.2335	0.2515	0.2743	0.3043	0.3446	0.4016	0.4880	0.6332	0.9312	1.8352	0.9816	0.6572	0.6125	0.5625	0.5291	0.4018	0.3261	0.2364	0.1830	0.1481	0.1231
0.82	0.2105	0.2205	0.2326	0.2479	0.2668	0.2915	0.3236	0.3671	0.4389	0.5231	0.6835	1.0245	2.5439	0.8092	0.5803	0.5428	0.5050	0.4782	0.3692	0.3025	0.2212	0.1724	0.1399	0.1166
0.81	0.2224	0.2330	0.2460	0.2622	0.2827	0.3089	0.3435	0.3903	0.4571	0.5600	0.7385	1.1381	1.2046	0.6869	0.5171	0.4908	0.4551	0.4330	0.3395	0.2805	0.2073	0.1621	0.1321	0.1103
0.80	0.2344	0.2456	0.2594	0.2768	0.2985	0.3267	0.3637	0.4142	0.4868	0.5997	0.8002	1.2900	0.8911	0.5934	0.4619	0.4381	0.4112	0.3933	0.3122	0.2600	0.1937	0.1524	0.1245	0.1043
0.79	0.2464	0.2583	0.2731	0.2915	0.3148	0.3448	0.3845	0.4390	0.5178	0.6423	0.8709	1.5271	0.7201	0.5193	0.4157	0.3940	0.3726	0.3580	0.2873	0.2410	0.1813	0.1431	0.1173	0.0984
0.78	0.2585	0.2712	0.2868	0.3064	0.3311	0.3633	0.4059	0.4647	0.5508	0.6891	0.9552	2.3868	0.6046	0.4583	0.3740	0.3578	0.3383	0.3258	0.2644	0.2233	0.1691	0.1343	0.1104	0.0928
0.77	0.2707	0.2841	0.3007	0.3215	0.3480	0.3822	0.4280	0.4917	0.5858	0.7409	1.0611	1.0391	0.5188	0.4075	0.3389	0.3240	0.3078	0.2968	0.2435	0.2069	0.1581	0.1258	0.1038	0.0874
0.76	0.2830	0.2971	0.3147	0.3369	0.3649	0.4017	0.4509	0.5200	0.6237	0.8002	1.2090	0.7487	0.4518	0.3641	0.3065	0.2943	0.2804	0.2708	0.2242	0.1916	0.1472	0.1179	0.0975	0.0823
0.75	0.2953	0.3103	0.3289	0.3524	0.3825	0.4217	0.4748	0.5499	0.6650	0.8696	1.4722	0.6004	0.3973	0.3270	0.2791	0.2679	0.2558	0.2469	0.2066	0.1775	0.1375	0.1103	0.0915	0.0773
0.74	0.3077	0.3236	0.3433	0.3683	0.4002	0.4424	0.4997	0.5819	0.7110	0.9553	1.5967	0.5015	0.3521	0.2943	0.2533	0.2435	0.2336	0.2259	0.1912	0.1643	0.1279	0.1031	0.0857	0.0727
0.73	0.3203	0.3370	0.3579	0.3844	0.4186	0.4638	0.5259	0.6164	0.7630	1.0698	0.7681	0.4292	0.3138	0.2660	0.2315	0.2218	0.2136	0.2069	0.1754	0.1521	0.1193	0.0963	0.0803	0.0682
0.72	0.3329	0.3506	0.3727	0.4010	0.4374	0.4861	0.5536	0.6540	0.8239	1.2518	0.5844	0.3726	0.2810	0.2407	0.2105	0.2030	0.1954	0.1895	0.1616	0.1407	0.1107	0.0899	0.0751	0.0639
0.71	0.3456	0.3644	0.3879	0.4179	0.4570	0.5094	0.5832	0.6957	0.8980	1.9536	0.4767	0.3269	0.2524	0.2185	0.1916	0.1844	0.1789	0.1736	0.1489	0.1301	0.1032	0.0838	0.0702	0.0598
0.70	0.3585	0.3783	0.4032	0.4353	0.4770	0.5339	0.6151	0.7429	0.9955	0.7685	0.4016	0.2888	0.2275	0.1983	0.1765	0.1704	0.1638	0.1599	0.1371	0.1202	0.0956	0.0781	0.0656	0.0560
0.69	0.3716	0.3925	0.4190	0.4531	0.4981	0.5598	0.6499	0.7979	1.1432	0.5521	0.3449	0.2567	0.2053	0.1805	0.1602	0.1550	0.1500	0.1462	0.1263	0.1111	0.0890	0.0727	0.0612	0.0523
0.68	0.3848	0.4069	0.4350	0.4715	0.5199	0.5875	0.6885	0.8649	1.5361	0.4408	0.3001	0.2292	0.1858	0.1642	0.1465	0.1420	0.1374	0.1338	0.1162	0.1026	0.0822	0.0676	0.0570	0.0488
0.67	0.3981	0.4216	0.4515	0.4906	0.5431	0.6173	0.7321	0.9524	0.7394	0.3665	0.2635	0.2053	0.1682	0.1504	0.1345	0.1303	0.1259	0.1228	0.1070	0.0948	0.0761	0.0628	0.0531	0.0455
0.66	0.4117	0.4365	0.4684	0.5104	0.5674	0.6499	0.7831	1.0841	0.5102	0.3120	0.2329	0.1844	0.1527	0.1372	0.1228	0.1190	0.1154	0.1123	0.0984	0.0873	0.0704	0.0583	0.0494	0.0424
0.65	0.4254	0.4518	0.4859	0.5311	0.5935	0.6859	0.8451	1.4102	0.4016	0.2692	0.2069	0.1660	0.1385	0.1243	0.1121	0.1088	0.1057	0.1025	0.0905	0.0805	0.0652	0.0540	0.0458	0.0394
0.64	0.4394	0.4675	0.5040	0.5529	0.6215	0.7268	0.9263	0.6787	0.3311	0.2349	0.1845	0.1496	0.1259	0.1131	0.1023	0.0995	0.0967	0.0944	0.0831	0.0741	0.0602	0.0500	0.0425	0.0366
0.63	0.4537	0.4836	0.5228	0.5759	0.6522	0.7746	1.0492	0.4600	0.2800	0.2062	0.1650	0.1351	0.1143	0.1035	0.0937	0.0909	0.0886	0.0864	0.0764	0.0682	0.0556	0.0462	0.0394	0.0339
0.62	0.4683	0.5002	0.5424	0.6005	0.6860	0.8329	1.3682	0.3588	0.2403	0.1822	0.1479	0.1220	0.1039	0.0943	0.0857	0.0832	0.0810	0.0796	0.0701	0.0627	0.0513	0.0428	0.0365	0.0315
0.61	0.4832	0.5173	0.5630	0.6270	0.7248	0.9101	0.5965	0.2947	0.2087	0.1614	0.1329	0.1104	0.0943	0.0860	0.0778	0.0758	0.0741	0.0725	0.0643	0.0576	0.0472	0.0394	0.0337	0.0291
0.60	0.4985	0.5351	0.5847	0.6560	0.7699	1.0295	0.4083	0.2479	0.1825	0.1438	0.1196	0.0998	0.0858	0.0780	0.0713	0.0695	0.0677	0.0662	0.0589	0.0529	0.0435	0.0364	0.0311	0.0269
0.59	0.5142	0.5536	0.6079	0.6879	0.8252	1.3751	0.3181	0.2119	0.1604	0.1280	0.1077	0.0903	0.0779	0.0712	0.0654	0.0635	0.0618	0.0607	0.0539	0.0485	0.0399	0.0334	0.0287	0.0248
0.58	0.5304	0.5731	0.6328	0.7243	0.8986	0.5196	0.2596	0.1829	0.1416	0.1145	0.0970	0.0817	0.0708	0.0648	0.0593	0.0580	0.0564	0.0551	0.0492	0.0444	0.0367	0.0308	0.0264	0.0229
0.57	0.5472	0.5935	0.6600	0.7669	1.0143	0.3574	0.2176	0.1593	0.1254	0.1022	0.0875	0.0739	0.0642	0.0593	0.0542	0.0529	0.0514	0.0504	0.0450	0.0406	0.0336	0.0282	0.0243	0.0210
0.56	0.5647	0.6154	0.6902	0.8196		0.2781	0.1851	0.1392	0.1113	0.0916	0.0789	0.0668	0.0583	0.0535	0.0492	0.0480	0.0468	0.0459	0.0410	0.0371	0.0308	0.0259	0.0223	0.0193
0.55	0.5830	0.6388	0.7246	0.8903	0.4438	0.2269	0.1593	0.1225	0.0990	0.0819	0.0711	0.0604	0.0528	0.0487	0.0447	0.0437	0.0426	0.0417	0.0374	0.0339	0.0281	0.0236	0.0204	0.0177
0.54	0.6022	0.6644	0.7649	1.0053	0.3114	0.1895	0.1380	0.1080	0.0882	0.0735	0.0640	0.0545	0.0478	0.0442	0.0406	0.0397	0.0387	0.0380	0.0340	0.0309	0.0257	0.0217	0.0187	0.0163
0.53	0.6227	0.6926	0.8146	1.8258	0.2427	0.1607	0.1203	0.0954	0.0786	0.0657	0.0572	0.0492	0.0433	0.0400	0.0369	0.0360	0.0351	0.0345	0.0309	0.0281	0.0234	0.0198	0.0171	0.0148
0.52	0.6446	0.7247	0.8817	0.3850	0.1971	0.1375	0.1051	0.0844	0.0701	0.0589	0.0512	0.0444	0.0391	0.0361	0.0334	0.0327	0.0318	0.0313	0.0281	0.0255	0.0213	0.0180	0.0156	0.0136
0.51	0.6684	0.7623	0.9935	0.2712	0.1641	0.1187	0.0923	0.0748	0.0624	0.0526	0.0458	0.0400	0.0353	0.0327	0.0303	0.0295	0.0288	0.0283	0.0254	0.0231	0.0193	0.0163	0.0142	0.0123
0.50	0.6947	0.8089		0.2106	0.1385	0.1029	0.0811	0.0663	0.0557	0.0472	0.0410	0.0359	0.0318	0.0296	0.0274	0.0267	0.0260	0.0257	0.0230	0.0210	0.0175	0.0149	0.0129	0.0112
0.49	0.7244	0.8717	0.3320	0.1707	0.1181	0.0895	0.0714	0.0587	0.0496	0.0420	0.0370	0.0323	0.0286	0.0266	0.0247	0.0240	0.0235	0.0231	0.0208	0.0189	0.0159	0.0134	0.0117	0.0102
0.48	0.7591	0.9767	0.2360	0.1414	0.1014	0.0781	0.0628	0.0521	0.0442	0.0377	0.0331	0.0290	0.0257	0.0239	0.0221	0.0217	0.0211	0.0208	0.0187	0.0171	0.0143	0.0122	0.0106	0.0092
0.47	0.8015	1.9564	0.1831	0.1186	0.0874	0.0683	0.0554	0.0461	0.0391	0.0337	0.0296	0.0259	0.0230	0.0213	0.0200	0.0192	0.0190	0.0186	0.0168	0.0154	0.0129	0.0109	0.0095	0.0083
0.46	0.8585	0.2933	0.1475	0.1006	0.0756	0.0597	0.0487	0.0408	0.0347	0.0300	0.0265	0.0232	0.0206	0.0192	0.0178	0.0173	0.0170	0.0167	0.0151	0.0138	0.0116	0.0099	0.0086	0.0075
0.45	0.9515	0.2069	0.1215	0.0858	0.0655	0.0522	0.0429	0.0361	0.0308	0.0267	0.0235	0.0207	0.0181	0.0171	0.0160	0.0155	0.0152	0.0150	0.0135	0.0124	0.0104	0.0089	0.0077	0.0067
0.44	3.3677	0.1594	0.1014	0.0735	0.0569	0.0457	0.0377	0.0319	0.0273	0.0237	0.0210	0.0184	0.0164	0.0152	0.0142	0.0139	0.0136	0.0134	0.0121	0.0110	0.0093	0.0080	0.0069	0.0061
0.43	0.2650	0.1275	0.0853	0.0632	0.0494	0.0400	0.0332	0.0281	0.0240	0.0210	0.0186	0.0164	0.0146	0.0135	0.0127	0.0123	0.0121	0.0119	0.0108	0.0099	0.0083	0.0071	0.0062	0.0054
0.42	0.1837	0.1042	0.0723	0.0544	0.0430	0.0350	0.0291	0.0247	0.0212	0.0186	0.0164	0.0145	0.0130	0.0121	0.0113	0.0110	0.0108	0.0106	0.0096	0.0088	0.0074	0.0063	0.0055	0.0048
0.41	0.1398	0.0862	0.0614	0.0468	0.0373	0.0305	0.0255	0.0217	0.0187	0.0164	0.0144	0.0128	0.0115	0.0107	0.0100	0.0098	0.0095	0.0094	0.0085	0.0078	0.0066	0.0056	0.0049	0.0043
0.40	0.1107	0.0720	0.0524	0.0404	0.0324	0.0266	0.0223	0.0191	0.0165	0.0144	0.0127	0.0113	0.0101	0.0094	0.0088	0.0086	0.0084	0.0083	0.0075	0.0069	0.0058	0.0050	0.0043	0.0038
0.39	0.0895	0.0604	0.0447	0.0348	0.0281	0.0231	0.0195	0.0167	0.0143	0.0126	0.0111	0.0099	0.0089	0.0082	0.0078	0.0076	0.0074	0.0073	0.0067	0.0061	0.0051	0.0044	0.0038	0.0033
0.38	0.0733	0.0509	0.0382	0.0299	0.0243	0.0201	0.0170	0.0145	0.0126	0.0110	0.0097	0.0087	0.0078	0.0072	0.0068	0.0067	0.0065	0.0064	0.0058	0.0053	0.0045	0.0039	0.0034	0.0029
0.37	0.0606	0.0430	0.0326	0.0257	0.0210	0.0174	0.0147	0.0126	0.0110	0.0096	0.0085	0.0076	0.0068	0.0063	0.0060	0.0058	0.0057	0.0056	0.0051	0.0047	0.0040	0.0034	0.0029	0.0026
0.36	0.0503	0.0363	0.0278	0.0221	0.0181	0.0150	0.0128	0.0110	0.0096	0.0084	0.0074	0.0066	0.0059	0.0055	0.0052	0.0050	0.0050	0.0049	0.0044	0.0041	0.0035	0.0030	0.0026	0.0023
0.35	0.0419	0.0307	0.0237	0.0189	0.0155	0.0130	0.0110	0.0095	0.0082	0.0072	0.0064	0.0057	0.0052	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0042	0.0038	0.0035	0.0030	0.0026	0.0022	0.0020
0.34	0.0350	0.0259	0.0201	0.0161	0.0132	0.0111	0.0094	0.0082	0.0071	0.0062	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0033	0.0030	0.0026	0.0022	0.0019	0.0017
0.33	0.0292	0.0218	0.0170	0.0137	0.0113	0.0095	0.0081	0.0070	0.0061	0.0054	0.0048	0.0043	0.0038	0.0036	0.0034	0.0033	0.0032	0.0032	0.0029	0.0026	0.0022	0.0019	0.0017	0.0015
0.32	0.0244	0.0183	0.0144	0.0116	0.0096	0.0081	0.0069	0.0060	0.0052	0.0046	0.0041	0.0036	0.0033	0.0031	0.0029	0.0028	0.0027	0.0027	0.0025	0.0022	0.0019	0.0016	0.0014	0.0013
0.31	0.0203	0.0154	0.0121	0.0098	0.0082	0.0069	0.0059	0.0051	0.0045	0.0039	0.0035	0.0031	0.0028	0.0025	0.0025	0.0025	0.0023	0.0023	0.0021	0.0019	0.0016	0.0014	0.0012	0.0011
0.30	0.0169	0.0128	0.0102	0.0083	0.0068	0.0058	0.0049	0.0043	0.0038	0.0033	0.0029	0.0026	0.0024	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0016	0.0014	0.0012	0.0010	0.0009
0.29	0.0139	0.0107	0.0085	0.0069	0.0057	0.0049	0.0041	0.0036	0.0032	0.0028	0.0025	0.0022	0.0020	0.0018	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012	0.0010	0.0009	0.0008
0.28	0.0115	0.0089	0.0071	0.0057	0.0048	0.0041	0.0035	0.0030	0.0026	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0015	0.0014	0.0014	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0008	0.0007	0.0006
0.27	0.0094	0.0073	0.0058	0.0048	0.0040	0.0034	0.0029	0.0025	0.0022	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0014	0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0010	0.0010	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005
0.26	0.0077	0.0060	0.0049	0.0039	0.0032	0.0028	0.0024	0.0021	0.0018	0.0016	0.0014	0.0013	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004
0.25	0.0062	0.0048	0.0039	0.0032	0.0027	0.0023	0.0019	0.0017	0.0015	0.0013	0.0012	0.0011	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004
0.24	0.0050	0.0039	0.0032	0.0026	0.0022	0.0018	0.0016	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003
0.23	0.0040	0.0031	0.0025	0.0021	0.0017	0.0015	0.0013	0.0011	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002
0.22	0.0032	0.0025	0.0020	0.0016	0.0014	0.0012	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002
0.21	0.0025	0.0019	0.0016	0.0013	0.0011	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
0.20	0.0019	0.0015	0.0012	0.0010	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
0.19	0.0015	0.0012	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.18	0.0011	0.0009	0.0007	0.0006	0.0006	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.17	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	
0.16	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001			
0.15	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001						
0.14	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001												
0.13	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001															
0.12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001																			
0.11	0.0001	0.0001	0.0001																					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla E-2. Función *Y* de flujo variado.

y/d_0 \ Q/Q_0	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.035	1.07	1.08	1.09	1.10	1.15	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0.0245	0.4660	0.3050	0.2102	0.1383	0.1128	0.0851	0.0680	0.0562	0.0482
0.99	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0	0	0.0234	0.4622	0.3034	0.2092	0.1380	0.1126	0.0849	0.0678	0.0560	0.0480
0.98	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0013	0.0016	0.0056	0.0186	0.4572	0.3008	0.2077	0.1374	0.1120	0.0846	0.0677	0.0558	0.0479
0.97	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0013	0.0016	0.0022	0.0034	0.0094	0	0.4508	0.2974	0.2056	0.1366	0.1113	0.0841	0.0674	0.0556	0.0478
0.96	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0019	0.0024	0.0033	0.0053	0.0132	0	0.4428	0.2898	0.2025	0.1354	0.1105	0.0836	0.0671	0.0553	0.0477
0.95	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0014	0.0016	0.0017	0.0019	0.0021	0.0026	0.0033	0.0045	0.0075	0.0171	0.0523	0.4296	0.2785	0.1985	0.1339	0.1093	0.0830	0.0668	0.0550	0.0474
0.94	0.0015	0.0015	0.0016	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0025	0.0028	0.0034	0.0043	0.0060	0.0098	0.0213	0.0824	0.3563	0.2500	0.1919	0.1321	0.1079	0.0823	0.0663	0.0547	0.0470
0.93	0.0019	0.0019	0.0020	0.0022	0.0024	0.0026	0.0028	0.0032	0.0036	0.0043	0.0054	0.0075	0.0122	0.0258	0.1156	0.2932	0.2220	0.1838	0.1300	0.1065	0.0816	0.0658	0.0544	0.0468
0.92	0.0023	0.0024	0.0025	0.0027	0.0029	0.0032	0.0036	0.0039	0.0045	0.0053	0.0067	0.0093	0.0150	0.0310	0.1614	0.2465	0.2014	0.1736	0.1278	0.1051	0.0809	0.0652	0.0540	0.0466
0.91	0.0028	0.0029	0.0030	0.0033	0.0036	0.0039	0.0042	0.0047	0.0054	0.0064	0.0081	0.0112	0.0181	0.0368	0.2630	0.2164	0.1861	0.1656	0.1252	0.1034	0.0800	0.0648	0.0537	0.0462
0.90	0.0034	0.0035	0.0036	0.0039	0.0042	0.0045	0.0050	0.0056	0.0063	0.0076	0.0096	0.0132	0.0215	0.0436	0.2500	0.1940	0.1729	0.1577	0.1224	0.1028	0.0790	0.0641	0.0533	0.0458
0.89	0.0039	0.0040	0.0042	0.0045	0.0048	0.0053	0.0058	0.0065	0.0075	0.0088	0.0114	0.0157	0.0255	0.0522	0.2070	0.1793	0.1638	0.1512	0.1198	0.1000	0.0780	0.0634	0.0530	0.0456
0.88	0.0044	0.0046	0.0048	0.0052	0.0055	0.0061	0.0067	0.0075	0.0086	0.0103	0.0132	0.0181	0.0303	0.0648	0.1852	0.1665	0.1550	0.1447	0.1168	0.0983	0.0770	0.0627	0.0525	0.0452
0.87	0.0051	0.0053	0.0055	0.0059	0.0064	0.0070	0.0077	0.0086	0.0099	0.0118	0.0154	0.0212	0.0362	0.0833	0.1715	0.1573	0.1478	0.1394	0.1139	0.0966	0.0760	0.0619	0.0520	0.0448
0.86	0.0058	0.0060	0.0063	0.0067	0.0072	0.0079	0.0087	0.0097	0.0112	0.0135	0.0175	0.0214	0.0438	0.1193	0.1604	0.1492	0.1413	0.1344	0.1112	0.0950	0.0750	0.0613	0.0515	0.0444
0.85	0.0064	0.0067	0.0071	0.0076	0.0081	0.0088	0.0098	0.0110	0.0127	0.0153	0.0200	0.0282	0.0534	0.2360	0.1514	0.1422	0.1356	0.1297	0.1085	0.0931	0.0740	0.0607	0.0510	0.0439
0.84	0.0071	0.0075	0.0079	0.0081	0.0090	0.0099	0.0110	0.0123	0.0143	0.0173	0.0230	0.0325	0.0667	0.1919	0.1439	0.1365	0.1306	0.1251	0.1058	0.0913	0.0729	0.0598	0.0505	0.0435
0.83	0.0079	0.0083	0.0088	0.0094	0.0101	0.0110	0.0122	0.0138	0.0161	0.0196	0.0262	0.0377	0.0849	0.1735	0.1376	0.1313	0.1259	0.1213	0.1034	0.0898	0.0718	0.0590	0.0500	0.0430
0.82	0.0087	0.0092	0.0097	0.0104	0.0112	0.0122	0.0136	0.0154	0.0180	0.0221	0.0299	0.0445		0.1594	0.1321	0.1266	0.1218	0.1178	0.1008	0.0879	0.0707	0.0583	0.0494	0.0426
0.81	0.0096	0.0101	0.0107	0.0115	0.0124	0.0136	0.0150	0.0171	0.0202	0.0250	0.0342	0.0530	0.2075	0.1500	0.1272	0.1223	0.1178	0.1141	0.0986	0.0862	0.0696	0.0576	0.0488	0.0420
0.80	0.0106	0.0112	0.0118	0.0126	0.0136	0.0148	0.0166	0.0190	0.0225	0.0284	0.0389	0.0649	0.1806	0.1427	0.1230	0.1185	0.1143	0.1110	0.0963	0.0847	0.0685	0.0568	0.0482	0.0416
0.79	0.0117	0.0123	0.0130	0.0139	0.0149	0.0164	0.0184	0.0202	0.0252	0.0319	0.0450	0.0880	0.1655	0.1363	0.1191	0.1150	0.1112	0.1080	0.0941	0.0830	0.0674	0.0559	0.0476	0.0410
0.78	0.0128	0.0134	0.0142	0.0152	0.0164	0.0179	0.0204	0.0236	0.0282	0.0358	0.0524	0.1603	0.1546	0.1310	0.1153	0.1115	0.1080	0.1052	0.0919	0.0816	0.0663	0.0552	0.0469	0.0405
0.77	0.0140	0.0147	0.0155	0.0166	0.0180	0.0198	0.0224	0.0260	0.0314	0.0408	0.0625	0.2182	0.1461	0.1260	0.1117	0.1084	0.1052	0.1024	0.0899	0.0799	0.0652	0.0544	0.0462	0.0399
0.76	0.0150	0.0159	0.0168	0.0181	0.0196	0.0216	0.0247	0.0288	0.0349	0.0463	0.0768	0.1871	0.1394	0.1217	0.1088	0.1056	0.1027	0.1000	0.0881	0.0784	0.0642	0.0537	0.0455	0.0396
0.75	0.0163	0.0172	0.0184	0.0197	0.0216	0.0238	0.0273	0.0318	0.0392	0.0543	0.1111	0.1710	0.1336	0.1177	0.1057	0.1026	0.1000	0.0976	0.0861	0.0768	0.0631	0.0528	0.0449	0.0389
0.74	0.0177	0.0188	0.0200	0.0214	0.0236	0.0260	0.0300	0.0352	0.0440	0.0638	1.8457	0.1596	0.1288	0.1143	0.1032	0.1002	0.0978	0.0953	0.0844	0.0755	0.0620	0.0521	0.0443	0.0384
0.73	0.0192	0.0203	0.0217	0.0233	0.0257	0.0288	0.0330	0.0388	0.0500	0.0788	0.2192	0.1504	0.1241	0.1110	0.1004	0.0976	0.0954	0.0930	0.0826	0.0740	0.0610	0.0513	0.0437	0.0379
0.72	0.0206	0.0213	0.0234	0.0252	0.0278	0.0313	0.0361	0.0429	0.0571	0.1044	0.1950	0.1437	0.1200	0.1078	0.0980	0.0954	0.0932	0.0908	0.0808	0.0727	0.0600	0.0505	0.0430	0.0375
0.71	0.0224	0.0237	0.0254	0.0274	0.0306	0.0347	0.0400	0.0485	0.0676	0.2047	0.1790	0.1378	0.1166	0.1049	0.0956	0.0932	0.0909	0.0888	0.0792	0.0713	0.0590	0.0498	0.0424	0.0369
0.70	0.0240	0.0254	0.0275	0.0300	0.0333	0.0379	0.0443	0.0548	0.0817	0.2500	0.1650	0.1325	0.1130	0.1022	0.0933	0.0909	0.0889	0.0868	0.0776	0.0699	0.0580	0.0489	0.0418	0.0363
0.69	0.0259	0.0274	0.0298	0.0326	0.0362	0.0418	0.0494	0.0631	0.1030	0.2105	0.1547	0.1280	0.1099	0.0995	0.0912	0.0890	0.0870	0.0849	0.0760	0.0687	0.0570	0.0481	0.0411	0.0358
0.68	0.0280	0.0298	0.0321	0.0352	0.0395	0.0458	0.0556	0.0744	0.1747	0.1920	0.1465	0.1235	0.1066	0.0969	0.0891	0.0867	0.0851	0.0830	0.0746	0.0673	0.0560	0.0473	0.0404	0.0354
0.67	0.0301	0.0324	0.0350	0.0384	0.0434	0.0506	0.0633	0.0880	0.3650	0.1796	0.1403	0.1197	0.1040	0.0945	0.0869	0.0848	0.0831	0.0812	0.0729	0.0660	0.0550	0.0464	0.0398	0.0348
0.66	0.0324	0.0349	0.0378	0.0418	0.0475	0.0563	0.0724	0.1100	0.2320	0.1690	0.1352	0.1161	0.1011	0.0923	0.0851	0.0830	0.0813	0.0796	0.0714	0.0648	0.0540	0.0458	0.0392	0.0343
0.65	0.0350	0.0379	0.0411	0.0458	0.0524	0.0636	0.0849	0.2250	0.2045	0.1595	0.1304	0.1127	0.0985	0.0902	0.0832	0.0812	0.0797	0.0778	0.0699	0.0635	0.0530	0.0449	0.0386	0.0338
0.64	0.0377	0.0408	0.0444	0.0498	0.0576	0.0716	0.0978	0.3250	0.1882	0.1519	0.1263	0.1094	0.0960	0.0881	0.0813	0.0794	0.0778	0.0761	0.0684	0.0622	0.0520	0.0442	0.0379	0.0332
0.63	0.0410	0.0446	0.0488	0.0552	0.0650	0.0824	0.1224	0.2590	0.1763	0.1450	0.1223	0.1062	0.0937	0.0857	0.0793	0.0775	0.0759	0.0743	0.0671	0.0609	0.0510	0.0432	0.0372	0.0328
0.62	0.0438	0.0478	0.0527	0.0600	0.0721	0.0935	0.2500	0.2314	0.1680	0.1400	0.1189	0.1036	0.0916	0.0840	0.0777	0.0759	0.0746	0.0729	0.0658	0.0599	0.0500	0.0426	0.0367	0.0322
0.61	0.0475	0.0519	0.0578	0.0666	0.0810	0.1109	0.3466	0.2120	0.1606	0.1348	0.1152	0.1009	0.0892	0.0820	0.0759	0.0742	0.0728	0.0713	0.0643	0.0586	0.0490	0.0418	0.0360	0.0317
0.60	0.0511	0.0559	0.0627	0.0736	0.0915	0.1376	0.2780	0.1976	0.1545	0.1308	0.1120	0.0982	0.0870	0.0801	0.0743	0.0727	0.0712	0.0697	0.0629	0.0575	0.0481	0.0411	0.0353	0.0310
0.59	0.0554	0.0608	0.0687	0.0822	0.1080	0.2776	0.2430	0.1866	0.1490	0.1267	0.1085	0.0959	0.0850	0.0782	0.0725	0.0710	0.0697	0.0682	0.0618	0.0562	0.0471	0.0402	0.0348	0.0304
0.58	0.0600	0.0658	0.0756	0.0928	0.1290	0.3451	0.2265	0.1777	0.1437	0.1228	0.1054	0.0934	0.0830	0.0764	0.0710	0.0694	0.0682	0.0668	0.0604	0.0550	0.0461	0.0396	0.0341	0.0299
0.57	0.0653	0.0719	0.0838	0.1062	0.1650	0.2940	0.2133	0.1702	0.1390	0.1191	0.1024	0.0911	0.0810	0.0746	0.0693	0.0678	0.0668	0.0653	0.0591	0.0540	0.0452	0.0388	0.0336	0.0293
0.56	0.0705	0.0790	0.0939	0.1238	0.3909	0.2640	0.2006	0.1630	0.1343	0.1155	0.0997	0.0887	0.0790	0.0730	0.0678	0.0664	0.0651	0.0638	0.0579	0.0529	0.0442	0.0381	0.0330	0.0288
0.55	0.0772	0.0882	0.1060	0.1500	0.3596	0.2430	0.1909	0.1564	0.1299	0.1120	0.0968	0.0863	0.0770	0.0712	0.0662	0.0648	0.0636	0.0623	0.0564	0.0517	0.0432	0.0372	0.0323	0.0282
0.54	0.0840	0.0974	0.1200	0.1925	0.3080	0.2280	0.1828	0.1505	0.1260	0.1090	0.0944	0.0844	0.0753	0.0696	0.0647	0.0633	0.0622	0.0610	0.0553	0.0506	0.0422	0.0365	0.0317	0.0278
0.53	0.0923	0.1099	0.1406	0.9732	0.2803	0.2166	0.1755	0.1452	0.1220	0.1057	0.0919	0.0820	0.0734	0.0678	0.0632	0.0618	0.0608	0.0596	0.0540	0.0495	0.0414	0.0358	0.0310	0.0270
0.52	0.1014	0.1242	0.1703	0.3850	0.2580	0.2062	0.1686	0.1401	0.1186	0.1027	0.0895	0.0801	0.0717	0.0663	0.0618	0.0604	0.0594	0.0583	0.0528	0.0485	0.0405	0.0351	0.0303	0.0266
0.51	0.1127	0.1410	0.2267	0.3360	0.2425	0.1972	0.1623	0.1353	0.1150	0.0998	0.0872	0.0780	0.0700	0.0646	0.0603	0.0590	0.0579	0.0568	0.0517	0.0474	0.0396	0.0343	0.0297	0.0260
0.50	0.1253	0.1633		0.3050	0.2293	0.1890	0.1562	0.1307	0.1117	0.0970	0.0850	0.0762	0.0682	0.0632	0.0588	0.0576	0.0568	0.0554	0.0503	0.0463	0.0387	0.0336	0.0291	0.0256
0.49	0.1418	0.1924	0.4503	0.2850	0.2183	0.1815	0.1502	0.1263	0.1083	0.0941	0.0825	0.0741	0.0663	0.0614	0.0574	0.0561	0.0551	0.0541	0.0493	0.0451	0.0378	0.0328	0.0285	0.0250
0.48	0.1609	0.2500	0.3751	0.2670	0.2085	0.1748	0.1452	0.1225	0.1054	0.0917	0.0803	0.0722	0.0648	0.0601	0.0561	0.0548	0.0540	0.0529	0.0480	0.0441	0.0369	0.0321	0.0279	0.0244
0.47	0.1870		0.3419	0.2530	0.2000	0.1687	0.1400	0.1187	0.1023	0.0891	0.0782	0.0703	0.0632	0.0583	0.0546	0.0535	0.0527	0.0514	0.0468	0.0430	0.0360	0.0312	0.0272	0.0283
0.46	0.2235	0.5060	0.3152	0.2390	0.1912	0.1620	0.1350	0.1147	0.0993	0.0865	0.0761	0.0685	0.0616	0.0570	0.0533	0.0522	0.0512	0.0502	0.0458	0.0420	0.0351	0.0306	0.0267	0.0233
0.45	0.2980	0.4350	0.2960	0.2283	0.1838	0.1558	0.1300	0.1110	0.0962	0.0840	0.0739	0.0664	0.0598	0.0553	0.0517	0.0507	0.0499	0.0488	0.0444	0.0409	0.0342	0.0298	0.0259	0.0228
0.44	1.4143	0.3900	0.2790	0.2188	0.1770	0.1501	0.1256	0.1076	0.0935	0.0816	0.0718	0.0648	0.0582	0.0541	0.0505	0.0495	0.0488	0.0477	0.0434	0.0399	0.0335	0.0291	0.0252	0.0221
0.43	0.6000	0.3610	0.2658	0.2102	0.1708	0.1446	0.1212	0.1042	0.0908	0.0793	0.0698	0.0631	0.0568	0.0526	0.0492	0.0482	0.0473	0.0463	0.0423	0.0388	0.0326	0.0283	0.0247	0.0216
0.42	0.5000	0.3378	0.2525	0.2016	0.1643	0.1390	0.1170	0.1008	0.0880	0.0770	0.0680	0.0614	0.0552	0.0511	0.0478	0.0468	0.0459	0.0451	0.0409	0.0378	0.0317	0.0276	0.0241	0.0210
0.41	0.4530	0.3190	0.2410	0.1941	0.1585	0.1338	0.1128	0.0978	0.0853	0.0746	0.0660	0.0595	0.0536	0.0496	0.0463	0.0454	0.0447	0.0438	0.0398	0.0367	0.0308	0.0268	0.0234	0.0204
0.40	0.4116	0.3000	0.2307	0.1860	0.1528	0.1290	0.1090	0.0948	0.0823	0.0723	0.0641	0.0577	0.0519	0.0483	0.0451	0.0442	0.0434	0.0426	0.0388	0.0357	0.0299	0.0261	0.0228	0.0199
0.39	0.3873	0.2860	0.2216	0.1791	0.1475	0.1244	0.1055	0.0919	0.0801	0.0702	0.0621	0.0561	0.0506	0.0469	0.0438	0.0429	0.0423	0.0416	0.0376	0.0347	0.0290	0.0253	0.0222	0.0194
0.38	0.3644	0.2700	0.2118	0.1718	0.1418	0.1195	0.1017	0.0888	0.0775	0.0679	0.0602	0.0543	0.0490	0.0454	0.0425	0.0416	0.0409	0.0402	0.0364	0.0337	0.0281	0.0247	0.0215	0.0188
0.37	0.3450	0.2571	0.2037	0.1650	0.1369	0.1153	0.0985	0.0861	0.0750	0.0659	0.0584	0.0526	0.0475	0.0441	0.0412	0.0403	0.0397	0.0389	0.0353	0.0327	0.0272	0.0238	0.0208	0.0183
0.36	0.3248	0.2441	0.1950	0.1580	0.1316	0.1109	0.0950	0.0830	0.0724	0.0637	0.0564	0.0508	0.0458	0.0426	0.0398	0.0390	0.0383	0.0377	0.0342	0.0316	0.0264	0.0231	0.0201	0.0177
0.35	0.3090	0.2341	0.1872	0.1520	0.1271	0.1069	0.0917	0.0802	0.0700	0.0616	0.0546	0.0492	0.0444	0.0412	0.0386	0.0377	0.0372	0.0364	0.0331	0.0306	0.0256	0.0224	0.0195	0.0171
0.34	0.2933	0.2240	0.1794	0.1457	0.1222	0.1028	0.0882	0.0773	0.0676	0.0595	0.0527	0.0476	0.0429	0.0397	0.0373	0.0364	0.0359	0.0352	0.0319	0.0296	0.0247	0.0218	0.0189	0.0166
0.33	0.2804	0.2150	0.1722	0.1400	0.1176	0.0991	0.0851	0.0747	0.0652	0.0575	0.0509	0.0459	0.0414	0.0383	0.0359	0.0352	0.0347	0.0340	0.0308	0.0285	0.0238	0.0209	0.0182	0.0160
0.32	0.2667	0.2054	0.1650	0.1340	0.1128	0.0952	0.0819	0.0718	0.0627	0.0555	0.0491	0.0441	0.0398	0.0371	0.0347	0.0339	0.0335	0.0328	0.0298	0.0275	0.0230	0.0202	0.0176	0.0154
0.31	0.2552	0.1970	0.1581	0.1286	0.1084	0.0915	0.0783	0.0691	0.0603	0.0534	0.0472	0.0426	0.0384	0.0356	0.0333	0.0327	0.0322	0.0317	0.0286	0.0265	0.0221	0.0195	0.0170	0.0149
0.30	0.2432	0.1876	0.1513	0.1230	0.1038	0.0876	0.0755	0.0663	0.0580	0.0513	0.0454	0.0409	0.0370	0.0342	0.0321	0.0314	0.0309	0.0303	0.0274	0.0255	0.0213	0.0188	0.0163	0.0143
0.29	0.2320	0.1794	0.1449	0.1177	0.0994	0.0811	0.0725	0.0636	0.0556	0.0493	0.0436	0.0392	0.0354	0.0328	0.0308	0.0302	0.0297	0.0291	0.0264	0.0245	0.0205	0.0179	0.0157	0.0138
0.28	0.2203	0.1710	0.1383	0.1123	0.0951	0.0806	0.0695	0.0609	0.0533	0.0473	0.0419	0.0376	0.0340	0.0316	0.0296	0.0289	0.0284	0.0280	0.0253	0.0235	0.0197	0.0172	0.0150	0.0132
0.27	0.2109	0.1635	0.1320	0.1076	0.0910	0.0772	0.0663	0.0582	0.0511	0.0454	0.0401	0.0360	0.0326	0.0302	0.0283	0.0276	0.0273	0.0268	0.0244	0.0225	0.0189	0.0166	0.0144	0.0128
0.26	0.1998	0.1550	0.1258	0.1023	0.0865	0.0736	0.0636	0.0555	0.0488	0.0433	0.0384	0.0343	0.0311	0.0289	0.0271	0.0263	0.0261	0.0256	0.0233	0.0215	0.0181	0.0158	0.0138	0.0120
0.25	0.1903	0.1480	0.1197	0.0976	0.0825	0.0703	0.0607	0.0531	0.0466	0.0414	0.0366	0.0328	0.0297	0.0276	0.0258	0.0252	0.0249	0.0246	0.0222	0.0205	0.0173	0.0151	0.0132	0.0114
0.24	0.1795	0.1397	0.1137	0.0925	0.0783	0.0669	0.0577	0.0503	0.0443	0.0394	0.0349	0.0313	0.0283	0.0263	0.0246	0.0241	0.0238	0.0233	0.0212	0.0196	0.0165	0.0143	0.0126	0.0110
0.23	0.1707	0.1326	0.1080	0.0878	0.0747	0.0637	0.0549	0.0480	0.0423	0.0375	0.0332	0.0297	0.0270	0.0251	0.0234	0.0228	0.0226	0.0222	0.0201	0.0186	0.0157	0.0137	0.0120	0.0104
0.22	0.1603	0.1248	0.1020	0.0831	0.0704	0.0602	0.0518	0.0452	0.0401	0.0355	0.0314	0.0280	0.0254	0.0237	0.0221	0.0216	0.0213	0.0209	0.0192	0.0176	0.0150	0.0129	0.0114	0.0099
0.21	0.1530	0.1180	0.0962	0.0787	0.0670	0.0571	0.0493	0.0429	0.0381	0.0338	0.0299	0.0266	0.0242	0.0224	0.0210	0.0204	0.0201	0.0199	0.0181	0.0167	0.0142	0.0123	0.0107	0.0094
0.20	0.1425	0.1101	0.0905	0.0743	0.0627	0.0535	0.0462	0.0402	0.0356	0.0317	0.0281	0.0251	0.0227	0.0211	0.0197	0.0192	0.0190	0.0186	0.0168	0.0157	0.0133	0.0115	0.0100	0.0088
0.19	0.1343	0.1040	0.0850	0.0700	0.0591	0.0504	0.0436	0.0378	0.0335	0.0297	0.0263	0.0236	0.0210	0.0197	0.0185	0.0181	0.0178	0.0175	0.0159	0.0147	0.0126	0.0108	0.0094	0.0083
0.18	0.1250	0.0968	0.0794	0.0653	0.0551	0.0470	0.0403	0.0352	0.0313	0.0278	0.0246	0.0221	0.0197	0.0184	0.0173	0.0169	0.0167	0.0164	0.0150	0.0137	0.0118	0.0101	0.0088	0.0077
0.17	0.1177	0.0906	0.0739	0.0614	0.0515	0.0441	0.0382	0.0330	0.0292	0.0259	0.0229	0.0205	0.0184	0.0172	0.0162	0.0158	0.0156	0.0153	0.0140	0.0128	0.0109	0.0095	0.0082	0.0072
0.16	0.1077	0.0836	0.0685	0.0566	0.0476	0.0407	0.0352	0.0307	0.0271	0.0240	0.0213	0.0191	0.0173	0.0159	0.0105	0.0146	0.0144	0.0142	0.0129	0.0119	0.0101	0.0088	0.0076	0.0067
0.15	0.1000	0.0777	0.0631	0.0524	0.0442	0.0377	0.0327	0.0285	0.0250	0.0221	0.0197	0.0176	0.0158	0.0147	0.0138	0.0136	0.0133	0.0131	0.0120	0.0110	0.0094	0.0081	0.0070	0.0062
0.14	0.0913	0.0713	0.0579	0.0481	0.0403	0.0344	0.0300	0.0262	0.0230	0.0203	0.0181	0.0162	0.0145	0.0136	0.0127	0.0124	0.0122	0.0120	0.0110	0.0101	0.0086	0.0074	0.0064	0.0057
0.13	0.0837	0.0654	0.0529	0.0440	0.0370	0.0315	0.0274	0.0241	0.0210	0.0185	0.0165	0.0147	0.0132	0.0124	0.0116	0.0113	0.0111	0.0109	0.0102	0.0093	0.0078	0.0068	0.0059	0.0052
0.12	0.0752	0.0587	0.0478	0.0393	0.0333	0.0287	0.0249	0.0219	0.0190	0.0168	0.0149	0.0134	0.0120	0.0112	0.0150	0.0103	0.0101	0.0099	0.0092	0.0083	0.0071	0.0061	0.0053	0.0047
0.11	0.0679	0.0530	0.0429	0.0354	0.0300	0.0259	0.0225	0.0197	0.0171	0.0151	0.0134	0.0120	0.0107	0.0101	0.0094	0.0092	0.0090	0.0089	0.0083	0.0075	0.0064	0.0055	0.0048	0.0042
0.10	0.0598	0.0467	0.0380	0.0312	0.0266	0.0230	0.0200	0.0176	0.0152	0.0134	0.0119	0.0107	0.0095	0.0090	0.0084	0.0082	0.0081	0.0079	0.0073	0.0066	0.0057	0.0049	0.0042	0.0038
0.05	0.0245	0.0205	0.0161	0.0138	0.0114	0.0099	0.0086	0.0076	0.0067	0.0058	0.0052	0.0046	0.0041	0.0038	0.0036	0.0035	0.0035	0.0034	0.0031	0.0029	0.0025	0.0021	0.0018	0.0016
0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Índice de autores

—F—

—G—

—H—

—I—

—J—

—K—

—L—

—M—

Índice de materias

—S—

—T—

—U—

—V—

ISBN: 958-600-228-4
9 789586 002288